第 26 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 1
2003 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2003

# 一个环境数学模型的一致持久性与稳定性*

李 林
(北京石油化工学院, 北京 102600)

唐民英
(云南大学应用数学研究所, 昆明 650091)

俞元洪
(中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所, 北京 100080)

**摘 要** 本文研究一个生态环境数学模型

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}&=x(t)\Big(\alpha-bx(t)-c_s\int_{-\infty}^{t}\delta_0e^{-\delta_0(t-s)}y(s)\,\mathrm{d}s\Big),\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}&=y(t)[u(x(t-\tau))-a-\beta y(t)],\qquad u(x)=\frac{\mu x}{k+x}.\end{aligned}$$

当系统存在正平衡态时, 通过利用 Hale-Waltman 关于一致持久的定理, 得到了系统的一致持久性. 也证明了当 $c_s\mu<bk\beta$ 时, 正平衡位置的全局稳定性.

**关键词** 时滞微分方程, 平衡点, 一致持久, 稳定性

## 1 引言

近年来由于生态环境问题受到人们广泛的重视, 研究环境数学模型的文献也日益增多 [1-4]. [1] 讨论了浮游动物, 浮游植物和磷养料之间相互关系的数学模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_1\Big(\frac{ax_2(t)}{k+x_2(t)}-ex_3(t)-d\Big),\\ \dot{x}_2(t)&=mx_1\Big(f-\frac{ax_2(t)}{k+x_2(t)}\Big),\\ \dot{x}_3(t)&=x_3\Big(\frac{bx_1(t)}{L+x_1(t)}-c\Big).\end{aligned}\tag{1.1}$$

利用中心流形理论研究了这个系统的周期解的存在性. [2-4] 研究了一类恒化器型

本文 2000 年 11 月 14 日收到. 2003 年 1 月 10 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10261008 号) 和云南自然科学基金 (2000A0002M 号) 资助项目.

(chemostat-type) 数学模型

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=D(N^0-N)-aPu(N)+r_1\int_{-\infty}^{t}F(t-s)P(s)\,\mathrm{d}s,\\
&\frac{dP}{dt}=P\big[a_1u\big(N(t-\tau)\big)-(r_1+D)\big]
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

以及 (1.2) 的一些特殊情况, 其中 $N$ 与 $P$ 分别表示营养物质与浮游动物浓度, 证明了模型的一致持久性及 Hopf 分支的存在性.

基于模型 (1.2) 本文提出营养物质与浮游动物间的动态模型如下: 设 $x(t),y(t)$ 分别表示 $t$ 时刻营养物质与浮游动物浓度, 考虑 $x(t)$ 服从 Logistic 模型, 而 $y(t)$ 服从 (1.2) 的第二个方程, 并更一般地考虑浮游动物的密度制约因素, 因此得到如下具有时滞的描述浮游动物与其营养物质间的相互作用关系的数学模型

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\Big(\alpha-bx(t)-c_s\int_{-\infty}^{t}f(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s\Big),\\
&\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)\big[u\big(x(t-\tau)\big)-a-\beta y(t)\big],\qquad u(x)=\frac{\mu x}{k+x},
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

其初始条件为

$$x(s)=\phi(s)\ge 0,\quad s\in[-\tau,0],\qquad y(\theta)=\psi(\theta)\ge 0,\quad \theta\in(-\infty,0]. \tag{1.4}$$

方程 (1.3) 中的参数 $\alpha,\beta,a,b,c_s,k,\mu$ 均为正常数, 时滞 $\tau\ge 0$, 而时滞核函数 $f(s)$ 一般为非负的定义于 $[0,+\infty)$ 上的有界函数满足 $\int_0^{+\infty}f(s)\,\mathrm{d}s=1$, 特殊地, 可取核函数为

