第 26 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 26 No. 1
2003 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2003

半参数回归模型中小波估计的随机加权逼近速度 *

薛留根

(北京工业大学应用数理学院，北京 100022)

摘　要　把小波光滑方法和随机加权方法结合在一起，获得了半参数回归模型中参数分量的小波估计的随机加权逼近速度为 $o(n^{-1/2})$. 因此，从大样本意义上说，小波光滑方法和随机加权方法对半参数回归模型是可用的.

关键词　半参数回归模型，小波估计，随机加权逼近

1　引言和主要结果

考虑半参数回归模型

$$y_i = x_i\beta + g(t_i) + e_i, \qquad i = 1, 2, \cdots,$$

其中 β 是未知参数， $g(\cdot)$ 是定义在闭区间 $[0,1]$ 上的未知函数， $\{(x_i, t_i)\}$ 是取值于 $R^1 \times [0,1]$ 上的设计点列， $\{e_i\}$ 是 i.i.d. 随机误差序列，且

$$Ee_i = 0, \qquad \mathrm{Var}\,(e_i) = \sigma^2 > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots.$$

迄今为止，关于 β 和 g 的个各种估计的大样本性质的研究主要集中于渐近正态性、强 (弱) 相合性等, 得到了令人满意的结果 (参见 [1–3]). 从实用的角度来看, 研究估计的误差分布的模拟计算问题更显得重要. 洪圣岩和成平 [4] 综合最小二乘法和核估计法研究了 β 之估计的误差分布的 Bootstrap 逼近问题，但 [4] 没有给出逼近的精度. 为了更好地模仿 β 之估计的误差分布并获得其逼近的精度，我们采用随机加权法. 该方法由郑忠国 [5] 提出，它与 Efron[6] 于 1979 年提出的 Bootstrap 方法是平行的. 但它比 Bootstrap 方法有更好的优良性：一是它抛弃了重新抽样的想法；二是逼近精度大大提高；三是实际计算方便. 郑忠国等 [7,8] 成功地将该方法应用到了样本均值和线性模型之中. 本文把小波光滑方法和随机加权方法结合在一起，讨论 β 之小波估计的误差分布的随机加权逼近问题. 小波光滑方法是非参数估计的一个值得关注的方法. [9–13] 已将小波光滑很好地应用到了密度函数估计、非参数回归函数估计和半参数回归模型中 β 和 g 的估计之中，得到了一些重要的大样本性质. 我们用随机加权法构造了 β 之

本文 2000 年 9 月 2 日收到. 2002 年 4 月 12 日收到修改稿.
*北京市自然科学基金 (1992005) 和国家教育部优秀骨干教师基金资助项目.

小波估计的随机加权统计量，并且证明了它的逼近精度可达到 $o\left(n^{-1/2}\right)$. 因此，从大样本意义上说，小波光滑方法和随机加权方法对半参数回归模型是可用的.

考虑 [0,1] 上的常数序列 $\{t_i\}$, 而 $\{x_i\}$ 为 [0,1] 上的随机变量序列. 假设

$$x_i = f(t_i) + \eta_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, \tag{1.1}$$

不妨设 $0 = t_0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n \le 1$, 其中 $f(t)$ 为定义在 [0,1] 上的函数, $\{\eta_i\}$ 为 i.i.d. 的随机变量, 且 $\{\eta_i\}$ 与 $\{e_i\}$ 相互独立.

$$E\eta_i = 0, \qquad \operatorname{Var}(\eta_i) = \gamma > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots. \tag{1.2}$$

定义 1.1 称 S_r 为 Schwartz 空间, 如果 S_r 是 r 次连续可微的函数空间, S_r 中的函数在无穷远处迅速下降, 即对于 $h \in S_r$, 存在常数 $C_{pr} > 0$, 使得

$$\left|h^{(k)}(t)\right| \le C_{pk}\big(1 + |t|\big)^{-p}, \qquad k = 0, 1, \cdots, r, \quad p \in Z, \quad t \in R.$$

定义 1.2 称 $H^\alpha(\alpha \in R)$ 为 Sobolev 空间, 如果对 $h \in H^\alpha$, 有

$$\|h\|_\alpha^2 := \int \left|\widehat{h}(w)\right|^2 \big(1 + w^2\big)^\alpha \, \mathrm{d}w < \infty,$$

其中 $\widehat{h}$ 为 h 的 Fourier 变换.

设有给定的刻度函数 $\phi(\cdot) \in S_r$, 相伴 $L^2(R)$ 的多尺度分析为 $\{V_m\}$, V_m 的再生核为

$$E_m(t, s) = 2^m E_0\big(2^m t, 2^m s\big) = 2^m \sum_{k \in Z} \phi\big(2^m t - k\big)\phi\big(2^m s - k\big).$$

当 β 已知时, 可定义 $g(\cdot)$ 的估计为

$$\widehat{g}_0(t, \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i\beta) \int_{A_i} E_m(t, s) \, \mathrm{d}s,$$

其中 $A_i = [s_{i-1}, s_i)$, $s_0 = 0$, $s_n = 1$, $s_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$, $i = 1, \cdots, n-1$. 因此, $t_i \in A_i$, 这里 $\{t_i\}$ 是满足 (1.1) 的设计点列. 然后求解下述极小问题

$$\min_\beta \sum_{i=1}^n \big(y_i - x_i\beta - \widehat{g}_0(t_i, \beta)\big)^2.$$

记其解为 $\widehat{\beta}_n$. 若记 $\widetilde{x}_i = x_i - \sum\limits_{j=1}^n x_j \int_{A_j} E_m(t_i, s) \, \mathrm{d}s$, $\widetilde{y}_i = y_i - \sum\limits_{j=1}^n y_j \int_{A_j} E_m(t_i, s) \, \mathrm{d}s$, $i = 1, \cdots, n$. $\widetilde{S}_n^2 = \sum\limits_{i=1}^n \widetilde{x}_i^2$, 则易知

$$\widehat{\beta}_n = \widetilde{S}_n^{-2} \sum_{i=1}^n \widetilde{x}_i \widetilde{y}_i, \tag{1.3}$$

从而 $g(t)$ 的小波估计为

$$\widehat{g}_n(t)=\widehat{g}_0(t,\widehat{\beta})=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i\widehat{\beta}_n)\int_{A_i}E_m(t,s)\,\mathrm{d}s. \tag{1.4}$$

