第 25 卷 第 4 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 25 No. 4
2002 年 10 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Oct., 2002

Q- 过程的 μ- 不变分布 *

林 祥　　张汉君　　侯振挺

(中南大学铁道校区科研所, 长沙 410075)

摘 要 设 E 为一可数集, $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 为 $E\times E$ 上的矩阵, 满足

$$q_{ij}\geq 0,\qquad i\neq j,\qquad \sum_{k\neq i} q_{ik}=-q_{ii}\leq +\infty,\qquad \forall\, i\in E,$$

$m=(m_i;i\in E)$ 是一严格正的概率分布, 满足

$$\sum_{i\in E} m_i q_{ij}\leq -\mu m_j,\qquad \forall\, j\in E,$$

问何时存在 Q- 过程使得 m 是它的 μ- 不变分布?

本文对 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 为全稳定和单瞬时情形, 完整地解决了该问题.

关键词 Q- 过程, Q- 预解式, μ- 次不变分布, μ- 不变分布

1 主要结果的陈述

我们看以下两个基本不等式

$$\sum_{i\in E} m_i q_{ij}\leq -\mu m_j,\qquad j\in E, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i\in E} m_i p_{ij}(t)\leq \mathrm{e}^{-\mu t} m_j,\qquad j\in E,\quad t\geq 0, \tag{1.2}$$

这里 $\mu\geq 0$, $m=(m_j;j\in E)$ 是一族严格大于 0 的数. 满足 (1.1) 的 m 称为 Q 的 μ- 次不变测度; 如果对所有 $j\in E$, (1.1) 中等号成立, 则称 m 为 Q 的 μ- 不变测度; 类似的, 满足 (1.2) 的 m 称为 $P=(p_{ij}(t);i,j\in E,t\geq 0)$ 的 μ- 次不变测度; 如果对所有 $j\in E$ 和 $t\geq 0$, (1.2) 中等号成立, 则称 m 为 P 的 μ- 不变测度. 如果还有 $\sum\limits_{i\in E} m_i=1$, 则相应的 m 分别称为 Q 的 μ- 次不变分布, Q 的 μ- 不变分布, P 的 μ- 次不变分布和 P 的 μ- 不变分布.

对于最小 Q- 过程 $F=(f_{ij}(t);i,j\in E,t\geq 0)$, Kelly[1] 和 Pollett[2] 完整的解决了 (1.1) 和 (1.2) 之间的关系, 下面这个定理总结了这些结果:

定理 1.1 设 $m=(m_i;i\in E)$ 是一列严格大于 0 的数, 则

(i) m 是 F 的 μ- 次不变当且仅当 m 是 Q 的 μ- 次不变;

本文 2000 年 4 月 27 日收到. 2001 年 12 月 19 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (10171009 号) 资助项目.

(ii) m 是 F 的 μ- 不变当且仅当 m 是 Q 的 μ- 不变且对某个 (所有)$v<\mu$, 方程

$$\sum_{i\in E} y_i q_{ij} = -v y_j, \qquad 0\le y_j\le m_j,\ \ j\in E \tag{1.3}$$

只有平凡解.

为了下面叙述和证明的方便，下面说明怎样用预解式来刻划 μ- 次不变测度 (分布) 和 μ- 不变测度 (分布).

设 P 是任一 Q- 过程， Ψ 是对应的 Q- 预解式， $m=(m_j;\, j\in E)$ 是 P 的 μ- 次不变测度，则由 Ψ 的定义，我们有

$$\sum_{i\in E} m_i(\lambda+\mu)\psi_{ij}(\lambda)\le m_j, \qquad j\in E,\ \ \lambda>0, \tag{1.4}$$

如果 m 是 P 的 μ- 不变测度，则对所有 $j\in E$ 和 $\lambda>0$, (1.4) 中等号成立．这样，如果 (1.4) 成立，则称 m 是 Ψ 的 μ- 次不变测度；如果 (1.4) 中等号成立，则称 m 是 Ψ 的 μ- 不变测度.

下面定理刻划了 P 和 Ψ 的 μ-(次) 不变测度的关系，它的证明见 [3,4].