$$f(s)=\delta_0e^{-\delta_0 s},\qquad \delta_0>0. \tag{1.5}$$

不难计算 (1.3) 所等价的积分形式为

$$x(t)=\frac{x(0)\exp\big\{\int_0^t[\alpha-c_s\int_{-\infty}^{s_1}f(s_1-s_2)y(s_2)\,\mathrm{d}s_2]\,\mathrm{d}s_1\big\}}{1+bx(0)\int_0^t\exp\big\{\int_0^{s_1}\big[\alpha-c_s\int_{-\infty}^{s_2}f(s_2-s_3)y(s_3)\,\mathrm{d}s_3\big]\,\mathrm{d}s_2\big\}\,\mathrm{d}s_1}, \tag{1.6a}$$

$$y(t)=\frac{y(0)\exp\big\{\int_0^t\big[\frac{\mu x(s-\tau)}{k+x(s-\tau)}-a\big]\,\mathrm{d}s\big\}}{1+y(0)\beta\int_0^t\exp\big\{\int_0^{s_1}\big[\frac{\mu x(s_2-\tau)}{1+x(s_2-\tau)}-a\big]\,\mathrm{d}s_2\big\}\,\mathrm{d}s_1}. \tag{1.6b}$$

由 [5] 中关于解的存在性理论, 系统 (1.3) 存在唯一满足 (1.4) 的解. 进一步由 (1.5) 知解是非负的. 如果 $\phi(0)>0$, $\psi(0)>0$, 那么这个解是正解, 即对任何 $t>0$, $x(t)>0$, $y(t)>0$.

若取时滞核函数为 (1.5) 那么方程 (1.3) 有非零平衡位置 $E^0(\frac{\alpha}{b},0)$, 而且若

$$\alpha(\mu-a)>abk \tag{1.7}$$

成立时, 有正平衡位置 $E(x_0,y_0)$, 其中 $x_0$ 为方程 $b\beta x^2+\big[c_s(\mu-a)-\beta(\alpha-kb)\big]x-akc_s-\alpha\beta k=0$ 的唯一正根而 $y_0$ 满足 $y_0=\frac{u(x_0)-a}{\beta}$.

第 2 节将利用 [6] 的一般结果证明系统 (1.3) 在 (1.7) 的条件下是一致持久的. 第 3 节讨论了正平衡位置的全局稳定性, 也讨论 (1.3) 的一些特殊情况.

## 2 持久性

考虑系统 (1.3), (1.4). 先证明如下系统耗散的结论.

**定理 2.1** 设 $x(t), y(t)$ 是系统 (1.3), (1.4) 的任一解，则存在与初始数据无关的常数 $M>0$ 使得

$$\max\left\{\limsup_{t\to+\infty} x(t), \limsup_{t\to+\infty} y(t)\right\} < M. \tag{2.1}$$

证 由 (1.3) 的第一式知，对于 (1.3), (1.4) 的任一正解 $x(t), y(t)$ 有

$$\dot{x}(t) \le x(t)\big(\alpha - bx(t)\big).$$

而由此可以推得

$$\limsup_{t\to+\infty} x(t) \le \frac{\alpha}{b}. \tag{2.2}$$

再由 (1.3) 的第二式知，对于正解 $x(t), y(t)$ 有

$$\dot{y}(t) \le y(t)\big(\mu - a - \beta y(t)\big).$$

如果 $\mu > a$, 那末下式成立

$$\limsup_{t\to+\infty} y(t) \le \frac{\mu - a}{\beta}. \tag{2.3}$$

如果 $\mu \le a$, 显然微分方程

$$\dot{v}(t) = v(t)\big(\mu - a - \beta v(t)\big) \tag{2.4}$$

的所有正解当 $t\to\infty$ 时都趋近于零. 因此结合 (2.2), (2.3) 知定理的结论成立.

如果取时滞核函数为 (1.5), 则模型 (1.3) 成为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= x(t)\Big(\alpha - bx(t) - c_s\int_{-\infty}^{t}\delta_0 e^{-\delta_0(t-s)}y(s)\,\mathrm{d}s\Big),\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= y(t)\big[u\big(x(t-\tau)\big) - a - \beta y(t)\big].\end{aligned} \tag{2.5}$$

系统 (2.5) 与 (1.3) 的平衡位置是一样的.