用 $\widetilde{E}$ 和 $\widetilde{\mathrm{Var}}$ 分别表示在给定 $x_1, x_2, \cdots$ 下的条件期望和条件方差．记 $u_{ni}=\widetilde{S}_n^{-2}\big(\widetilde{x}_i-\sum\limits_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\big)$，$h_{ni}=u_{ni}/\big(\sum\limits_{j=1}^{n}u_{nj}^2\big)^{1/2}$，$\widetilde{e}_i=e_i/\sigma$, 则

$$Q_n:=\big(\widehat{\beta}_n-\widetilde{E}\widehat{\beta}_n\big)/\big(\widetilde{\mathrm{Var}}\widehat{\beta}_n\big)^{1/2}=\sum_{i=1}^{n}h_{ni}\widetilde{e}_i, \tag{1.5}$$

$$T_n:=\big(\widehat{\beta}_n-\beta\big)/\big(\widetilde{\mathrm{Var}}\,\widehat{\beta}\big)^{1/2}. \tag{1.6}$$

为了模仿 Q_n 和 T_n 的分布，我们采用随机加权统计量

$$\beta_n^*=\sum_{i=1}^{n}u_{ni}\widehat{e}_i\xi_i, \tag{1.7}$$

其中 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为 i.i.d. 的随机变量,其共同分布为 $\Gamma(2,4)$,即密度函数为 $\frac{2^4}{\Gamma(4)}x^3e^{-2x}I(x>0)$，$\{\xi_i\}$ 与 $\{(x_i,y_i)\}$ 相互独立． $\widehat{e}_i$ 为残差 e_i 的估计，即

$$\widehat{e}_i=y_i-x_i\widehat{\beta}_n-\widehat{g}_n(t_i). \tag{1.8}$$

用 E^* 和 Var^* 分别表示在给定 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$ 下的条件期望和条件方差．记

$$R_n=\big(\beta_n^*-E^*\beta_n^*\big)/(\mathrm{Var}^*\beta_n^*)^{1/2}. \tag{1.9}$$

用 R_n 的分布去模拟 Q_n 和 T_n 的分布，在得出相应的统计量之分布函数的渐近展开的基础上，得到理想的逼近精度 $o\big(n^{-1/2}\big)$．我们首先列出如下条件

(i) $g(\cdot), f(\cdot)\in H^\alpha$, $\alpha>3/2$.

(ii) $\phi\in S_r$，$r\geq\alpha$，ϕ 满足 1 阶 Lipschitz 条件且具有紧支撑，当 $\xi\to 0$ 时，$\big|\widehat{\phi}(\xi)-1\big|=O(\xi)$, 其中 $\widehat{\phi}$ 为 ϕ 的 Fourier 变换.

(iii) 存在正的常数 d_1, d_2, 使得

$$d_1\cdot\frac{1}{n}\leq\min_{1\leq i\leq n}(t_i-t_{i-1})\leq\max_{1\leq i\leq n}(t_i-t_{i-1})\leq d_2\cdot\frac{1}{n};$$

(iv) $2^m=O\big(\sqrt{n\log n}\,b_n\big)$, 其中 $b_n>0$ 且以任意慢的速度趋于无穷大.

(v) e_1 的特征函数 $p(t)$ 一致满足 Cramer 条件，即对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $0<\eta<1$, 使 $\sup\limits_{|t|>\varepsilon}\big|p(t)\big|<1-\eta$.

注 1 由 [14] 可知，当 $\alpha>3/2$ 时，由条件 (i) 可以得到 $g(t)$ 和 $f(t)$ 皆在 [0,1] 上连续可微．因此，对 $t\in(0,1)$，$g(t)$ 和 $f(t)$ 均满足一阶 Lipschitz 条件.

注 2 条件 (iii) 已被有些文献采用，如 [15].

定理 1.1 设条件 (i)–(v) 成立，且 $E|e_1|^3<\infty$, $E|\eta_1|^3<\infty$, 则对几乎所有的样本序列 $x_1,x_2,\cdots$, 有

$$\sqrt{n}\sup_y\left|\widetilde{P}(Q_n\le y)-\Phi(y)+\frac{1}{6}\varphi(y)(y^2-1)\sum_{i=1}^n h_{ni}^3E\widehat{e}_i^3\right|\longrightarrow 0,\quad \text{a.s.,} \tag{1.10}$$

$$\sqrt{n}\sup_y\left|\widetilde{P}(T_n\le y)-\Phi(y)+\frac{1}{6}\varphi(y)(y^2-1)\sum_{i=1}^n h_{ni}^3E\widehat{e}_i^3\right|\longrightarrow 0,\quad \text{a.s.,} \tag{1.11}$$

其中 $\widetilde{P}$ 表示在给定 $x_1,x_2,\cdots$ 下的条件概率， $\Phi(y)$ 和 $\varphi(y)$ 分别为标准正态分布函数和概率密度函数.

定理 1.2 设条件 (i)–(iv) 成立，且 $Ee_1^6<\infty$, $E\eta_1^6<\infty$, 则对几乎所有的样本序列 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$, 有

$$\sqrt{n}\sup_y\left|P^*(R_n\le y)-\Phi(y)+\frac{1}{6}\varphi(y)(y^2-1)\frac{\sum\limits_{i=1}^n h_{ni}^3\widehat{e}_i^3}{\left(\sum h_{nj}^2\widehat{e}_j^2\right)^{3/2}}\right|\longrightarrow 0. \tag{1.12}$$

其中 P^* 表示在给定 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$ 下的条件概率.

定理 1.3 设条件 (i)–(v) 成立，且 $Ee_1^6<\infty$, $E\eta_1^6<\infty$, 则对几乎所有的样本序列 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots$, 有

$$\sqrt{n}\sup_y\left|\widetilde{P}(Q_n\le y)-P^*(R_n\le y)\right|\longrightarrow 0, \tag{1.13}$$

$$\sqrt{n}\sup_y\left|\widetilde{P}(T_n\le y)-P^*(R_n\le y)\right|\longrightarrow 0. \tag{1.14}$$

2 若干引理

下文用 c 表示正的常数，每次出现时可代表不同的值.

