第 25 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 25 No. 4
2002 年 10 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Oct., 2002

NA 列加权乘积和的完全收敛性 *

成凤旸　王岳宝　严继高　蔡新中

(苏州大学数学科学学院，苏州 215006)

摘　要　本文讨论了 NA 列的几类加权部分和及加权乘积和的完全收敛性，其中部分结果要优于 iid 列的已知结论.

关键词　NA 列，加权乘积和，完全收敛

1　引言

Joag-Dev 和 Proschan[1] 提出了 NA 的概念.

定义 1.1　称 r.v. $X_1,\cdots,X_k$，$k\geq 2$ 为 NA (Negatively Associated) 的，如果对 $\{1,\cdots,k\}$ 的任一划分 A_1,A_2 都有

$$\mathrm{Cov}\left(f(X_i:i\in A_1),\ g(X_j:j\in A_2)\right)\leq 0,$$

其中 f 和 g 均为对各变元非降且使上式有意义的函数．称 r.v. 列 $\{X_i:i\geq 1\}$ 是 NA 列，如果 $\{X_i:i\geq 1\}$ 的任意一个二元以上的有限子集都是 NA 的.

由于 NA 列在可靠性理论和多元统计分析理论等领域中有广泛应用，并且包含独立列作为它的特例，因而引起了人们广泛的注意．近年来 NA 列极限理论的发展十分迅速，有关独立 r.v. 列的许多结论已被众多学者成功地推广到 NA 列.

本文的起初动机是研究 NA 列加权部分和

$$n^{1/p}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}X_i=\sum_{i=1}^{n}b_{ni}X_i\to 0,\qquad n\to\infty\qquad \text{a.s.}\tag{1.1}$$

的条件．对 iid 列， Chow[2], Chow 和 Lai[3] 及 Thrum[4] 分别得到了 $p=1/2$，$1\leq p<2$ 及 $p\geq 2$ 情形下 a.s. 收敛的结论，其中 Thrum[4] 还介绍了 (1.1) 在数理统计等领域的应用． Cuzick[5], Bai 等 [6] 又分别对 $1\leq p<2$ 作了进一步的研究．我们发现更早的 [7, 定理 1(i)(ii)] (参见 [8, 定理 4.1.4]) 能够推出此后 [3,4] 等文献中的相应结论，而这一事实似乎并没有得到人们的充分注意．因此，将该定理推广到 NA 列是颇有意义的，由此可以得到一些比上述强大数律更强的结果 — 完全收敛性.

完全收敛性的概念和理论最初是由 Hsu 和 Robbins[9] 提出来的：

本文 2000 年 12 月 12 日收到．2001 年 9 月 17 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10271087 号) 和江苏省教育厅自然科学基金 (02KJB110002) 资助项目.

定义 1.2 设 $\{T, T_n : n \geq 1\}$ 为 r.v. 列，若对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\big(|T_n - T| > \varepsilon\big) < \infty, \tag{1.2}$$

则称 $\{T_n : n \geq 1\}$ 完全收敛于 T , 记作 $T_n \xrightarrow{c} T,\ n \to \infty$.

显然， $T_n \xrightarrow{c} T,\ n \to \infty$ 可以推出 $T_n \xrightarrow{\text{a.s.}} T,\ n \to \infty$, 但反之不然.

另一方面, 设 $m \geq 2$, $\{X_{ni} : i \geq 1,\ n \geq 1\}$ 为 r.v. 阵列, 乘积和 $b_n^{-m} \sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \prod\limits_{j=1}^{m} X_{ni_j}$ 既是部分和的一般化，又是 U 统计量的特殊情形，近年来成为人们关注的热点之一. 在 $\{X_i : i \geq 1\}$ 为 iid 列且 $X_{ni} = X_i : i \geq 1,\ n \geq 1$ 的特殊情形下， Gadidov[10], 苏淳等 [11], Wang 等 [12] 等得到了乘积和强大数律的若干充要条件和完全收敛的若干等价条件，然而，形式更为一般，应用更为广泛的加权乘积和的情形，即使是独立列，研究结果也不多见.