令 $z(t) = \int_{-\infty}^{t}\delta_0 e^{-\delta_0(t-s)}y(s)\,\mathrm{d}s$, 则 (2.5) 可以化为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\big(\alpha - bx(t) - c_s z(t)\big),\\ &\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = y(t)\big[u\big(x(t-\tau)\big) - a - \beta y(t)\big], \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \delta_0\big(y(t) - z(t)\big),\end{aligned} \tag{2.6}$$

其初始条件为

$$x(s) = \phi(s) \ge 0, \quad s\in[-\tau, 0], \qquad y(0) = y^0 \ge 0, \qquad z(0) = z^0 \ge 0. \tag{2.7}$$

考虑到 (1.4), 此处 $z^0 = z(0) = \int_{-\infty}^{0}\delta_0 e^{-\delta_0(t-s)}y(s)\,\mathrm{d}s$, 由于 (1.4) 中 $\psi$ 的任意性， $z^0 \ge 0$ 也可以看作是任意的. 但是如果 $z^0 = 0$, 则知 $\psi \equiv 0$, 从而 $y^0 = 0$.

设 $X$ 是非负的由 $[-\tau,0]$ 到 $R^3$ 的连续函数 $(\phi,y^0,z^0)$ ($y^0\geq 0$, $z^0\geq 0$ 为常数) 的全体所构成的空间，具有通常意义下的范数，如

$$\|(\phi,y^0,z^0)\|=\max_{s\in[-\tau,0]}\sqrt{\phi^2(s)+(y^0)^2+(z^0)^2}.$$

由定理 2.1 耗散的结论，易知由 (2.6) 定义的解算子对 $t\geq\tau$ 是紧致的 (参见 [5] 的第四章). 因此由 [6] 的定理 2.2 知，系统 (2.6) 在 $X$ 中存在一个全局吸引子 $A$.

**定理 2.2** 如果 (1.7) 成立，则系统 (2.6) 是一致持久的.

证 定义 $U=\{(\phi,y^0,z^0)\in X:\phi(0)y^0z^0>0\}$ 和 $V=\{(\phi,y^0,z^0)\in X:\phi(0)y^0=0\}$. 注意到 $z^0=0$ 隐含 $y^0=0$, 显然有 $X=U\cup V$ 是完备的度量空间，而且 $U$ 和 $V$ 没有公共部分， $U$ 是开集， $V$ 是闭集. 对 $(\phi,y^0,z^0)\in X$ $(t\geq 0)$ 定义

$$T(t)(\phi,y^0,z^0)(\theta)=\big(x(t+\theta),y(t),z(t)\big),\qquad \theta\in[-\tau,0],$$

这里 $\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ 是 (2.6), (2.7) 的解. 由本定理上边关于 (2.6) 的解讨论以及引言中关于 (1.3) 的解的讨论 ((1.5) 式) 可知对 $t\geq\tau$, $T(t)$ 是紧致的而且

$$T(t)U\to U,\qquad T(t)V\to V.$$

如果初值 $(\phi,y^0,z^0)$ 在 $V$ 中，则解 $\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ 满足：当 $\phi(0)=0$ 时， $x(t)=0$; 当 $y^0=0$ 时， $y(t)=0$. 因此，在 $V$ 中系统 (2.6) 成为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\big(\alpha-bx(t)-c_sz(t)\big),\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\delta_0\big(-z(t)\big)\tag{2.8}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)\big[-a-\beta y(t)\big],\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\delta_0\big(y(t)-z(t)\big).\tag{2.9}$$