引理 2.1 设 $\{X_i\}$ 为独立同分布的随机变量序列， $E|X_1|^p<\infty$, $p>0$; 且当 $p>1$ 时 $EX_1=0$. 又设 $\{a_{ni};\ 1\le i\le n,\ n\ge 1\}$ 是下三角实矩阵，即当 $i\ge n$ 时， $a_{ni}=0$.

(I) 如果存在常数 $\nu>0$, $K>0$, 使

$$\sum_{i=1}^n|a_{ni}|^p\le Kn^{-\nu},\qquad \max_{1\le i\le n}|a_{ni}|\le Kn^{-1/p}, \tag{2.1}$$

则当 $0<p\le 2$ 时，有

$$\sum_{i=1}^n a_{ni}X_i\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.} \tag{2.2}$$

(Ⅱ) 如果存在常数 $K>0$, 使

$$\sum_{i=1}^n a_{ni}^2=o\big((\log n)^{-1}\big),\qquad \max_{1\le i\le n}|a_{ni}|\le Kn^{-1/p}, \tag{2.3}$$

则当 $p>2$ 时，(2.2) 式亦成立.

证　第 (I) 部分即为 [16] 中的结论，第 (Ⅱ) 部分仿照 [16] 中相应结果的证明即证. 这里省略.

引理 2.2[12,14]　设条件 (ii) 成立，则

(I)　$\left|E_0(t,s)\right| \le C_k/\big(1+|t-s|\big)^k$，$\left|E_m(t,s)\right| \le 2^m C_k/\big(1+2^m|t-s|\big)^k$, 这里 k 为正整数，C_k 为仅与 k 有关的正整数;

(Ⅱ)　$\sup\limits_{0\le t,\,s\le 1}\left|E_m(t,s)\right| = O\left(2^m\right)$;

(Ⅲ)　$\sup\limits_{0\le t\le 1}\int_0^1 \left|E_m(t,s)\right| \mathrm{d}s \le c$;

引理 2.3　设条件 (i)–(iv) 成立，则

(I)　当 $E|e_1|^{2+\delta}<\infty$ $(\delta>0)$ 时，有

$$\max_{1\le i\le n}\Big|\sum_{j=1}^n e_j \int_{A_j} E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big| \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.}$$

(Ⅱ)　当 $E|\eta_1|^{2+\delta}<\infty$ $(\delta>0)$ 时，有

$$\max_{1\le i\le n}\Big|\sum_{j=1}^n \eta_j \int_{A_j} E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big| \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.}$$

$$\max_{1\le i\le n}\Big|\sum_{j=1}^n \eta_j \int_{A_i} E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big| \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.}$$

证　仿照 [12] 中 (2.11) 式的证明即证，故省略.

引理 2.4[6]　设条件 (i)–(iv) 成立，且 $Ee_1^2<\infty$，$E\eta_1^2<\infty$，$\operatorname{Var}(\eta_1)=\gamma>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\widetilde{S}^2=\gamma, \qquad \text{a.s.}$$

引理 2.5　设条件 (ii) 和 (iii) 成立，则

(I)　$\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^n\int_{A_j}\left|E_m(t_i,s)\right|\mathrm{d}s\le c$;　(Ⅱ)　$\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^n\int_{A_i}\left|E_m(t_j,s)\right|\mathrm{d}s\le c$.

证　(I)　由引理 2.2 之 (Ⅲ) 可得

$$\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n\int_{A_j}\left|E_m(t_i,s)\right|\mathrm{d}s\le \sup_t\int_0^1\left|E_m(t,s)\right|\mathrm{d}s\le c.$$

(Ⅱ)　记 $\triangle t_i=t_i-t_{i-1}$，$i=1,\cdots,n$. 由引理 2.2 之 (I) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\int_{A_i}\left|E_m(t_j,s)\right|\mathrm{d}s\le&\sum_{j=1}^n\int_{A_i}2^m c\big(1+2^m|t_j-s|\big)^{-2}\,\mathrm{d}s\\ \le&\frac{c}{\min\limits_{1\le j\le n}\triangle t_j}\int_{A_i}\Big(\sum_{j=1}^n\frac{2^m}{\big(1+2^m|t_j-s|\big)^2}\triangle t_j\Big)\,\mathrm{d}s\\ \le& cn\int_{A_i}\Big(\int_0^1\frac{2^m}{(1+2^m|t_j-s|)^2}\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}s\le c.\end{aligned}$$

引理 2.6 设条件 (i)–(iv) 成立，那么

(a) 若 $E\eta_1^6<\infty$, 则

(I) $\max\limits_{1\le i\le n}|\widetilde{x}_i|=o\,(n^{1/6})$, a.s. (Ⅱ) $\max\limits_{1\le i\le n}|h_{ni}|=o\,(n^{-1/3})$, a.s.

(b) 若 $E\eta_1^3<\infty$, 则

(Ⅲ) $\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3=O\,(1)$, a.s. (IV) $\max\limits_{1\le i\le n}|h_{ni}|\to 0$, a.s.

证 (I) 由 (1.2) 式，得

$$\begin{aligned}\max_{1\le i\le n}|\widetilde{x}_i|\le&\max_{1\le i\le n}\Big|f(t_i)-\sum_{j=1}^{n}f(t_j)\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big|\\&+\max_{1\le i\le n}|\eta_i|+\max_{1\le i\le n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big|.\end{aligned}\tag{2.4}$$

[12, 引理 2.5] 已证得

$$\sup_t\Big|f(t)-\sum_{j=1}^{n}f(t_j)\int_{A_j}E_m(t,s)\,\mathrm{d}s\Big|=O\left((n\log n)^{-1/2}b_n^{-1}\right).\tag{2.5}$$

由于 $E\eta_1^6<\infty$, 所以由 [17, 引理 2.2] 知

$$\max_{1\le i\le n}|\eta_i|/n^{1/6}\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{2.6}$$

故由 (2.4)–(2.6) 式和引理 2.3 之 (Ⅱ) 即证得 (I).