设 $\{X_i : i \geq 1\}$ 为 NA 列，$\{a_{ni} : i \geq 1,\ n \geq 1\}$ 为实数阵列, 称 $\sum\limits_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m} \prod\limits_{j=1}^{m} a_{ni_j} X_{i_j}$ 为加权乘积和, 本文旨在研究同分布 NA 列加权乘积和的完全收敛性及其应用. 显然, 它可以视 NA 列 (含独立列) 加权部分和的强大数律为自己的特况.

2　主要结果

首先，我们把十分重要的关于 iid 列加权部分和的 [7, 定理 1] 推广到同分布 NA 列加权乘积和的场合.

定理 2.1 设 m 为任意正整数， $\{X_i : i \geq 1\}$ 为同分布 NA 列， $\{b_{ni} : i \geq 1,\ n \geq 1\}$ 为实数阵列,

$$\exists \text{ 常数 } s > 0,\ t > -1 - s,\ K > 0,\ \text{使得 } |b_{ni}| \leq K n^{-s}, \qquad i \geq 1,\quad n \geq 1, \tag{2.1}$$

假设下列两组条件之一成立:

$$E|X_1|^{(1+s+t)/s} < \infty, \tag{2.2}$$

$$\text{存在 } 0 < \delta < \frac{1+s+t}{s},\ \text{使得 } \sum_{i=1}^{\infty} |b_{ni}|^{\delta} \leq K n^{t+s-s\delta}, \qquad n \geq 1, \tag{2.3}$$

或者

$$E|X_1|^{(1+s+t)/s} \log^+ |X_1| < \infty, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |b_{ni}|^{(1+s+t)/s} \leq K n^{-1}, \qquad n \geq 1, \tag{2.5}$$

(i) 当 $(1+s+t)/s \geq 2$ 时，令 $A_n \triangleq \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{ni}^2$, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-u/A_n) < \infty, \qquad \forall\, u > 0, \tag{2.6}$$

$$EX_1=0, \tag{2.7}$$

则有

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m}\prod_{j=1}^{m} b_{ni_j}X_{i_j}\xrightarrow{c}0,\qquad n\to\infty. \tag{2.8}$$

(ii) 当 $(1+s+t)/s=2$ 时，如果 (2.7) 成立，则有 (2.8) 成立.

(iii) 当 $1\le(1+s+t)/s<2$ 时，如果下列两组条件之一成立：

$$\sum_{i=1}^{\infty}|b_{ni}|\le K,\qquad n\ge 1 \text{ 且 } EX_1=0 \tag{2.9}$$

或者

$$\sum_{i=1}^{\infty}|b_{ni}|\to 0,\qquad n\to\infty, \tag{2.10}$$

则有 (2.8) 成立.

(iv) 当 $0<(1+s+t)/s<1$ 时，有 (2.8) 成立.

注 2.1 [7, 定理 1] 中要求

$$\sum_{i=1}^{\infty}b_{ni}^2\le Kn^{t-s},\qquad n\ge 1. \tag{2.11}$$

不难验证：当 $(1+s+t)/s>2$ 时， (2.3) 和 (2.5) 都弱于 (2.11), 例 2.1 说明定理 2.1(i) 确实改进了 [7, 定理 1(i)]; 而当 $0<(1+s+t)/s<2$ 时， (2.3) 和 (2.5) 都强于 (2.11), 但这种加强是必要的，例 2.2 表明 [7] 中定理 1 (iii), (iv) 不一定成立.

例 2.1 设 $b_{ni}=n^{-1/4}i^{-3/8}I\ (1\le i\le n)$, 又设 $\{X_i: i\ge 1\}$ 为 iid 列，具有共同分布 $\Pr\big(|X_1|>x\big)=c|x|^{-4.01}$, $|x|>1$, 对 $s=1/4$, $t=-1/4$, 不难验证定理 2.1(i) 的条件都成立但 (2.11) 不成立.