令 $M_1=\{(0,0,0)\}$, $M_2=\{(\frac{\alpha}{b},0,0)\}$. 因此， $V$ 中的任一解 $T(t)u$ 的 $\omega$ 极限集是 $M_1$ 或 $M_2$. 下面证明在 $V$ 中 $M_1$ 与 $M_2$ 之间不存在周期链： $M_1\to M_2\to M_1$, 这里 $M_1\to M_2$ 称为 $M_1$ 被链接到 $M_2$, 是指存在 $u\notin M_1\cup M_2$ 使得 $u\in W^u(M_1)\cap W^s(M_2)$, 这里 $W^u(M_1)$ 与 $W^s(M_2)$ 分别指不稳定流形与稳定流形. 事实上，由 (2.8) 知，在 $x-z$ 相平面上, $(x,z)=(0,0)$ 和 $(x,z)=(\frac{\alpha}{b},0)$ 是 (2.8) 的两个平衡位置，前者是鞍点，后者为稳定的结点, 其间有唯一一条轨线从鞍点到稳定结点，这条轨线是 $x$ 轴的一段. 满足：当 $t\to+\infty$ 时， $\big(x(t),y(t),z(t)\big)\to M_2$, 而当 $t\to-\infty$ 时， $\big(x(t),y(t),z(t)\big)\to M_1$. 但是在 $V$ 中不存在 $M_2\to M_1$. 由 (2.9) 知，在 $y-z$ 相平面上， $(y,z)=(0,0)$ 是 (2.9) 的唯一的平衡位置，为稳定的结点. 因此在 $V$ 中不存在周期链.

为了应用 [6] 中的结论, 还必须证明，对于 $U$ 中的任一解 $T(t)u$ 存在 $\eta_i>0$ $(i=1,2)$ 使得

$$\limsup_{t\to+\infty}d\big(T(t)u,M_i\big)\geq\eta_i.\tag{2.10}$$

这里 $d(\cdot,\cdot)$ 表示 $X$ 中的距离. 事实上，由 (2.6) 知，存在 $\eta_1>0$ 使得当 $0\leq x(t)\leq\eta_1$, $0\leq z(t)\leq\eta_1$ 时，存在一个正数 $\varepsilon_1>0$ 使得 $\alpha-bx(t)-c_sz(t)>\varepsilon_1$. 假设 $i=1$ 时 (2.10) 不成立，则存在一个正解 $\big(x_1(t),y_1(t),z_1(t)\big)$ 及 $T_1>0$ 使得对 $t\geq T_1$ 有

$$0<x_1(t)\leq\eta_1,\qquad 0<z_1(t)\leq\eta_1,\tag{2.11}$$

因此当 $t \geq T_1$ 时 $\dot{x}_1(t) \geq \varepsilon_1 x_1(t)$, 这与 (2.11) 矛盾. 因而对 $i=1$, (2.10) 成立. 由于 (1.7) 成立, 因此存在 $\eta_2>0$ 使得 $u\left(\frac{\alpha}{b}-\eta_2\right)-a-\beta\eta_2>0$. 假设 $i=2$ 时 (2.10) 不成立, 则存在一个正解 $\left(x_2(t), y_2(t), z_2(t)\right)$ 及 $T_2>0$ 使得对 $t \geq T_2$ 有

$$\frac{\alpha}{b}-\eta_2<x_2(t)<\eta_2+\frac{\alpha}{b}, \qquad 0<y_2(t) \leq \eta_2, \tag{2.12}$$

因此当 $t \geq T_2$ 时 $\dot{y}_2(t) \geq \left[u\left(\frac{\alpha}{b}-\eta_2\right)-a-\beta\eta_2\right] y_2(t)$, 这与 (2.12) 矛盾. 因此 $i=2$ 时 (2.10) 成立. 至此 [6] 中定理 4.1 的全部条件都被满足, 因此 (1.7) 成立时系统 (2.6) 是一致持久的.