(Ⅱ) 由引理 2.4 和 C_r 不等式可得

$$\Big(\widetilde{S}_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{x}_j|\Big)^2\le n\widetilde{S}_n^{-4}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j^2\le n\widetilde{S}_n^{-1}=O\,(1),\qquad \text{a.s.}\tag{2.7}$$

再由 (2.5) 式，引理 2.5 的 (I) 和引理 2.3 的 (Ⅱ) 可得

$$\begin{aligned}&\max_{1\le j\le n}\Big|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_i\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big|\\\le&\max_{1\le j\le n}\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big[f(t_i)-\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\int_{A_k}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big]\Big|\\&+\max_{1\le j\le n}\Big|\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\eta_k\int_{A_k}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big|\\&+\max_{1\le j\le n}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big|\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\end{aligned}\tag{2.8}$$

由 (2.7) 和 (2.8) 式，当 n 充分大时有

$$\widetilde{S}_n^2\sum_{i=1}^{n}u_{ni}^2=\widetilde{S}_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\Big(\widetilde{x}_i^2-2\widetilde{x}_i\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s+\Big(\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big)$$

$$\geq 1-2\Big(\widetilde{S}_n^{-2}\sum_{j=1}^{n}|\widetilde{x}_j|\Big)\Big(\max_{1\leq j\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_i\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big|\Big)\geq\frac{1}{2},\quad \text{a.s.} \tag{2.9}$$

因此，由引理 2.4, 引理 2.5 的 (Ⅱ) 和本引理的 (Ⅰ) 可得，当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned}\max_{1\leq i\leq n}|h_{ni}| &\leq\sqrt{2}\,\widetilde{S}_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}\Big|\widetilde{x}_i-\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big|\\ &\leq\sqrt{2}\,\widetilde{S}_n^{-1}\max_{1\leq i\leq n}|\widetilde{x}_i|\Big(1+\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big)\leq cn^{-1/3},\qquad \text{a.s.}\end{aligned}$$

(Ⅲ) 由 (2.5), 引理 2.3 的 (Ⅱ) 和强大数定律可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{x}_i|^3 \leq& 9\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big|f(t_i)-\sum_{j=1}^{n}f(t_j)\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big|^3\Big)+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^3\\ &+\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\eta_j\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big|^3=O\,(1),\qquad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{2.10}$$

利用 (2.5) 式，引理 2.5 的 (Ⅱ) 和引理 2.3 的 (Ⅱ), 仿照 (2.8) 式的证明可证得

$$\max_{1\leq i\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big|\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.} \tag{2.11}$$

因此，由 (2.9)–(2.11) 式及引理 2.4, 当 n 充分大时，有

$$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3\leq 16\sqrt{n}\,\widetilde{S}_n^{-3}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\widetilde{x}_i|^3+\max_{1\leq i\leq n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big|^3\Big)=O\,(1),\qquad \text{a.s.}$$

(Ⅳ) 类似于本引理之 (Ⅱ) 的证明方法即证，从略.

引理 2.7 设条件 (i)–(iv) 成立，且 $Ee_1^4<\infty$, $E\eta_1^4<\infty$, 则对任何 $0<M_n\to\infty$,

$$\widehat{\beta}_n-\beta=o\left((\log n/n)^{1/2}M_n\right),\qquad \text{a.s.} \tag{2.12}$$

证 容易得到

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_n^2\big(\widehat{\beta}_n-\beta\big)=&\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_i\Big(g(t_i)-\sum_{j=1}^{n}g(t_j)\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big)\\ &+\sum_{i=1}^{n}\Big(\widetilde{x}_i-\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big)e_i=:I_{n1}+I_{n2}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

类似于 [12, 引理 5] 的 (2.25) 式的证明方法可以证得

$$\sup_t\Big|g(t)-\sum_{j=1}^{n}g(t_j)\int_{A_j}E_m(t,s)\,\mathrm{d}s\Big|=O\left((n\log n)^{-1/2}b_n^{-1}\right). \tag{2.14}$$

记 $g_{ni}=g(t_i)-\sum\limits_{j=1}^n g(t_j)\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s,\ i=1,\cdots,n$, 则有

$$\begin{aligned}|I_{n1}|\le&\Big|\sum_{i=1}^n g_{ni}\Big(f(t_i)-\sum_{k=1}^n f(t_k)\int_{A_k}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big|\\&+\Big|\sum_{i=1}^n g_{ni}\eta_i\Big|+\Big|\sum_{k=1}^n\Big(\sum_{i=1}^n g_{ni}\int_{A_k}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big)\eta_k\Big|\\=:&\ I_{n1}^{(1)}+I_{n1}^{(2)}+I_{n1}^{(3)}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

由 (2.5) 和 (2.14) 式可得

$$I_{n1}^{(1)}\longrightarrow 0.\tag{2.16}$$

对于 $I_{n1}^{(2)}$, 由 (2.14) 式易知, $\max\limits_{1\le i\le n}|g_{ni}|\le c(n\log n)^{-1/2}b_n^{-1}$, $\sum\limits_{i=1}^n g_{ni}^2=o\big((\log n)^{-1}\big)$. 注意到 $E|\eta_1|^3<\infty$, 因此，在引理 2.1 的 (Ⅱ) 中取 $p=3$, 得

$$I_{n1}^{(2)}\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{2.17}$$

记 $a_{nk}=\sum\limits_{i=1}^n g_{ni}\int_{A_k}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s$. 由 (2.14) 式和引理 2.5 的 (Ⅱ), 容易验证

$$\max_{1\le k\le n}|a_{nk}|\le c(n\log n)^{-1/2}b_n^{-1},\qquad \sum_{k=1}^n a_{nk}^2=o\left((\log n)^{-1}\right).$$

故由引理 2.1 的 (Ⅱ) 可得

$$I_{n1}^{(3)}\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{2.18}$$

将 (2.16)–(2.18) 式代入到 (2.15) 式可得

$$I_{n1}\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{2.19}$$

对于 I_{n2}. 记 $b_{ni}=(n\log n)^{-1/2}M_n^{-1}\Big(\widetilde{x}_i-\sum\limits_{j=1}^n\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big)$, $1\le i\le n$. 在本引理条件下，仿照引理 2.6 的 (I) 可以证得 $\max\limits_{1\le i\le n}|\widetilde{x}_i|=o(n^{1/4})$, a.s. 由此，再利用 (2.11) 式不难推得 $\max\limits_{1\le i\le n}|b_{ni}|\le Cn^{-1/4}(\log n)^{-1/2}$, 且

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n b_{ni}^2\le&2(n\log n)^{-1}M_n^{-2}\Big[\sum_{i=1}^n\widetilde{x}_i^2+\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n\widetilde{x}_j\int_{A_i}E_m(t_j,s)\,\mathrm{d}s\Big)^2\Big]\\=&o\left((\log n)^{-1}\right),\qquad \text{a.s.}\end{aligned}$$

于是，由引理 2.1 之 (Ⅱ) (取 $p=4$) 以及 Fubni 定理可以推得

$$(n\log n)^{-1/2}M_n^{-1}I_{n2}\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{2.20}$$

最后，利用引理 2.4, 结合 (2.13), (2.19) 和 (2.20) 式即证得 (2.12) 式.