例 2.2 设 $s=1$, $t=-1/2$, 则 $(s+t+1)/s=3/2$, 再设 $b_{ni}=n^{-1}i^{-1/4}I\ (1\le i\le n)$, 又 $\{X_i: i\ge 1\}$ 为具有分布 $\Pr\big(|X_1|>x\big)=c|x|^{-31/20}$, $|x|>1$ 的 iid 列，不难证明 [7, 定理 1 (iii)] 的所有条件都满足但 $m=1$ 时 (2.8) 不成立.

以下推论充分说明了定理 2.1 的重要性.

推论 2.1 设 $\alpha>0$, $\{X_i: i\ge 1\}$ 为同分布 NA 列，$\{b_{ni}: 1\le i\le n,\ n\ge 1\}$ 为实数阵列，$E|X_1|^{2/\alpha}<\infty$, 且当 $0<\alpha\le 1$ 时 (2.7) 成立, 如果 $|b_{ni}|\le Kn^{-\alpha}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ni}^2=o\left(\log^{-1}n\right)$, 则对任意正整数 m 有

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_m\le n}\prod_{j=1}^{m} b_{ni_j}X_{i_j}\xrightarrow{c}0,\qquad n\to\infty. \tag{2.12}$$

注 2.2 推论 2.1 是 [7, 推论 1] 的简单推广，类似地，我们可以将 [7] 中推论 2, 推论 3 推广到 NA 列的加权乘积和，这里从略.

推论 2.2 设 $\{X_i : i \geq 1\}$ 为零均值同分布 NA 列，$\{a_{ni} : i \geq 1,\ n \geq 1\}$ 为实数阵列,

(i) 如果 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ni}^2 = O(1)$ 及 $EX_1^2 \log\big(1+|X_1|\big) < \infty$, 则对任意正整数 m 有

$$n^{-m/2} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m} \prod_{j=1}^{m} a_{ni_j} X_{i_j} \xrightarrow{c} 0, \qquad n \to \infty. \tag{2.13}$$

(ii) 设 $p > 2$, 如果 $E|X_1|^p < \infty$ 且存在实数 $2 \leq q < p$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ni}^2 = o\,(n^{2/p}/\log n)$, 则对任意正整数 m 有

$$n^{-m/p} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m} \prod_{j=1}^{m} a_{ni_j} X_{i_j} \xrightarrow{c} 0, \qquad n \to \infty.$$

注 2.3 推论 2.2 为 [13, 定理 2.2] 的推广. 注意 [13, 定理 2.2] 难以从 [7, 定理 1(i)] 推出，这进一步说明我们对 [7, 定理 1(i)] 的改进是有意义的.

推论 2.3 设 $p > 2,\ 1/p = 1/\alpha + 1/\beta$, 其中 $p < \alpha \leq \infty,\ p \leq \beta < \infty,\ \{X_i : i \geq 1\}$ 为同分布 NA 列，$\{a_{ni} : 1 \leq i \leq n,\ n \geq 1\}$ 为实数阵列，如果 (2.7) 成立且

$$E|X_1|^{\beta} < \infty, \tag{2.14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 = O\,(n^{2/\alpha}), \tag{2.15}$$

则对任意正整数 m 有

$$n^{-m/p} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \prod_{j=1}^{m} a_{ni_j} X_{i_j} \xrightarrow{c} 0, \qquad n \to \infty. \tag{2.16}$$

注 2.4 在相同的矩条件和权函数条件下，[4] 得到的 iid 列的强大数律是推论 2.3 中 $\beta = p > 2,\ m = 1$ 的部分.