定理 1.2 设 m 是定义在 E 上的测度 (分布), P 是标准转移函数， Ψ 是对应的预解式，则 m 是 P 的 μ-(次) 不变测度 (分布) 当且仅当 m 是 Ψ 的 μ-(次) 不变测度 (分布); 反过来，如果 $\mu\le\lambda_P(E)$(其中 $\lambda_P(E)$ 为 P 在 E 上的衰减系数), 则 m 是 P 的 μ-(次) 不变测度 (分布) 当且仅当 m 是 Ψ 的 μ-(次) 不变测度 (分布).

由于 μ- 不变测度 (分布) 跟拟平稳分布紧密相关，所以对 μ- 不变测度 (分布) 的研究, 无论在理论上, 还是在应用上, 都十分重要, 而且一般我们所知道的不是转移函数, 而是 Q- 矩阵 Q, 因而回答下面的基本问题是非常有意义的.

问题 设 E 为一可数集， $Q=(q_{ij};\, i,j\in E)$ 为 $E\times E$ 上的矩阵，满足

$$q_{ij}\ge 0, \qquad i\ne j, \qquad \sum_{k\ne i} q_{ik} = -q_{ii}\le +\infty, \qquad \forall\, i\in E, \tag{1.5}$$

$m=(m_i;\, i\in E)$ 为 E 上严格正概率分布，满足

$$\sum_{i\in E} m_i q_{ij}\le -\mu m_j, \qquad \forall\, j\in E. \tag{1.6}$$

问何时存在 Q- 过程 P 使得 m 是 P 的 μ- 不变分布？

当 $\mu=0$ 时，即为 Williams 开问题 [5], 张，林和侯 [6,7] 已完整的解决了该问题．若 $\mu\ge 0$, 当 Q 全稳定且 Q- 函数唯一时， Kelly[1] 解决了上述问题．当 Q 全稳定且 Q 含一吸收态时， Pollett[8] 解决了上述问题.

本文对全稳定和单瞬时情形，完整的解决了该问题，具体结果为：

定理 1.3 设 Q 和 m 满足 (1.5) 和 (1.6), 且 Q 全稳定，即 $q_i<+\infty, i\in E$, 则一定存在一个 Q- 过程 P, 使得 m 是 P 的 μ- 不变分布.

定理 1.4 设 Q 和 m 满足 (1.5) 和 (1.6), 且恰好存在一个 $b\in E$, 使 $q_b=+\infty$, 即 Q 单瞬时，则一定存在一个 Q- 过程 P, 使得 m 是 P 的 μ- 不变分布.

2 几个重要的引理

当含瞬时态时，在 Q- 预解式 (Q- 过程) 的构造中，下面著名的禁止概率分解定理 (见 [9]) 起十分重要的作用，可以说最近关于含瞬时态 Q- 过程的每一项成果都需要用到此定理，它的证明见 [9] 或 [10].

引理 2.1 设 $R(\lambda)=\big(r_{ij}(\lambda);i,j\in E,\lambda>0\big)$ 是 E 上的 Q- 预解式，任取 $b\in E$, 令 $E_b=E\setminus\{b\}$, 则 $R(\lambda)$ 必可表示为

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1 & \eta(\lambda)\\ \xi(\lambda) & \xi(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 (i) $\Psi(\lambda)$ 是 $Q^b=(q_{ij};\ i,j\in E_b)$- 预解式.

(ii) $\eta(\lambda)=(\eta_j(\lambda);\ j\in E_b)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义行协调族， $\xi(\lambda)=(\xi_i(\lambda);i\in E_b)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义列协调族且 $\xi(\lambda)\le 1-\lambda\Psi(\lambda)1$, 而且还有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\eta_j(\lambda)=q_{bj},\quad j\in E_b;\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\xi_i(\lambda)=q_{ib},\quad i\in E_b.$$

(iii) $r_{bb}(\lambda)=\big(c+\lambda+\lambda[\eta(\lambda),\xi]\big)^{-1}$, 这里 $\xi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\xi(\lambda)$, 从而 $0\le\xi\le 1$, 而 c 为与 λ 无关的常数，满足

$$c\ge\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\big[\eta(\lambda),1-\xi\big].$$

(iv) 若 b 为瞬时态，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda[\eta(\lambda),\xi]=+\infty$$

或等价于

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\big[\eta(\lambda),1\big]=+\infty.$$

反过来，任取一个 Q^b- 预解式 $\Psi(\lambda),\eta(\lambda)$ 和 $\xi(\lambda)$ 满足 (ii) 和 (iv), $r_{bb}(\lambda)$ 满足 (iii), 再按 (2.1) 定义 $R(\lambda)$, 则 $R(\lambda)$ 是一个 Q- 预解式.