## 3　稳定性

设 (1.7) 成立, 则 (2.6) 的正平衡位置为 $E(x_0, y_0, y_0)$. 关于它的局部稳定性有

**定理 3.1**　设 (1.7) 成立. 如果 $(\mu-a)c_s<(\alpha+bk)\beta$, 则 (2.6) 的平衡点 $E$ 对于任意的时滞 $\tau$ 都是局部渐近稳定的.

证　为了考虑系统 (2.6) 的正平衡位置 $E$ 的稳定性, 写出系统 (2.6) 在 $E$ 处的线性近似方程为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -bx_0x_1(t)-c_sx_0x_3(t),\\
\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mu y_0 k}{(k+x_0)^2}x_1(t-\tau)-\beta y_0x_2(t),\\
\frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t} &= \delta_0\left(x_2(t)-x_3(t)\right).
\end{aligned}$$

它的特征方程为

$$\lambda^3+(\delta_0+bx_0+\beta y_0)\lambda^2+(bx_0\delta_0+bx_0\beta y_0+\beta y_0\delta_0)\lambda+bx_0\beta y_0\delta_0+\delta e^{-\lambda\tau}=0, \tag{3.1}$$

其中 $\delta=\frac{\mu c_s k x_0 y_0 \delta_0}{(k+x_0)^2}$. 为了考虑 (2.8) 的纯虚根, 令 $\lambda=i\sigma$, 则 (3.1) 成为

$$\begin{aligned}
&(bx_0\delta_0+bx_0\beta y_0+\beta y_0\delta_0)\sigma-\sigma^3=\delta\sin(\sigma\tau),\\
&(\delta_0+bx_0+\beta y_0)\sigma^2-bx_0\beta y_0\delta_0=\delta\cos(\sigma\tau).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

因此当

$$\left((bx_0\delta_0+bx_0\beta y_0+\beta y_0\delta_0)\sigma-\sigma^3\right)^2+\left((\delta_0+bx_0+\beta y_0)\sigma^2-bx_0\beta y_0\delta_0\right)^2=\delta^2$$

时, 即方程

$$\begin{aligned}
&\sigma^6+\left[(bx_0)^2+(\delta_0)^2+(\beta y_0)^2\right]\sigma^4+\left[(bx_0\delta_0)^2+(bx_0\beta y_0)^2+(\beta y_0\delta_0)^2\right]\sigma^2\\
&+\delta_0^2x_0^2y_0^2\left[(b\beta)^2-\left(\frac{\mu c_s k}{(k+x_0)^2}\right)^2\right]=0
\end{aligned} \tag{3.3}$$

有根时, (3.1) 有一对共扼纯虚根 $\lambda=\pm\sigma i$. 由于 (3.3) 可以看作是关于 $\sigma^2$ 的三次代数

方程，因为其常数项系数与下式同号

$$\begin{aligned} b\beta-\frac{\mu c_s k}{(k+x_0)^2}=&\frac{1}{(k+x_0)^2}[b\beta k^2+b\beta x_0^2+2b\beta k x_0-\mu c_s k]\\ =&\frac{1}{(k+x_0)^2}\left[b\beta k^2-c_s(\mu-a)x_0+\beta(\alpha-kb)\,x_0+akc_s+\alpha\beta k+2b\beta k x_0-\mu c_s k\right]\\ =&\frac{1}{k+x_0}\left[(\alpha+bk)\beta-(\mu-a)c_s\right]. \end{aligned}$$

如果 $(\mu-a)c_s<(\alpha+bk)\beta$, 则上式为正，那么这个代数方程的每一项系数都为正，关于 $\sigma^2$ 的三次代数方程 (3.3) 没有正根，从而 (3.1) 没有纯虚根.

另外由于 $\tau=0$ 时，特征方程 (3.1) 变为

$$\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\alpha_2\lambda+\alpha_3=0.$$

不难验证， $\alpha_i>0$ $(i=1,2,3)$, 而且

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_2-\alpha_3=&(\delta_0+bx_0+\beta y_0)(bx_0\delta_0+bx_0\beta y_0+\beta y_0\delta_0)-(bx_0\beta y_0\delta_0+\delta)\\ =&bx_0\delta_0^2+(bx_0)^2\delta_0+(bx_0)^2\beta y_0+bx_0(\beta y_0)^2+\beta y_0\delta_0^2+\beta y_0(\delta_0)^2\\ &+2bx_0\beta y_0\delta_0-\delta>0, \end{aligned}$$

则所有特征根具负实部的根，因此 (2.6) 的平衡点 $E$ 对于任意的时滞 $\tau$ 都是稳定的，即得定理的结论.