推论 2.4 设 $1 \leq p < 2,\ 1/p = 1/\alpha + 1/\beta$, 其中 $p < \alpha < \beta < \infty,\ \{X_i : i \geq 1\}$ 为同分布 NA 列，$\{a_{ni} : 1 \leq i \leq n,\ n \geq 1\}$ 为实数阵列，满足条件 (2.14) , (2.7) 及 $\big(\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{\alpha}\big)^{1/\alpha} = O\,(1)$, 则有 (2.16) 成立.

3 引理

引理 3.1[14] 设 $\{x_i : i \geq 1\}$ 为任意实数列，则对任意整数 $n \geq m \geq 1$,

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \prod_{j=1}^{m} x_{i_j} = \sum_{\sum\limits_{j=1}^{m} l_j r_j = m} A^{(m)}(l_j, r_j : 1 \leq j \leq m) \prod_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^{l_j}\Big)^{r_j}, \tag{3.1}$$

这里，$A^{(m)}(l_j, r_j : 1 \leq j \leq m)$, $\sum\limits_{j=1}^{m} r_j l_j = m$ 均为与 n 无关的常数.

引理 3.2 设 $\{x_i : i \geq 1\}$ 为数列，$\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 都收敛，则

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m} \prod_{j=1}^{m} x_{i_j} \triangleq \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m\leq N} \prod_{j=1}^{m} x_{i_j}$$

存在，且

$$\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_m} \prod_{j=1}^{m} x_{i_j} = \sum_{\sum\limits_{j=1}^{m} l_j r_j = m} A^{(m)}(l_j, r_j : 1 \leq j \leq m) \prod_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{l_j}\Big)^{r_j}, \tag{3.2}$$

这里，$A^{(m)}(l_j, r_j : 1 \leq j \leq m)$，$\sum\limits_{j=1}^{m} r_j l_j = m$ 均为只与 m 有关的常数.

证 由初等 Jensen 不等式，对一切正整数 $r \geq 2$ 和 N, 有 $\sum\limits_{i=1}^{N} |x_i^r| \leq \big(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2\big)^{r/2}$, 由 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ 收敛即知 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^r$ 绝对收敛，于是由引理 3.1 立得.

引理 3.3 如果 r.v. 列 $\{X_i : i \geq 1\}$ 及 $\{Y_i : i \geq 1\}$ 都完全收敛于 0，K 为非零常数，则 $\{KX_i : i \geq 1\}$, $\{X_i + Y_i : i \geq 1\}$ 及 $\{X_i Y_i : i \geq 1\}$ 都完全收敛到 0.

证 注意到对 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned} &\big\{|X_i + Y_i| \geq \varepsilon\big\} \subset \big\{|X_i| \geq \varepsilon/2\big\} \cup \big\{|Y_i| \geq \varepsilon/2\big\}, \\ &\big\{|X_i Y_i| \geq \varepsilon\big\} \subset \big\{|X_i| \geq \sqrt{\varepsilon}\big\} \cup \big\{|Y_i| \geq \sqrt{\varepsilon}\big\} \end{aligned}$$

且当 $K \neq 0$ 时，有

$$\{KX_i \geq \varepsilon\} = \big\{|X_i| \geq \varepsilon/K\big\},$$

由引理的条件立得引理的结论.

4 定理的证明

定理 2.1 的证明 由引理 3.2, 引理 3.3 及初等 Jensen 不等式知为证 (2.8), 只要证

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni} X_i \xrightarrow{c} 0, \qquad n \to \infty, \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ni}^2 X_i^2 \xrightarrow{c} 0, \qquad n \to \infty, \tag{4.2}$$

先证 (4.1): 类似于 [7, 定理 1], 不妨假设 $b_{ni} > 0$. 设 ε 为任意给定的正数，不难证明，对 $\forall n \geq 1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{ni} X_i$ a.s. 收敛，从而存在正整数 k_n 使得 $\Pr\big(\sum\limits_{i=k_n+1}^{\infty} b_{ni} X_i| > 3\varepsilon\big) < 1/n^2$, 于是我们只需证