引理 2.2 设 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$ 是一 Q- 矩阵， m 是 Q 的 μ- 不变分布， $Q^b=(q_{ij};i,j\in E_b)$ 是 $E_b=E\setminus\{b\}$ 上全稳定的 Q- 矩阵， $\Phi^b(\lambda)=(\phi^b_{ij}(\lambda);i,j\in E_b,\lambda>0)$ 为最小 Q^b- 预解式.

记

$$d_i(\lambda)=m_i-(\lambda+\mu)\sum_{k\in E_b}m_k\phi^b_{ki}(\lambda),\qquad i\in E_b,\ \ \lambda>0, \tag{2.2}$$

则有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda d_i(\lambda)=m_bq_{bi},\qquad i\in E_b.$$

证 m 是 Q 的 μ- 不变分布, 所以有 $\sum\limits_{i\in E}m_iq_{ij}=-\mu m_j$, $j\in E$, 从而 $m^b=(m_i;\,i\in E_b)$ 是 Q^b 的 μ- 次不变测度，由定理 1.1 知 m^b 是 $\Phi^b(\lambda)$ 的 μ- 次不变测度，从而 $d_i(\lambda)\ge 0$, $i\in E_b$, $\lambda>0$. 因为 $\Phi^b(\lambda)$ 是最小 Q^b- 预解式，所以满足如下预解方程：

$$\phi^b_{ij}(\lambda)-\phi^b_{ij}(\mu)+(\lambda-\mu)\phi^b_{ik}(\lambda)\phi^b_{kj}(\mu)=0,\qquad i,j\in E_b,\ \ \lambda,\mu>0.$$

设 $\overline{d}_i(\lambda)=m_i-\lambda\sum\limits_{k\in E_b}m_k\phi^b_{ki}(\lambda), \qquad i\in E_b$, 则有

$$\overline{d}_i(\lambda)-\overline{d}_i(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E_b}\overline{d}_k(\lambda)\phi^b_{ki}(\mu)=0, \qquad i\in E_b,\quad \lambda,\mu>0.$$

又因为 m 为 Q 的 μ- 不变分布，所以由定理 1.1, 对 $i\in E_b$, $\overline{d}_i(\lambda)\geq 0$. 因而 $\overline{d}_i(\lambda)$ 关于 λ 单调不增，于是对每个 $i\in E_b$, $\lambda\sum\limits_{k\in E_b}m_k\phi^b_{ki}(\lambda)$ 是 λ 增函数，从而 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum\limits_{k\in E_b}m_k\phi^b_{ki}(\lambda)$ 存在. 由控制收敛定理得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\sum_{k\in E_b}m_k\phi^b_{ki}(\lambda)=m_i, \qquad i\in E_b.$$

再由 Φ 满足向前方程，即

$$\lambda\phi^b_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}+\sum_{k\in E_b}\phi^b_{ik}(\lambda)q_{kj},$$

因而

$$d_i(\lambda)=\sum_{k\in E_b}m_k(\delta_{ki}-(\lambda+\mu)\phi^b_{ki}(\lambda)), \qquad i\in E_b,$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\lambda d_i(\lambda)&=-\lambda\sum_{k\in E_b}m_k\Big(\sum_{j\in E_b}\phi^b_{kj}(\lambda)q_{ji}\Big)-\lambda\mu\sum_{k\in E_b}m_k\phi^b_{ki}(\lambda)\\&=-\sum_{j\in E_b}q_{ji}\Big(\lambda\sum_{k\in E_b}\phi^b_{kj}(\lambda)\Big)-\mu\Big(\sum_{k\in E_b}\lambda m_k\phi^b_{ki}(\lambda)\Big),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda d_i(\lambda)=-\sum_{j\in E_b}m_jq_{ji}-\mu m_i=m_bq_{bi}, \qquad i\in E_b.$$