进一步，可证 $E$ 是全局渐近稳定的.

**定理 3.2** 设 (1.7) 成立. 如果 $c_s\mu<bk\beta$, 则 (1.3) 的正平衡点 $E$ 是全局渐近稳定的.

证 对 (1.3), (1.4) 的任一正解 $x(t),y(t)$ 由 (1.3) 的第一个方程知,

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\Big(\alpha-bx(t)-c_s\int_{-\infty}^{t}f(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s\Big)\le x(t)\big(\alpha-bx(t)\big).$$

由于常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u(q-pu),\qquad p>0,\quad q>0 \tag{3.4}$$

具有全局稳定的正平衡点 $u_0=\frac{q}{p}$, 因此 (1.3), (1.4) 的解 $x(t),y(t)$ 当 $t>0$ 时满足 $x(t)\le u(t,\phi(0))$, 这里 $u(t,\phi(0))$ 是常微分方程 (3.4) 的满足条件 $u(0,\phi(0))=\phi(0)$ 的解，从而也有

$$\limsup_{t\to\infty}x(t)\le\frac{\alpha}{b}=p_1^1. \tag{3.5}$$

由 (1.3) 的第二个方程及 (3.5), 存在充分大的 $T_1>0$ 使得 $t>T_1+\tau$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=y(t)\big[u\big(x(t-\tau)\big)-a-\beta y(t)\big]\le y(t)\Big[u\Big(\frac{\alpha}{b}\Big)-a-\beta y(t)\Big],$$

从而也有

$$\limsup_{t\to\infty}y(t)\le\frac{u(p_1^1)-a}{\beta}=\frac{(\mu-a)\alpha-abk}{\beta(kb+\alpha)}=p_2^1, \tag{3.6}$$

再由 (1.3) 的第一个方程以及 (3.6) 知存在 $T_2>0$ 使得当 $t>T_1+T_2+\tau$ 时

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)\Big(\alpha-bx(t)-c_s\int_{-\infty}^{t}f(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s\Big)\geq x(t)\big[\alpha-c_sp_2^1-bx(t)\big].$$

定理条件 $c_s\mu<bk\beta$ 保证 $\alpha-c_sp_2^1>0$, 常微分方程 (3.4) 的特性可推得 $x(t)\geq u\big(t,x(T_1+T_2+\tau)\big)$, 这里 $u\big(t,x(T_1+T_2+\tau)\big)$ 是常微分方程 (3.4) 的满足条件 $u\big(T_1+T_2+\tau,x(T_1+T_2+\tau)\big)=x(T_1+T_2+\tau)$ 的解，因此,

$$\liminf_{t\to\infty}x(t)\geq\frac{\alpha-c_sp_2^1}{b}=q_1^1,\tag{3.7}$$

条件 $c_s\mu<bk\beta$ 也保证 $u(q_1^1)-a>0$ 同理可得

$$\liminf_{t\to\infty}y(t)\geq\frac{u(q_1^1)-a}{\beta}=q_2^1.\tag{3.8}$$

定义函数

$$p(y)=\frac{\alpha-c_sy}{b},\quad y\in\Big[0,\frac{\alpha}{c_s}\Big];\qquad q(x)=\frac{u(x)-a}{\beta},\quad x\in\Big[0,\frac{\alpha}{b}\Big];$$
$$r(\sigma)=q\big[p(\sigma)\big],\quad \sigma\in\Big[0,\frac{\alpha}{c_s}\Big].$$