引理 2.8 在定理 1.2 的条件下，当 $n\to\infty$ 时有

$$\sum_{i=1}^{n} h_{ni}^2 \widehat{e}_i^2 \longrightarrow \sigma^2, \qquad \text{a.s.} \tag{2.21}$$

$$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}^3 \big(\widehat{e}_i^3 - Ee_i^3\big) \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.} \tag{2.22}$$

证 仅给出 (2.22) 式的证明，类似的可证明 (2.21) 式．记

$$m_{ni} = \sum_{j=1}^{n} e_j \int_{A_j} E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s, \qquad q_{ni} = \widetilde{x}_i(\widehat{\beta}_n - \beta),$$

$$g_{ni} = g(t_i) - \sum_{j=1}^{n} g(t_j) \int_{A_j} E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s,$$

则由 (1.8) 式中 $\widehat{e}_i$ 的定义，得

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}^3\big(\widehat{e}_i^3 - Ee_i^3\big) = \sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}^3\big[(e_i + g_{ni} - m_{ni} - q_{ni})^3 - Ee_i^3\big] \\
&=\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}^3\big(e_i^3 - Ee_i^3\big) + U_n.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
|U_n| =&\Big|\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}^3\big[3e_i^2(g_{ni} - m_{ni} - q_{ni}) + 3e_i(g_{ni} - m_{ni} - q_{ni})^2 + (g_{ni} - m_{ni} - q_{ni})^3\big]\Big| \\
\le& 3\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} |h_{ni}|^3 e_i^2\big(|g_{ni}| + |m_{ni}| + |q_{ni}|\big) \\
&+ 9\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} |h_{ni}|^3 |e_i|\big(g_{ni}^2 + m_{ni}^2 + q_{ni}^2\big) \\
&+ 9\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} |h_{ni}|^3\big(|g_{ni}|^3 + |m_{ni}|^3 + |q_{ni}|^3\big).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

下面证明

$$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} h_{ni}^3\big(e_i^3 - Ee_i^3\big) \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.} \tag{2.25}$$

由引理 2.6 的 (Ⅱ), 得

$$\sum_{i=1}^{n}\big(\sqrt{n}h_{ni}^3\big)^2 \le n \max_{1\le i\le n} h_{ni}^4 \le cn^{-1/3}, \qquad \text{a.s.;}$$

$$\max_{1\le i\le n}\big|\sqrt{n}h_{ni}^3\big| \le \sqrt{n}\Big(\max_{1\le i\le n}|h_{ni}|\Big)^3 \le cn^{-1/2}.$$

故在引理 2.1 的 (I) 中取 $p=2,\ \nu=1/3$, 对 a.e. $\triangle=(x_1,x_2,\cdots)$ 有

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}h_{ni}^3\big(e_i^3-Ee_i^3\big)=0\,\big|\,\triangle\Big)=1.$$

因此，由 Fubni 定理即证得 (2.25) 式.

同理可证得

$$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3\big(e_i^2-Ee_i^2\big)\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.},\tag{2.26}$$

$$\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3\big(|e_i|-E|e_i|\big)\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{2.27}$$

由引理 2.6 的 (I) 和引理 2.7, 得

$$\max_{1\le i\le n}|q_{ni}|=\max_{1\le i\le n}|\widetilde{x}_i|\,|\widehat{\beta}-\beta|\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{2.28}$$

利用引理 2.3 的 (I) 和引理 2.6 的 (Ⅲ), 再结合 (2.23)–(2.28) 和 (2.14) 式即证得 (2.22) 式.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 先证 (1.10). 由 [18] 中关于独立和的分布的渐近展开定理 1 得

$$\begin{aligned}&\Big|\widetilde{P}(Q_n\le y)-\Phi(y)+\frac{1}{6}\varphi(y)(y^2-1)\sum_{i=1}^{n}h_{ni}^3E\widetilde{e}_i^3\Big|\\ \le& c\Big\{(1+|y|)^{-3}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{E}\big|V_{ni}(y)\big|^3+\big(1+|y|\big)^{-4}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{E}\big|Z_{ni}(y)\big|^4\Big\}\\ &+c\Big\{(1+|y|)^{-4}n^6\Big(\sup_{|t|\ge\delta_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|p(th_{ni})|+\frac{1}{2n}\Big)^n\Big\}\\ =:& J_{n1}+J_{n2}+J_{n3}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

上式中 $p(t)$ 是 $\widetilde{e}_1$ 的特征函数.

$$V_{ni}(y)=h_{ni}\widetilde{e}_iI\big(|h_{ni}\widetilde{e}_i|>(1+|y|)\big);\qquad Z_{ni}(y)=h_{ni}\widetilde{e}_iI\big(|h_{ni}\widetilde{e}_i|\le(1+|y|)\big);$$
$$\delta_n=\frac{1}{12}\Big(\sum_{i=1}^{n}E|Y_{ni}|^3\Big)^{-1};\qquad Y_{ni}=h_{ni}\widetilde{e}_iI(|h_{ni}e_i|\le 1).$$

下面估计 (3.1) 式右端各项. 由引理 2.6 的 (Ⅲ) 和 (Ⅳ), 得

$$\sqrt{n}\,J_{n1}\le C\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3E\Big\{\big|\widetilde{e}_1\big|^3I\Big(\big|\widetilde{e}_1\big|>\frac{1+|y|}{\max\limits_{1\le i\le n}|h_{ni}|}\Big)\Big\}\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\tag{3.2}$$