引理 2.3 设 $m=(m_i;i\in E)$ 是一严格正的概率分布，若 m 是形如 (2.1) 的 Q- 预解式 $R(\lambda)$ 的 μ- 不变分布，则下面两条成立:

(i) $m^b=(m_i;i\in E_b)$ 是 $\Psi(\lambda)$ 的 μ- 次不变测度;

(ii) $\eta_i(\lambda)=\frac{d_i(\lambda)}{m_b}$, $i\in E_b$, $\lambda>0$, 其中 $d_i(\lambda)=m_i-(\lambda+\mu)\sum\limits_{k\in E_b}m_k\psi_{ki}(\lambda)$, $i\in E_b,\lambda>0$.

反过来，若有 (i) 和 (ii) 成立，且在 (2.1) 中有 $\xi_i(\lambda)=1-\lambda\sum\limits_{j\in E_b}\psi_{ij}(\lambda)$, $i\in E_b$, $c=\frac{\mu}{m_b}+\lambda\big[\eta(\lambda),1-\xi\big]$, 其中 $\xi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\xi(\lambda)$, 则 m 是 $R(\lambda)$ 的 μ- 不变分布.

证 若 m 是形如 (2.1) 的 Q- 预解式 $R(\lambda)$ 的 μ- 不变分布，则有

$$(\lambda+\mu)\sum_{i\in E}m_ir_{ij}(\lambda)=m_j, \qquad j\in E,\quad \lambda>0. \tag{2.3}$$

由 (2.1) 知

$$\psi_{ij}(\lambda)\leq r_{ij}(\lambda), \qquad i,j\in E_b,\quad \lambda>0,$$

所以有

$$(\lambda+\mu)\sum_{i\in E_b} m_i\psi_{ij}(\lambda)\le m_j,\qquad j\in E_b,\ \ \lambda>0.$$

所以 $m^b=(m_i;\, i\in E_b)$ 是 $\Psi(\lambda)$ 的 μ- 次不变测度，即 (i) 成立.

由 (2.3) 可得

$$(\lambda+\mu)r_{bb}(\lambda)m_b+(\lambda+\mu)\sum_{i\in E_b} m_i r_{bb}(\lambda)\xi_i(\lambda)=m_b \tag{2.4}$$

和

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)r_{bb}(\lambda)\eta_i(\lambda)m_b+(\lambda+\mu)\sum_{k\in E_b} m_k\psi_{ki}(\lambda)+(\lambda+\mu)\sum_{k\in E_b} m_k r_{bb}(\lambda)\xi_k(\lambda)\eta_i(\lambda)\\ =&m_i,\qquad i\in E_b,\ \ \lambda>0.\end{aligned} \tag{2.5}$$

由 (2.4) 和 (2.5) 得

$$\eta_i(\lambda)=\frac{d_i(\lambda)}{m_b},\qquad i\in E_b,\ \ \lambda>0,$$

即 (ii) 成立.

反过来, 若 (2.1) 中有 $\xi_i(\lambda)=1-\lambda\sum\limits_{j\in E_b}\psi_{ij}(\lambda)$, $i\in E_b$, 由于 $\eta(\lambda)$ 是关于 $\Psi(\lambda)$ 的广义行协调族, 所以 $\lambda\big[\eta(\lambda),1-\xi\big]<+\infty$ 且与 λ 无关, 又 $c=\frac{\mu}{m_b}+\lambda\big[\eta(\lambda),1-\xi\big]$, $\xi=\lim\limits_{\lambda\to 0}\xi(\lambda)$, 故 c 满足引理 2.1(iii), 所以 $r_{bb}(\lambda)=\big(\mu/m_b+\lambda+\lambda\eta(\lambda)1\big)^{-1}$. 由 (i) 和 (ii) 成立有 (2.4) 和 (2.5) 成立，从而 (2.3) 成立，因而 m 是 $R(\lambda)$ 的 μ- 不变分布.