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr\Big(\Big|\sum_{i=1}^{k_n} b_{ni} X_i\Big| > 3\varepsilon\Big) < \infty, \tag{4.3}$$

(i) 和 (ii) 令

$$
\begin{aligned}
&X_{ni}^{(1)} = X_i I\left(b_{ni}X_i \le n^{-\sigma}\right) + b_{ni}^{-1} n^{-\sigma} I\left(b_{ni}X_i > n^{-\sigma}\right), && \text{其中 } \sigma > 0 \text{ 待定,}\\
&X_{ni}^{(2)} = (X_i - b_{ni}^{-1} n^{-\sigma}) I\big(b_{ni}X_i > \max(\varepsilon/N, n^{-\sigma})\big), && \text{其中 } N \text{ 为正整数待定,}\\
&X_{ni}^{(3)} = (X_i - b_{ni}^{-1} n^{-\sigma}) I(n^{-\sigma} < b_{ni}X_i \le \varepsilon/N), && i \ge 1, \quad n \ge 1.
\end{aligned}
$$

再令 $T_n^{(l)} \triangleq \sum\limits_{i=1}^{k_n} b_{ni} X_{ni}^{(l)}$，$l$=1, 2, 3. 我们仍使用 [7, 定理 1] 的三段式方法，其中第一段和第三段类似于 [7, 定理 1(iii)] 中相应部分，略．我们只证第二段：

令 $g_j = \left[(jKN/\varepsilon)^{1/s}\right]$, 由 (2.10) 有 $Kn^{t+s-s\delta} \ge \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_{ni}^{\delta} \ge \#\{i : b_{ni} j > \varepsilon/N\}\varepsilon^{\delta}/(jN)^{\delta}$, 从而 $\#\{i : b_{ni} j > \varepsilon/N\} \le Kn^{t+s-s\delta}(jN)^{\delta}/\varepsilon^{\delta}$,

当第一组条件 (2.2), (2.3) 成立时，用类似于 [7, 引理 2] 的方法可得：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T_n^{(2)} > \varepsilon) \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{g_j} \Pr\left(j-1 \le X_1 < j\right) \#\big\{i : b_{ni} > \varepsilon/(Nj)\big\}\\
\le& C \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{g_j} \Pr(j-1 \le X_1 < j)\, j^{\delta} n^{t+s-s\delta} \le C \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(j-1 \le X_1 < j) j^{\delta} g_j^{t+s-s\delta+1}\\
\le& C \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(j-1 \le X_1 < j) j^{(t+s+1)/s} \le CE|X_1|^{(1+s+t)/s} < \infty.
\end{aligned}
$$

当第二组条件 (2.4), (2.5) 成立时，同理可得：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(T_n^{(2)} > \varepsilon) \le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{g_j} \Pr(j-1 \le X_1 < j) \#\big\{i : b_{ni} > \varepsilon/(Nj)\big\}\\
\le& C \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{g_j} \Pr(j-1 \le X_1 < j) j^{(1+s+t)/s} n^{-1}\\
\le& C \sum_{j=1}^{\infty} \Pr(j-1 \le X_1 < j)\, j^{(s+t+1)/s} \log j \le CE|X_1|^{(1+s+t)/s} \log^{+} |X_1| < \infty.
\end{aligned}
$$

(iii) 令

$$
\begin{aligned}
&X_{ni}^{(1)} = -b_{ni}^{-1} n^{-\sigma} I\left(b_{ni}X_i < -n^{-\sigma}\right) + X_i I\left(b_{ni}|X_i| \le n^{-\sigma}\right) + b_{ni}^{-1} n^{-\sigma} I(b_{ni}X_i > n^{-\sigma}),\\
&X_{ni}^{(2)} = (X_i - X_{ni}^{(1)}) I\left(b_{ni}|X_i| > \max(\varepsilon/N, n^{-\sigma})\right),\\
&X_{ni}^{(3)} = X_i - X_{ni}^{(1)} - X_{ni}^{(2)}, \qquad i \ge 1, \quad n \ge 1.
\end{aligned}
$$

再令 $T_n^{(l)} \triangleq \sum\limits_{i=1}^{k_n} b_{ni} X_{ni}^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$. 我们仍使用 [7, 定理 1] 的三段式方法，其中第一段和第三段类似于 [7, 定理 1(iii)] 中相应部分，第二段同 (i)(ii), 略.