用 $G(x)$ 表示 $\widetilde{e}_1$ 的分布函数，记 $T(z)=\int_{|y|\geq z}|y|^3\,\mathrm{d}G(y)$, 则由定理 2.6 可得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}J_{n2}\leq&\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|h_{ni}|^4}{1+|y|}E\Big\{|\widetilde{e}_1|^4I\Big(|\widetilde{e}_1|\leq\frac{1+|y|}{|h_{ni}|}\Big)\Big\}\\=&\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|h_{ni}|^4}{1+|y|}\Big[-\frac{1+|y|}{|h_{ni}|}T\Big(\frac{1+|y|}{|h_{ni}|}\Big)+\int_0^{\frac{1+|y|}{|h_{ni}|}}T(z)\,\mathrm{d}z\Big]\\\leq&\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3\Big[T\Big(\frac{1+|y|}{\max\limits_{1\leq i\leq n}|h_{ni}|}\Big)+\int_0^1T\Big(\frac{1+|y|}{\max\limits_{1\leq i\leq n}|h_{ni}|}z\Big)\,\mathrm{d}z\Big]\\\longrightarrow&0,\qquad\text{a.s.}\end{aligned}\tag{3.3}$$

现估计 J_{n3}. 由引理 2.6 的 (Ⅲ) 知存在 $M>0$, 使 $\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3\leq M$. 记 $M_1=(12ME|\widetilde{e}_1|^3)^{-1}$, 则有

$$\delta_n\geq\Big(12E|\widetilde{e}_1|^3\sum_{i=1}^{n}|h_{ni}|^3\Big)^{-1}\geq M_1\sqrt{n}.\tag{3.4}$$

适当选取 $\varepsilon_1>0$, 使得 $\varepsilon=M_1^{-1}\varepsilon_1\in(0,1)$. 记 $N_n=\#\{j,\sqrt{n}\,|h_{nj}|\geq\varepsilon\}$. 其中记号 $\#(A)$ 表示 A 中元素个数. 由引理 2.6 的 (Ⅱ), 知存在 $K>0$, 使 $n^{1/3}\max\limits_{1\leq i\leq n}|h_{ni}|\leq\sqrt{K}$, a.s. 于是，由 $\sum\limits_{j=1}^{n}h_{nj}^2=1$, 得 $n=\sum\limits_{j=1}^{n}\big(\sqrt{n}|h_{nj}|\big)^2\leq N_nKn^{1/3}+(n-N_n)\varepsilon$. 因此

$$N_n\geq\frac{(1-\varepsilon)n}{Kn^{1/3}-\varepsilon}\geq K^{-1}(1-\varepsilon)n^{2/3}.\tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 式，再利用条件 (iv) 及不等式 $1+x\leq e^x$, 得

$$\begin{aligned}\sqrt{n}J_{n3}\leq&n^7\Big(\sup_{|t|\geq\delta_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|p(h_{ni}t)|+\frac{1}{2n}\Big)^n\\\leq&n^7\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{|t|\geq M_1\sqrt{n}|h_{ni}|}|p(t)|+\frac{1}{2n}\Big)^n\\\leq&n^7\Big(\frac{1}{n}\sum_{\{j:M_1\sqrt{n}|h_{ni}|\geq\varepsilon_1\}}\sup_{|t|\geq\varepsilon_1}|p(t)|+\frac{\#\{M_1\sqrt{n}|h_{ni}|<\varepsilon_1\}}{n}+\frac{1}{2n}\Big)^n\\\leq&n^7\Big(\frac{N_n}{n}(1-\eta)+\Big(1-\frac{N_n}{n}\Big)+\frac{1}{2n}\Big)^n\\\leq&n^7\Big(1-K^{-1}\eta(1-\varepsilon)n^{-1/3}+\frac{1}{2n}\Big)^n\leq\sqrt{e}n^7e^{-cn^{2/3}}\longrightarrow0.\end{aligned}\tag{3.6}$$

将 (3.2), (3.3) 和 (3.6) 式代入到 (3.1) 式即证得定理 1.1.

现在证明 (1.11) 式. 记

$$B_n^2=\widetilde{\mathrm{Var}}\,(\widehat{\beta}_n)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}u_{ni}^2,\qquad r_n=B_n^{-1}\widetilde{S}_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{x}_i\Big(g(t_i)-\sum_{j=1}^{n}g(t_j)\int_{A_j}E_m(t_i,s)\,\mathrm{d}s\Big).$$

由于 $\widetilde{P}\,(T_n \le y) = \widetilde{P}\,(Q_n \le y - r_n)$. 因此，由 (1.10) 式得

$$\sqrt{n}\sup_y \Big|\widetilde{P}(T_n \le y) - \Phi(y - r_n) + \frac{1}{6}\varphi(y - r_n)\big((y - r_n)^2 - 1\big)\sum_{i=1}^n h_{ni}^3 E\widetilde{e}_i^3\Big| \longrightarrow 0. \tag{3.7}$$

由引理 2.4, (2.9) 和 (2.19) 式，得 $r_n = o\big(n^{-1/2}\big)$, a.s. 再利用微分中值定理不难证得

$$\sup_y \big|\Phi(y - r_n) - \Phi(y)\big| \le \sup_y |y|\,\varphi(y)\,|r_n| = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \text{a.s.}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&\sup_y \big|\varphi(y - r_n)\big((y - r_n)^2 - 1\big) - \varphi(y)(y^2 - 1)\big|\\ \le&\sup_y |3y - y^3|\,\varphi(y)\,|r_n| = o\left(n^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{3.9}$$

因此，由 (3.7)–(3.9) 式即证得 (1.11) 式.