容易证明

引理 2.4 设 $\Psi=(\psi_{ij}(\lambda);\ i,j\in E,\ \lambda>0)$ 是一个预解式， m 是概率分布，若对某个 $\lambda_0>0$ 有

$$(\lambda_0+\mu)\sum_{i\in E} m_i\psi_{ij}(\lambda_0)=m_j,\qquad \forall j\in E,$$

则对一切 $\lambda>0$, 有

$$(\lambda+\mu)\sum_{i\in E} m_i\psi_{ij}(\lambda)=m_j,\qquad \forall j\in E.$$

3 主要结果的证明

定理 1.3 的证明 (i) 若最小 Q- 预解式 $\Phi=\big(\phi_{ij}(\lambda);\, i,j\in E,\ \lambda>0\big)$ 诚实，则 m 是 Φ 的 μ- 不变分布；事实上，由于 m 是 Q 的 μ- 不变分布，故由定理 1.1 及定理 1.2 知，m 是 Φ 的 μ- 次不变分布，即

$$(\lambda+\mu)\sum_{i\in E} m_i\phi_{ij}(\lambda)\le m_j,\qquad j\in E,\ \ \lambda>0. \tag{3.1}$$

若 (3.1) 对某个 $j\in E$ 和 $\lambda_0>0$ 等号不成立，由 $m_i>0, i\in E$ 以及 Φ 诚实，在 (3.1) 式两端对 j 求和得

$$1=\sum_{j\in E}\Big(\lambda\sum_{i\in E} m_i\phi_{ij}(\lambda)\Big)\le\sum_{j\in E}(\lambda+\mu)\sum_{i\in E} m_i\phi_{ij}(\lambda)<\sum_{j\in E} m_j=1,$$

矛盾. 再由引理 2.4 知，对一切 $j\in E$ 和 $\lambda>0$, (3.1) 中等号成立，即 m 是 Φ 的 μ- 不变分布.

(ii) 若最小 Q- 预解式 $\Phi=(\phi_{ij}(\lambda);\ i,j\in E,\ \lambda>0)$ 不诚实，记

$$z_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda),\qquad i\in E,\quad \lambda>0, \tag{3.2}$$

则

$$z_i(\lambda)\geq 0,\qquad i\in E,\ \lambda>0,\ \text{且存在}\ i_0\in E,\ \ \lambda_0>0\ \text{使得}\ z_{i_0}(\lambda)>0, \tag{3.3}$$

从而易证对一切 $\lambda>0,\ z_{i_0}(\lambda)>0$.

再记

$$d_i(\lambda)=m_i-(\lambda+\mu)\sum_{k\in E}m_k\phi_{ki}(\lambda),\qquad i\in E,\quad \lambda>0,$$

由定理 1.1(i) 知

$$d_i(\lambda)\geq 0,\qquad i\in E,\quad \lambda>0, \tag{3.4}$$

同样，可以证明存在 $j_0\in E$, 对一切 $\lambda>0$, 有 $d_{j_0}(\lambda)>0$.

令

$$\psi_{ij}(\lambda)=\phi_{ij}(\lambda)+\frac{z_i(\lambda)d_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum\limits_{k\in E}m_kz_k(\lambda)},\quad i,j\in E,\lambda>0. \tag{3.5}$$

易证 $d(\lambda)=(d_i(\lambda);i\in E)$ 是关于 Φ 的行协调族，即

$$d_i(\lambda)-d_i(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}d_k(\lambda)\phi_{ki}(\mu)=0,\qquad i\in E,\quad \lambda,\mu>0, \tag{3.6}$$

由 $z_i(\lambda)$ 的定义以及 Φ 满足预解方程，易得

$$z_i(\lambda)-z_i(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}\phi_{ik}(\lambda)z_k(\mu)=0,\qquad i\in E,\quad \lambda,\mu>0, \tag{3.7}$$

由 (3.6), (3.7) 以及 ϕ 满足预解方程，易得

$$\psi_{ij}(\lambda)-\psi_{ij}(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)\psi_{kj}(\mu)=0,\quad i,j\in E,\lambda,\mu>0. \tag{3.8}$$

即 $\Psi=(\psi_{ij};\ i,j\in E,\ \lambda>0)$ 满足预解方程.

