

# 求解 Hamilton-Jacobi 方程的有限元方法\*

李祥贵

(石油大学数学系, 东营 257062; 应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

陈光南 蔚喜军

(应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

**摘 要** 本文将 Galerkin 二次有限元应用于 Hamilton-Jacobi 方程, 得到了求解 Hamilton-Jacobi 方程的数值格式. 这些格式是 TVD 型的, 在更强的条件下, 其半离散格式的数值解收敛于 Hamilton-Jacobi 方程的粘性解. 数值结果表明这类格式具有较高的分辨导数间断的能力.

**关键词** Galerkin 有限元, Hamilton-Jacobi 方程, 守恒律

## 1 引言

Hamilton-Jacobi 方程 (简称 H-J 方程) 来源于最优控制理论、微分几何、流体力学等学科<sup>[1,2]</sup>. 目前, H-J 方程在光学、计算流体、控制系统、以及网格生成等方面有非常重要的应用, 并产生了像用于计算流体界面的水平集方法<sup>[3]</sup> 等新的理论. H-J 方程的解的性质非常复杂, 一方面, H-J 方程的弱解存在但不唯一; 另一方面, 即使初值和 Hamilton 函数足够光滑, 其解的导数也可能会在某一时刻出现间断 (类似于双曲守恒律问题中的激波). 这些性质与守恒律方程解的性质相似, 实际上, 对于一维问题, 二者是等价的, 而多维的 H-J 方程与弱守恒律方程组等价 (见 [2,4,5]). 通常确定 H-J 方程的某一弱解, 需要额外增加一些条件. 比较常见的具有物理意义的解是粘性极限解 (简称粘性解), 是通过粘性消去法得到的. 由于在一维情形下, H-J 方程与守恒律方程有着等价关系, Osher 和 Shu<sup>[6]</sup> 借用守恒律方程的数值方法推导出 H-J 方程的 ENO 格式, 而 Corrias, Falcone 和 Natalini<sup>[7]</sup> 反过来利用 H-J 方程推导出守恒律方程的差分格式. H-J 方程的数值方法主要分为: 传统的有限差分方法, 其文献相对多一些 (见 [4,6,8]), 另外还有有限体积法<sup>[5]</sup>, 松弛方法<sup>[9]</sup>. 用有限元方法求解 H-J 方程的文献较少, 尤其有关高次有限元方法的文献还未见到. 而有限元方法有许多重要的优点, 例如容易处理复杂的边界, 容易对计算区域进行加密. 我们的思想是将高次元用于求解 H-J 方程, 并借助守恒律方程已有的结果分析格式的性质.

## 2 有限元方法

我们考虑一维 H-J 方程

本文 2000 年 4 月 6 日收到. 2001 年 3 月 4 日收到修改稿.

\* 国家自然科学基金 (19771012 号) 资助项目.

$$\begin{cases} v_t + f(v_x) = 0, & x \in R, t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

其等价的一维双曲守恒律的初值问题为:

$$\begin{cases} u_t + f_x(u) = 0, & x \in R, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = (v_0(x))_x. \end{cases} \quad (2.2)$$

等价关系为:  $u = v_x$  以及  $v(x) = c + \int_0^x u(s) ds$ . 这里  $v_0(x) \in W^{1,\infty}$ , 且  $(v_0(x))_x = u_0(x) \in BV(R) \cap L^1(R)$ ,  $BV(R)$  表示有界变差函数空间,  $f(u)$  为 Lipschitz 连续的 Hamilton 函数.

对于问题 (2.1), 我们利用二次元来求解.