$p(y)$ 在 $\big[0,\frac{\alpha}{c_s}\big]$ 上单调减少，则 $p(y)\in\big[0,\frac{\alpha}{b}\big]$. $q(x)$ 在 $\big[0,\frac{\alpha}{b}\big]$ 上单调增加，则 $q(x)\in\big[0,q\big(\frac{\alpha}{b}\big)\big]\subset\big[0,\frac{(\mu-a)\alpha-abk}{\beta(kb+\alpha)}\big]$. 考虑到条件 $c_s\mu<bk\beta$, 则 $r(\sigma):\big[0,\frac{\alpha}{c_s}\big]\to\big[0,\frac{(\mu-a)\alpha-abk}{\beta(kb+\alpha)}\big]\subset\big[0,\frac{\alpha}{c_s}\big]$, 而且

$$r'(\sigma)=\frac{-c_skb\mu}{(kb+\alpha-c_s\sigma)^2\beta}>-1.$$

由于

$$p_1^1=p(0),\quad p_2^1=q(p_1^1)=r(0),\quad q_1^1=p(p_2^1)=p\big(r(0)\big),\quad q_2^1=q(q_1^1)=r\big(r(0)\big)=r^2(0),$$

则 (3.5)–(3.8) 可以改写为

$$p\big(r(0)\big)\leq\liminf_{t\to\infty}x(t)\leq\limsup_{t\to\infty}x(t)\leq p(0),\tag{3.9a}$$
$$r^2(0)\leq\liminf_{t\to\infty}y(t)\leq\limsup_{t\to\infty}y(t)\leq r(0),\tag{3.9b}$$

重复以上讨论可以得到,

$$p\big(r^3(0)\big)\leq\liminf_{t\to\infty}x(t)\leq\limsup_{t\to\infty}x(t)\leq p\big(r^2(0)\big),\tag{3.10a}$$
$$r^4(0)\leq\liminf_{t\to\infty}y(t)\leq\limsup_{t\to\infty}y(t)\leq r^3(0),\tag{3.10b}$$

进一步对正整数 $n$ 也有

$$p\big(r^{n+1}(0)\big)\leq\liminf_{t\to\infty}x(t)\leq\limsup_{t\to\infty}x(t)\leq p\big(r^n(0)\big),\tag{3.11a}$$
$$r^{n+2}(0)\leq\liminf_{t\to\infty}y(t)\leq\limsup_{t\to\infty}y(t)\leq r^{n+1}(0).\tag{3.11b}$$

由于 $\left|r'(s)\right| < 1$, 则无穷迭代 $r^n(s)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 $s = r(s)$ 的唯一正根 $y_0$, 则当 $n \to +\infty$ 时, 得到

$$x_0 = p(y_0) \le \liminf_{t\to\infty} x(t) \le \limsup_{t\to\infty} x(t) \le p(y_0) = x_0, \tag{3.12a}$$

$$y_0 \le \liminf_{t\to\infty} y(t) \le \limsup_{t\to\infty} y(t) \le y_0. \tag{3.12b}$$

证毕.

作为例子考虑如下数学模型

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= x(t)\Big(2 - 0.1x(t) - 0.2\int_{-\infty}^{t} 0.3e^{-0.3(t-s)}y(s)\,\mathrm{d}s\Big),\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= y(t)\Big[\frac{9x(t-\tau)}{6+x(t-\tau)} - 4 - \beta y(t)\Big].\end{aligned}$$

显然它满足 (1.7), 因此该系统是一致持久的; 如果进一步 $\beta > 3$, 例如取 $\beta = 3.2$ 则该系统的平衡点 $(18.266, 0.867)$ 是全局稳定的.

另外, 如果模型 (1.3) 中的时滞核函数取为 $\delta$ 函数, 则由定理 3.2 的证明不难得到: 只要 (1.7) 和 $c_s\mu < bk\beta$ 成立, 则系统

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\big(\alpha - bx(t) - c_s y(t)\big), \qquad \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = y(t)\Big[\frac{\mu x(t-\tau)}{k + x(t-\tau)} - a - \beta y(t)\Big]$$

的唯一正平衡点是全局吸引的. 不难验证这个微分方程模型满足 [7] 中主要结论的条件, 因此直接可以得出平衡点的全局吸引性.