由 (3.3), (3.4) 以及 (3.5) 得

$$\psi_{ij}(\lambda)\geq 0,\qquad i,j\in E,\quad \lambda>0. \tag{3.9}$$

由 [11] 以及 Q 保守得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda z_i(\lambda)=0,\qquad i\in E, \tag{3.10}$$

再由 Φ 为最小预解式，所以有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\phi_{ij}-\delta_{ij})=q_{ij},\qquad i,j\in E, \tag{3.11}$$

由引理 2.2, (3.10), (3.11) 以及 (3.5) 可得

$$\lim_{\lambda\to\infty}\lambda(\lambda\psi_{ij}(\lambda)-\delta_{ij})=q_{ij},\qquad i,j\in E,\tag{3.12}$$

由 (3.5) 有

$$\lambda\sum_{j\in E}\psi_{ij}(\lambda)\le\lambda\sum_{j\in E}\phi_{ij}(\lambda)+z_i(\lambda)=1.\tag{3.13}$$

由 (3.8), (3.9), (3.12), (3.13) 以及定义 (3.5) 知 $\Psi=(\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E,\ \lambda>0)$ 是一个 Q- 预解式，而且还有

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)\sum_{i\in E}m_i\psi_{ij}(\lambda)=&(\lambda+\mu)\sum_{i\in E}m_i\phi_{ij}(\lambda)+(\lambda+\mu)\sum_{i\in E}\frac{z_i(\lambda)\,d_j(\lambda)}{(\lambda+\mu)\sum\limits_{k\in E}m_kz_k(\lambda)}\\=&(\lambda+\mu)\sum_{i\in E}m_i\phi_{ij}(\lambda)+d_j(\lambda)=m_j.\end{aligned}$$

因而由定理 1.2 知定理得证.

定理 1.4 的证明 在 (2.1) 中，取 $\Psi(\lambda)=\big(\psi_{ij}(\lambda);i,j\in E_b,\ \lambda>0\big)$ 为最小 Q^b- 预解式，由 m 是 Q 的 μ- 次不变分布，则 $m^b=(m_i;i\in E_b)$ 是 Q^b 的 μ- 次不变测度，由定理 1.1(i) 和定理 1.2 知， m^b 是 $\Psi(\lambda)$ 的 μ- 次不变测度.

令

$$\begin{aligned}&d_i(\lambda)=m_i-(\lambda+\mu)\sum_{k\in E_b}m_k\psi_{ki}(\lambda), && i\in E_b,\ \ \lambda>0,\\&\eta_i(\lambda)=\frac{d_i(\lambda)}{m_b}, && i\in E_b,\ \ \lambda>0,\\&\xi_i(\lambda)=1-\lambda\sum_{j\in E_b}\psi_{ij}(\lambda), && i\in E_b,\ \ \lambda>0,\\&r_{bb}(\lambda)=\big(\mu/m_b+\lambda+\lambda\eta(\lambda)1\big)^{-1}.\end{aligned}$$

由引理 2.1 及引理 2.2 得

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}0&0\\0&\Psi(\lambda)\end{pmatrix}+r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix}1&\eta(\lambda)\\\xi(\lambda)&\xi(\lambda)\eta(\lambda)\end{pmatrix}$$

是一 Q- 预解式，由引理 2.3 知， m 是 $R(\lambda)$ 的 μ- 不变分布，再由定理 1.2 知定理得证.

注 由于上面的证明是 “构造性” 的，我们不仅指出了以 m 为 μ- 不变分布的 Q- 预解式的存在性，而且还可以具体的将这个 Q- 预解式构造出来.

4 例子

例 1 我们考虑 $Z_+=\{1,2,\cdots,\}$ 上的随机游动，其 Q- 矩阵为

$$q_{ij}=\begin{cases}q_i, & j=i+1,\ i\ge 0,\\-q_i, & j=i\ge 0,\\0, & \text{其它},\ i,j\in Z_+,\end{cases}\tag{4.1}$$

其中 $q_i > 0$, $i \in Z_+$.

我们知道，要想 Q 的 μ-(次) 不变测度存在，必有 $\mu \leq \inf\limits_{i\geq 0} q_i$. 以下恒设 $\mu < \inf_{i\geq 0} q_i$.