定理 1.2 的证明　由 [6] 中定理 1 关于 $k = 3$ 的结果，得

$$\begin{aligned}&\Big|P^*(R_n \le y) - \Phi(y) + \frac{1}{6}\varphi(y)(y^2 - 1)\sum_{i=1}^n h_{ni}^3 \widehat{e}_i^3 / D_n^3\Big|\\ \le& c\Big\{(1 + |y|)^{-3}\sum_{i=1}^n E^*\big|\widetilde{V}_{ni}(y)\big|^3 + \big(1 + |y|\big)^{-4}\sum_{i=1}^n E^*\big|\widetilde{Z}_{ni}\big|^4\\ &+ (1 + |y|)^{-4} n^6\Big(\sup_{|t| \ge \widetilde{\delta}_n}\sum_{i=1}^n \big|\widetilde{p}(t h_{ni}\widehat{e}_i)\big| + \frac{1}{2n}\Big)^n\Big\}\\ =:& L_{n1} + L_{n2} + L_{n3},\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $\widetilde{p}(t)$ 为 ξ_1 的特征函数，而

$$\begin{aligned}&D_n^2 = \sum_{i=1}^n h_{ni}^2 \widehat{e}_i^2; \qquad \widetilde{\delta}_n = \frac{1}{12} D_n^2\Big(\sum_{i=1}^n E^*|\widetilde{Y}_{ni}|^3\Big)^{-1};\\ &\widetilde{Y}_{ni} = h_{ni}\widehat{e}_i(\xi_i - 2) I\big(\big|h_{ni}\widehat{e}_i(\xi_i - 2)\big| \le D_n\big);\\ &\widetilde{V}_{ni}(y) = h_{ni}\widehat{e}_i(\xi_i - 2) I\left(\big|h_{nj}\widehat{e}_i(\xi_i - 2)\big| > D_n(1 + |y|)\right);\\ &\widetilde{Z}_{ni}(y) = h_{ni}\widehat{e}_i(\xi_i - 2) I\big(\big|h_{nj}\widehat{e}_i(\xi_i - 2)\big| \le D_n(1 + |y|)\big).\end{aligned}$$

现在估计 (3.10) 式右端的三项. 仿照引理 2.8 的 (2.13) 的证法不难得到

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum_{i=1}^n |h_{ni}^3 \widehat{e}_i^3| \le C, \qquad \text{a.s.} \tag{3.11}$$

由 $\widehat{e}_i$ 的定义，得

$$\begin{aligned}|h_{ni}\widehat{e}_i| \le& |h_{ni} e_i| + |h_{ni}|\,\Big|\sum_{j=1}^n e_j \int_{A_j} E_m(t_i, s)\,\mathrm{d}s\Big| + |h_{ni}|\,|\widetilde{x}_i|\,|\widehat{\beta}_n - \beta|\\ &+ |h_{ni}|\,\Big|g(t_i) - \sum_{j=1}^n g(t_j)\int_{A_j} E_m(t_i, s)\,\mathrm{d}s\Big|.\end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $Ee_1^6<\infty$, 利用 [17, 引理 2.2] 可得： $n^{-1/6}\max\limits_{1\le i\le n}|e_i|\to 0$, a.s. 由此，再利用 (3.12), 引理 2.3 的 (I), (Ⅱ), 引理 2.6 的 (I), (Ⅱ) 和引理 2.7 以及 (2.14) 式可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le n}|h_{ni}\widehat{e}_i|=0,\qquad \text{a.s.} \tag{3.13}$$

利用 (3.11) 和 (3.13) 式，可以得到

$$\begin{aligned}\sqrt{n}L_{n1}\le& c\sqrt{n}D_n^{-1}\sum_{i=1}^n|h_{ni}\widehat{e}_i|^4E|\xi_i-2|^4\\ \le& cE\,|\xi_1-2|^4D_n^{-1}\Big(\sqrt{n}\sum_{i=1}^n|h_{ni}\widehat{e}_i|^3\Big)\Big(\max_{1\le i\le n}|h_{ni}\widehat{e}_i|\Big)\to 0,\qquad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\sqrt{n}L_{n2}\le c\sqrt{n}\sum_{i=1}^n|h_{ni}\widehat{e}_i|^4E|\xi_i-2|^4\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.} \tag{3.15}$$

下面考虑 L_{n3}. 由 $\widetilde{\delta}_n$ 之表达式，利用 (3.11) 式和引理 2.8, 得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\widetilde{\delta}_n}{\sqrt{n}}\ge\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n h_{nj}^2\widehat{e}_j^2\Big(12\sqrt{n}\sum_{i=1}^n|h_{ni}\widehat{e}_i|^3E|\xi_i-2|^3\Big)^{-1}\ge d>0,\qquad \text{a.s.} \tag{3.16}$$

所以， $\widetilde{\delta}_n\to\infty$. 利用不等式 $(1+x)^{-2}\le 1-x+x^2$ 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{|t|\ge\widetilde{\delta}_n}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\big|\widetilde{p}(th_{ni}\widehat{e}_i)\big|\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sup_{|u|\ge\widetilde{\delta}_n|h_{ni}\widehat{e}_i|}\frac{1}{\left(1+u^2/4\right)^2}\\ \le&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(1+\frac14\widetilde{\delta}_n^2h_{ni}^2\widehat{e}_i^2\right)^2}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{\left(1+\widetilde{\delta}_nh_{ni}^2\widehat{e}_i^2\right)^2}\\ \le&1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_{ni}^2\widehat{e}_i^2\widetilde{\delta}_n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h_{ni}^4\widehat{e}_i^4\widetilde{\delta}_n^2\\ \le&1-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\widetilde{\delta}_n}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^n h_{ni}^2\widehat{e}_i^2-\widetilde{\delta}_n\sum_{i=1}^n h_{ni}^4\widehat{e}_i^4\right)=:1-\frac{1}{\sqrt{n}}\lambda_n.\end{aligned} \tag{3.17}$$

由 (3.13) 式和引理 2.8, 得

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}_n\sum_{i=1}^n h_{ni}^4\widehat{e}_i^4=&\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^n h_{ni}^2\widehat{e}_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n h_{ni}^4\widehat{e}_i^4\right)}{12\sum\limits_{i=1}^n|h_{ni}\widehat{e}_i|^3E|\xi_i-2|^3I\big(|h_{ni}\widehat{e}(\xi_i-2)|\le D_n\big)}\\ \le&\frac{\max\limits_{1\le i\le n}|h_{ni}\widehat{e}_i|\big(\sum\limits_{i=1}^n h_{ni}^2\widehat{e}_i^2\big)}{12E|\xi_1-2|^3I\left(|\xi_1-2|\le D_n/\max\limits_{1\le i\le n}|h_{ni}\widehat{e}_i|\right)}\longrightarrow 0,\qquad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{3.18}$$

因此，由引理 2.8, (3.16) 和 (3.18) 式，得

$$\liminf_{n\to\infty}\lambda_n\ge d\sigma^2=:q>0. \tag{3.19}$$

故当 n 充分大时，由 (3.17) 式及不等式 $1+x \le e^x$, 我们有

$$\begin{aligned}\sqrt{n}L_{n3} \le & n^7\Big(1-\frac{\lambda_n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)^n \le n^7\Big(1-\frac{q}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{2n}\Big)^n \\ \le & n^7 e^{-(q\sqrt{n}-1)/2} \longrightarrow 0, \qquad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{3.20}$$

故由 (3.10), (3.14), (3.15) 和 (3.20) 式即证得定理 1.2.