最后, 作为结束, 我们指出, 不考虑离散时滞, 即 $\tau = 0$, 而时滞核函数为 $\delta$ 函数的模型 (1.3):

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\big(\alpha - bx(t) - c_s y(t)\big), \qquad \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = y(t)\big[u\big(x(t)\big) - a - \beta y(t)\big],\\ &u(x) = \frac{\mu x}{k+x}\end{aligned} \tag{3.13}$$

的全局稳定性. 对于这个常微分方程组有如下结论.

**定理 3.3** 如果 (1.7) 式成立, 则 (3.13) 的正平衡位置 $E$ 是全局 (第一象限) 渐近稳定的.

证 方程 (3.13) 在平衡点 $E(x_0, y_0)$ 处的线性近似方程的特征方程为

$$\lambda^2 + (bx_0 + \beta y_0)\lambda + bx_0\beta y_0 + \delta = 0,$$

其中 $\delta = \frac{\mu c_s k x_0 y_0}{(k+x_0)^2}$. 因此平衡点 $E(x_0, y_0)$ 为渐近稳定的. 取 $B(x,y) = \frac{1}{xy}$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\big[B(x,y)x(t)\big(\alpha - bx(t) - c_s y(t)\big)\big] + \frac{\partial}{\partial y}\big[B(x,y)y(t)\big[u\big(x(t)\big) - a - \beta y(t)\big]\big]\\ &= -\frac{b}{y} - \frac{\beta}{x} < 0.\end{aligned}$$

因此判断闭轨不存在的准则知, $E$ 的外围不存在任何闭轨线. 再由解的有界性, 以及 $x$- 轴和 $y$- 轴分别是 (3.13) 的轨线, 而点 $E^0\left(\frac{\alpha}{b}, 0\right)$ 为鞍点, 即知定理结论成立.

## 参 考 文 献

1 Arnold E M. On Stability and Periodicity in Phosphorus Nutrient Dynamics. *Quart. Appl. Math.*, 1980, 38: 139–141

2 Beretta E, Bischi G I, Solimano F. Stability in Chemostat Equations with Delayed Nutrient Recycling. *J. Math. Biol.*, 1991, 85: 99–111

3 Bischi G I. Effects of Time Lags on Transient Characteristic of a Nutrient Cycling Model. *Math. Biosci.*, 1992, 109: 151–175

4 Ruan Shigui. The Effect of Delays on Stability and Persistence in Plankton Models. *Nonlinear Analysis*, 1995, 24: 575–585

5 Hale J K. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1977

6 Hale J K, Waltman P. Persistence in Infinite-dimensional Systems. *SIAM J. Math. Appl.*, 1989, 20: 388–395

7 Cao Yulin, Freedman H I. Global Attractivity in Time-delay Predator-prey Systems. *J. Austral. Math. Soc.* (Series B), 1996, 38: 149–162

# THE STABILITY AND PERSISTENCE ON A ENVIRONMENT MATHEMATICAL MODEL

LI LIN

(*Beijing Institute of Petrochemical Technology, Beijing* 102600)

TANG MINYING

(*Institute of Applied Mathematics, Yunnan University, Kuiming* 650091)

YU YUANHONG

(*Institute of Applied Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

**Abstract** A environment mathematical model with delays:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t)\Big(\alpha - bx(t) - c_s\int_{-\infty}^{t}\delta_0 e^{-\delta_0(t-s)}y(s)\,\mathrm{d}s\Big),$$
$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = y(t)\big[u\big(x(t-\tau)\big) - a\big], \qquad u(x) = \frac{\mu x}{k+x}$$

is discussed. By using Hale-Watlman's Theorem on uniform persistence, it is proved that the system is uniformly persistent if it has a positive equilibrium. It is also shown that the positive equilibrium of the model is globally asymptotically stable.

**Key words** Differential delay equations, equilibrium, uniformily persistent, stability