容易证明

命题 4.1 存在概率分布 $m = (m_i; i \in Z_+)$, 使得 m 是形如 (4.1) 的 Q- 矩阵的 μ- 不变分布当且仅当

$$C \triangleq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_0 \cdots q_{n-1}}{(q_1 - \mu)\cdots(q_n - \mu)} < +\infty, \tag{4.2}$$

当 (4.2) 成立时，令

$$m_0 = \frac{1}{C}, \qquad m_i = \frac{1}{C}\frac{q_0 \cdots q_{i-1}}{(q_1 - \mu)\cdots(q_i - \mu)}, \qquad i \geq 1,$$

则 $m = (m_i; i \in Z_+)$ 是 Q 的 μ- 不变分布.

设 $M = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q_j}$, 则有

命题 4.2 (i) 若 $M = +\infty$, 则 Q 正则，所以最小 Q- 过程以 m 为 μ- 不变分布.

(ii) 若 $M < +\infty$, 设 $\Phi = (\phi_{ij}(\lambda); i, j \in Z_+,\ \lambda > 0)$ 为最小 Q- 预解式，定义

$$d_i(\lambda) = m_i - (\lambda + \mu) \sum_{k \in Z_+} m_k \phi_{ki}(\lambda), \qquad i \in Z_+,\quad \lambda > 0, \tag{4.3}$$

$$z_i(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{j \in Z_+} \phi_{ij}(\lambda), \qquad i \in Z_+,\quad \lambda > 0, \tag{4.4}$$

$$\psi_{ij}(\lambda) = \phi_{ij}(\lambda) + \frac{z_i(\lambda) d_j(\lambda)}{(\lambda + \mu)\sum\limits_{k \in Z_+} m_k z_k(\lambda)}, \qquad i, j \in Z_+,\quad \lambda > 0, \tag{4.5}$$

则 $\Psi = (\psi_{ij}(\lambda); i, j \in Z_+, \lambda > 0)$ 是以 m 为 μ- 不变分布的 Q- 预解式，它对应的 Q- 过程 P 以 m 为 μ- 不变分布.

证 最小 Q- 过程诚实当且仅当 $M = +\infty$, 由定理 1.3 的证明知本命题成立.

例 2 下面我们讨论如下的 Kolmogorov 矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} -\infty & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ q_1 & -q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ q_2 & 0 & -q_2 & 0 & \cdots \\ q_3 & 0 & 0 & -q_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

其中 $q_i > 0, i \geq 1$.

我们知道，要想 Q 的 μ-(次) 不变测度存在，必有 $\mu \leq \inf\limits_{i\geq 0} q_i$. 以下恒设 $\mu < \inf\limits_{i\geq 0} q_i$.

容易证明

命题 4.3 存在概率分布 $m = (m_i; i \in Z_+)$, 使得 m 是形如 (4.6) 的 Q- 矩阵的 μ- 不变分布当且仅当

$$C \triangleq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i - \mu} < +\infty, \tag{4.7}$$

当 (4.7) 成立时，令

$$m_0 = \frac{1}{C}, \qquad m_i = \frac{1}{C}\frac{1}{q_i - \mu}, \qquad i \geq 1, \tag{4.8}$$

则 $m = (m_i;\, i \in Z_+)$ 是 Q 的 μ- 不变分布.

命题 4.4 定义

$$\psi_{ij}(\lambda) = \frac{\delta_{ij}}{\lambda + q_i}, \qquad i, j \geq 1, \quad \lambda > 0, \tag{4.9}$$

$$\xi_i(\lambda) = \frac{q_i}{\lambda + q_i}, \qquad i \geq 1, \quad \lambda > 0, \tag{4.10}$$

$$\eta_i(\lambda) = \frac{q_i}{(q_i - \mu)(\lambda + q_i)}, \qquad i \geq 1, \quad \lambda > 0, \tag{4.11}$$

$$r_{bb}(\lambda) = \left(\frac{\mu}{m_b} + \lambda + \lambda\eta(\lambda)1\right)^{-1}, \qquad \lambda > 0, \tag{4.12}$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Psi(\lambda) \end{pmatrix} + r_{bb}(\lambda)\begin{pmatrix} 1 & \eta(\lambda) \\ \xi(\lambda) & \xi(\lambda)\eta(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

则 m 是 Q- 预解式 $R(\lambda)$ 的 μ- 不变分布，从而也是对应 Q- 过程的 μ- 不变分布.