(iv) 令 $X_{ni}^{(l)}, T_n^{(l)}$, $l = 1, 2, 3$ 同 (iii), 我们仍使用 [7, 定理 1] 的三段式方法，其中第一段类似于 (iii), 第二段和第三段同 (i)(ii), 略.

下面我们来证 (4.2). 注意定理 2.1 对应 $m=1$ 的结论已经得到证明, 为方便起见, 以后证明中提到的定理 2.1 均指 $m=1$ 的结论. 由于 $X_i^2=X_i^2I\,(X_i\ge 0)+X_i^2I\,(X_i<0)$, 我们不妨设 $X_i\ge 0,\ i\ge 1$, 由 [1, 性质 P3] 知 $\{X_i^2: i\ge 1\}$ 仍为 NA 列.

令 $s'=2s,\ t'=t-s$, 此时 $v'\triangleq(1+s'+t')/s'=(1+s+t)/(2s)$, 则当 (2.3) 成立时有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_{ni}^2|^{\delta/2}\le Kn^{t'+s'-s'\delta/2}$, 而当 (2.5) 成立时有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_{ni}^2|^{(1+s'+t')/s'}\le Kn^{-1}$.

(i), (ii) 不难验证, (2.6) 蕴涵 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_{ni}^2\to 0$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_{ni}^2EX_i^2\le C\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_{ni}^2\to 0,\ n\to\infty$. 令 $X_i'=X_i^2-EX_i^2,\ i\ge 1$, 于是当 $(1+s+t)/s>4$ 时由定理 2.1(i) 即得 (4.2) 成立. 当 $(1+s+t)/s=4$ 时由定理 2.1(ii) 即得 (4.2) 成立. 而当 $2\le(1+s+t)/s<4$ 时, 由定理 2.1(iii) 即得 (4.2) 成立.

(iii) 和 (iv) 类似于 (i), (ii), 由定理 2.1(iv) 即得 (4.2) 成立.

注 4.1 在证明 (4.1) 的三段式证明中, 第一段中应用指数不等式时必须保证对 $\forall n\ge 1$, $\{X_{ni}: i\ge 1\}$ 为 NA 的, 第二段的证明无需任何相关性, 第三段在将若干事件乘积的概率放大至各个事件概率的乘积时仅需要 $\{X_i: i\ge 1\}$ 为 NA 的.

推论 2.1 的证明 类似于 [7, 推论 1] 的证明, 略.

推论 2.2 的证明 (i) 令 $b_{ni}=n^{-1/2}a_{ni},\ i\ge 1,\ n\ge 1,\ s=1/2,\ t=-1/2$, $(1+s+t)/s=2$, 不难验证 (2.1), (2.4), (2.5), (2.7) 都成立, 由定理 2.1(ii) 立得.

(ii) 令 $b_{ni}=n^{-1/p}a_{ni},\ i\ge 1,\ n\ge 1,\ s=1/p,\ t=-1/p$, 此时 $(1+s+t)/s=p$, 不难验证 (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7) 都成立 (取 $\delta=q$), 由定理 2.1(i) 立得.

推论 2.3 的证明 令 $b_{ni}=n^{-1/p}a_{ni}I\,(i\le n),\ i\ge 1,\ n\ge 1,\ s=1/\beta,\ t=-1/\beta$, 此时有 $(1+s+t)/s=\beta>2$, 容易验证 (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7) 成立, 由定理 2.1 的 (i) 立得.