定理 1.3 的证明 先证 (1.13) 式. 由定理 1.1 和定理 1.2, 只需证明

$$\sup_y \Big|\varphi(y)(y^2-1)\Big(\frac{\sum h_{ni}^3 \widehat{e}_i^3}{\big(\sum h_{ni}^2 \widehat{e}_i^2\big)^{3/2}}-\frac{\sum h_{ni}^3 e_i^3}{\sigma^3}\Big)\Big| = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \qquad \text{a.s.} \tag{3.21}$$

注意到 $\sup\limits_y\big|\varphi(y)(y^2-1)\big| < \infty$, 由引理 2.8 可直接推出 (3.21) 式.

对于 (1.14) 式，利用定理 1.1 的 (1.11) 式，定理 1.2 和引理 2.8 立即可证.

致谢 审稿人提出了一些有益的修改意见，本文作者深表谢意.

参 考 文 献

1 Chen H. Convergence Rates for Parametric Components in a Partly Linear Model. *Ann. Ststist.*, 1988, 16: 134–146

2 Speckman P. Kernel Smoothing in Partial Linear Models. *J. Roy. Statist. Soc.* (Ser B), 1988, 50: 413–436

3 洪圣岩. 一类半参数回归模型的估计理论. 中国科学(A 辑), 1991, 21(12): 1258–1272
(Hong Shengyan. The Estimate Theory of a Semiparametric Regression Model. *Science in China* (Series A), 1991, 21(12): 1258–1272)

4 洪圣岩. 半参数回归模型的参数估计的 Bootstrap 逼近. 中国科学(A 辑), 1993, 23(3): 239–251
(Hong Shengyan. Bootstrap Approximation of Parametric Estimate for Semiparametric Regression Model. *Science in China* (Series A), 1993, 23(3): 239–251)

5 郑忠国. 随机加权法. 应用数学学报, 1987, 10(2): 247–253
(Zheng Zhongguo. Random Weighting Method. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1987, 10(2): 247–253)

6 Efrom B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *Ann. Statist.*, 1979, 7: 1–26

7 涂冬生, 郑忠国. 随机加权法的渐近展开. 应用概率统计, 1987, 3(4): 340–347
(Tu Dongsheng, Zheng Zhongguo. The Edgeworth Expansion for the Random Weighting Method. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 1987, 3(4): 340–347)

8 郑忠国, 涂冬生. 线性模型中的随机加权逼近. 中国科学 (A 辑), 1988, 18(6): 561–575
(Zheng zhongguo, Tu Dongsheng. Random Weighting Asymptotic in Linear Models. *Science in China* (Series A), 1988, 18(6): 561–575)

9 Hall P, Patial P. Formulae for Mean Integrated Squared Error of Nonlinear Wavelet-based Density Estimators. *Ann. Statist.*, 1995, 23: 905–928

10 Donob D L, Johnston I M. Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 1995, 90: 1200–1224

11 张双林, 郑忠国. 随机设计变量情形回归函数的非线性小波估计. 中国科学 (A 辑), 1999, 29(4): 311–319
(Zhang shuanglin, Zheng Zhongguo. Nonlinear Wavelet Estimate of Regression Function Under Random Design Variable. *Science in China* (Series A), 1999, 29(4): 311–319)

12 钱伟民, 柴根象. 半参数回归模型小波估计的强逼近. 中国科学(A 辑), 1999, 29(3): 233–240

(Qian Weimin, Chai Genxiang. Strong Approximation of Wavelet Estimate in Semiparametric Regression Model. *Science in China* (Series A), 1999, 29(3): 233–240)
13 柴根象，徐克军. 半参数回归模型的线性小波光滑. 应用概率统计, 1999, 15(1): 97–105
(Chai Genxiang, Xu Kejun. Wavelet Smoothing in Semiparametric Regression Model. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 1999, 15(1): 97–105)
14 Walter G G. Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications. Florida: CRC Press, 1994
15 史坚. 部分线形模型中的 Edgeworth 展开. 数学学报, 1998, 41(4): 683–686
(Shi Jian. Edgeworth Expansion in Partially Linear Model. *Acta Mathematica Sinica*, 1998, 41(4): 683–686)
16 Zhao L C. Rates of a.s. Convergence of the Estimation of Error Variance in Linear Models. *China Ann. Math.* (Series B), 1983, 4(1): 95–103
17 白志东，赵林城. 非参数回归函数最近邻估计的强相合性. 中国科学 (A 辑), 1984, (5): 387–393
(Bai Zhidong, Zhao Lincheng. Strong Consistent of the Nearest Neighbor Estimate of Nonparametric Regression Function. *Science in China* (Series A), 1984, (5): 387–393)
18 白志东，赵林城. 独立随机变量之和的分布函数的渐近展开. 中国科学 (A 辑), 1985, 15(8): 677–679
(Bai Zhidong, Zhao Lincheng. Edgeworth Expansion of the Distribution Function of Sum of Independent Random Variable. *Science in China* (Series A), 1985, 15(8): 677–679)

RATES OF RANDOM WEIGHTING APPROXIMATION OF WAVELET ESTIMATES IN SEMIPARAMETRIC REGRESSION MODEL

XUE Liugen

(*College of Applied Mathematics Sciences, Beijing University of Technology, Beijing* 100022)

Abstract Combining the wavelet smoothing method and random weighting method, we obtain that the rates of random weighting approximation of wavelet estimates for parametric components in the semiparametric regression model can attain the accuracy of $o\,(n^{-1/2})$ under suitable conditions.

Key words Semiparametric regression model, wavelet estimates, random weighting method