证 由定理 1.4 的证明即得.

参 考 文 献

1 Kelly F P. Invariant Measures and the q-matrix. In: Probability, Statistics and Analysis, LMS Lecture Notes Series. Cambridge University Press, Vol.79, 1983, 39–56

2 Pollett P K. On the Equivalence of μ-invariant Measures for the Minimal Process and its q-matrix. *Stochastic Process Appl.*, 1986, 22: 203–221

3 Pollett P K. Invariant Measures for Q-processes When Q is not Regular. *Adv. Appl. Prob.*, 1991, 23: 277–292

4 Pollett P K. On the Construction Problem for Single-exit Markov Chains. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1991, 43: 439–450

5 Williams D. Diffusions, Markov Processes and Martigales. New York: Wiley, 1979

6 Zhang H J, Lin X, Hou Z T. Invariant Distribution of Q-process (I). *Chinese Annals of Mathematics*, 2001, 22A(3): 321–330

7 Zhang H J, Lin X, Hou Z T. Invariant Distribution of Q-process (Ⅱ). *Chinese Annals of Mathematics*, 2002, 23A(3): 361–370

8 Pollett P K. Identifying Q-processes with a Given Finite μ-invariant Measure. In: Markov Processes and Controlled Markov Chains, ed., Hou Zhengting, Jerzy A Filar and Anyue Chen, Kluwer Academic Publishers, 1999

9 Chen A Y, Rewshaw E. Existence and Uniqueness Criteria for Conservative Uni-instantaneous Denumerable Markov Processes. *Probability Theory and Related Fields*, 1993, 94: 427–456

10 Hou Z T, et al. The Q-matrix Problem for Markov Chains. Changsha: Hunan Science Technology Press, 1994

11 Anderson W J. Continuous-Time Markov Chains. New York: Springer-Verlag, 1991

12 Chung K L. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1967

13 Chen M. F. From Markov Chains to Non-equilibrium Particle Systems. Singapore: World Scientific, 1992

14 Hou Z T, Guo Q F. Time-Homogeneous Markov Processes with Countable State Space. New York: Springer-Verlag, 1988

15 Kendall D G. Some Problems in Mathematical Genealogy. In: Perspectives in Probability and Statistics, Papers in Honour of M.S. Bartlett, ed., J. Gani, Sheffield: Applied Probability Trust., 1975, 325–345

16 Niar. M, Pollett P K. On the Relationship Between μ-invariant Measures and Quasistationary Distributions for Continuous-time Markov Chains. *Adv. Appl. Prob.*, 1993, 25: 82–102

17 Pollett P K. Reversibility, Invariance and μ-invariance. *Adv. Appl. Prob.*, 1988, 20: 600–621

18 Yang X Q. The Construction Theory of Denumerable Markov Processes. New York: Wiley, 1990

μ-INVARIANT DISTRIBUTION OF Q-PROCESS

LIN Xiang ZHANG Hanjun HOU Zhenting

(*Research Department, Railway Campus, Centralsouth University, Changsha* 410075)

Abstract Let E be a countable set, $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ be a matrix defined on $E \times E$ such that

$$q_{ij} \geq 0, \qquad i \neq j, \qquad \sum_{k \neq i} q_{ik} = -q_{ii} \leq +\infty, \qquad \forall\, i \in E,$$

$m = (m_i; i \in E)$ is a set of strictly positive probability distribution such that

$$\sum_{i \in E} m_i q_{ij} \leq -\mu m_j, \qquad \forall j \in E$$

in what condition does there exist Q-process such that m is a μ-invariant distribution of its?

In this paper we completely solve the problem when $Q = (q_{ij}; i, j \in E)$ are total stable and a single instantaneous state.

Key words Q-process, Q-resolvent function, μ-subinvariant distribution, μ-invariant distribution