推论 2.4 的证明 令 $b_{ni}=n^{-1/p}a_{ni}I\,(i\le n),\ i\ge 1,\ n\ge 1,\ s=1/\beta,\ t=-1/\beta$, 此时有 $(1+s+t)/s=\beta>2$, 不难验证 (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7) 都成立 (取 $\delta=\alpha$), 由定理 2.1(i) 立得.

参 考 文 献

1 Joag Dev K, Proschan F. Negative Association of Random Variables with Applications. *Ann. Statist.*, 1983(11): 286–295

2 Chow Y S. Some Convergence Theorems for Independent Random Variables. *Ann. Math. Statist.*, 1966, 37: 1482–1493

3 Chow Y S, Lai T L. Limiting Behavior of Weighted Sums of Independent Random Variables. *Ann. Prob.*, 1973, 1: 810–824

4 Thrum R. A Remark on Almost Sure Convergence of Weighted Sums. *Probab. Theory Rel. Fields*, 1987, 75: 425–430

5 Cuzick J. A Strong Law for Weighted Sums of IID Random Variables. *J. Theoret. Probab.*, 1995, 8: 625–641

6 Bai Z D, Cheng P E. Marcinkiewicz Strong Laws for Linear Statistics. *Statist. Probab. Lett.*, 2000, 46: 105–112

7 Stout W F. Some Results on the Complete and Almost Sure Convergence of Linear Combinations of Independent Random Variables and Martingale Differences. *Ann. Math. Statist.*, 1968, 39: 1549–1562

8 Stout W F. Almost Sure Convergence. Academic Press, New York, 1974

9 Hsu P L, Robbins H. Complete Convergence and Law of Large Numbers. *Proc. Nut. Acad. Sci. USA.*, 1947, 33: 25–31

10 Gadidov A. Strong Law of Large Numbers for Multilinear Forms. *Ann. Probab.*, 1998, 26: 902–923

11 苏淳，梁汉营，王岳宝. IID 随机变量两两乘积之和的 Hsu-Robbins 型定理 (I). 数学学报, 2000, 43(5): 875–886
(Su C, Liang H Y, Wang Y B. Hsu-Robbins Type Theorems for Pairwise Products Sums of IID Random Variables. *Acta Mathematica Sinica*, 2000, 43(5): 875–886)

12 Wang Y B, SU C, Liang H Y, Cheng F Y. Equivalent Conditions of Complete Convergence For M-dimensional Products of IID Random Variables and Application to Strong Law of Large Numbers. *Science in China* (Series A), 2000, 43(11): 1144–1153

14 王岳宝, 严继高, 成凤旸, 蔡新中. 关于不同分布两两 NQD 列的 Jamison 型加权乘积和的强稳定性. 数学年刊, 2001, 22A: 701–706

13 Li D L, Rao M B, Jiang T F, Wang X C. Complete Convergence and Almost Sure Convergence of Weighted Sums of Random Variables. *J. Theoret. Probab.*, 1995(8): 49–76
(Wang Y B, Yan J G, Cheng F Y, Cai X Z. On the Strong Stability for Jamison Type Weighted Product Sums of Pairwise NQD Series with Different Distribution. *Chinese Ann. of Math.* (Series A), 2001, 22: 701–706)

15 Matula P. A Note on the Almost Sure Convergence of Sums of Negatively Dependent Random Variables. *Statist. Probab. Lett.*, 1992, 15: 209–213

THE COMPLETE CONVERGENCE OF WEIGHTED PRODUCT SUMS FOR NA SEQUENCES

CHENG Fengyang WANG Yuebao YAN Jigao CAI Xinzhong
(*School of Mathematical Sciences, Suzhou University, Suzhou* 215006)

Abstract In this paper, we discuss the complete convergence of weighted product sums for NA sequences, some of the results are better than that of iid sequences which has been known.

Key words NA sequences, weighted product sums, complete convergence