设  $\Gamma$  是  $R$  的一种网格剖分, 单元  $I_j \in \Gamma$ ,  $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ . 令  $h_j = x_{j+1} - x_j$ ,  $x_{j+\frac{1}{2}} = x_j + \frac{1}{2}h_j$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

## 2.1 二次元方法

$w(x)$  在  $I_j$  上二阶 Newton 插值函数可表示为:

$$I_h w(x) = w_j + \bar{w}[x_j, x_{j+1}](x - x_j) + \bar{w}[x_j, x_{j+\frac{1}{2}}, x_{j+1}](x - x_j)(x - x_{j+1}).$$

这里  $\bar{w}[y_1, y_2, \dots, y_k]$  表示  $w(x)$  关于点  $y_1, y_2, \dots, y_k$  的  $k$  阶差商, 可以将  $I_h w(x)$  写成等价形式:

$$I_h w(x) = w_j + \frac{(x - x_j)}{h_j}(w_{j+1} - w_j) + \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2} S_j,$$

其中  $w_j = w(x_j)$ ,  $w_{j+\frac{1}{2}} = w(x_{j+\frac{1}{2}})$ ,  $S_j = 4(w_{j+1} - 2w_{j+\frac{1}{2}} + w_j)/h_j^2$ ,  $S_j h_j \approx w''(x_{j+\frac{1}{2}})h_j$ .

如果分别取基函数为:

$$\begin{aligned} \varphi_j(x) &= \begin{cases} 1 + \frac{x - x_j}{h_j - 1}, & x \in I_{j-1}, \\ 1 - \frac{x - x_j}{h_j}, & x \in I_j, \\ 0, & x \notin I_{j-1} \cup I_j; \end{cases} \\ \psi_j(x) &= \begin{cases} \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{2}, & x \in I_j, \\ 0, & x \notin I_j, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

这里  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . 记插值函数空间  $V_h = \text{Span} \{ \varphi_j(x), \psi_j(x) \}_{-\infty}^{+\infty} \subset H^1$ , 则 (2.1) 的近似解为:

$$v_h(t, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} [v_j(t)\varphi_j(x) + S_j(t)\psi_j(x)].$$

实际上, 上式右边第一项为线性插值部分, 第二项为修正部分. 于是方程 (2.1) 的半离散二次有限元方法为: 求  $v_h \in V_h$ , 使得对任意的  $w(x) \in V_h$ , 下式成立:

$$\frac{d}{dt}(v_h(t, x), w) + (f(v_{h,x}), w) = 0,$$

这里  $v_{h,x}$  表示  $v_h(t,x)$  对  $x$  的导数. 在上式中分别选取  $w = \varphi_j(x)$ ,  $w = \psi_j(x)$  并对线性部分采用质量集中法得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(h_{j-1} + h_j) \frac{d}{dt} v_j(t) - \frac{1}{24} \frac{d}{dt} (h_{j-1}^3 S_{j-1}(t) + h_j^3 S_j(t)) \\ & + \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(v_{h,x}) \varphi_j(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (2.4a)$$

$$\frac{h_j^5}{120} \frac{d}{dt} S_j(t) - \frac{h_j^3}{24} \frac{d}{dt} (v_j(t) + v_{j+1}(t)) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(v_{h,x}) \psi_j(x) dx = 0. \quad (2.4b)$$

下面为讨论方便起见, 取等距网格剖分, 即  $h_j \equiv h$ . 并令  $D_+ v_j = (v_{j+1} - v_j)/h$ ,  $D_- D_+ v_j = (D_+ v_j - D_+ v_{j-1})/h$ . 由于对式 (2.4a) 采用了质量集中方法, 故可对式 (2.4a) 中的积分项采用梯形求积法则. 注意到  $f(v_{h,x})$  在单元节点处可能出现间断, 我们对其进行适当的修正以防止解出现非物理振荡.

$$\begin{aligned} & \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(v_{h,x}) \varphi_j(x) dx - \frac{h^3}{24} \frac{d}{dt} (S_{j-1}(t) + S_j(t)) \\ & \approx \frac{1}{2} h \left[ f\left(D_+ v_j(t) - \frac{S_j(t)}{2} h\right) + f\left(D_+ v_{j-1}(t) + \frac{S_{j-1}(t)}{2} h\right) \right] - \frac{h^3}{24} \frac{d}{dt} (S_{j-1}(t) + S_j(t)) \\ & \approx h H\left(D_+ v_j(t) - \frac{S_j(t)}{2} h, D_+ v_{j-1}(t) + \frac{S_{j-1}(t)}{2} h\right). \end{aligned}$$

这里数值 Hamilton 函数  $H$  满足单调性和相容性, 即  $H(a,b)$  对分量  $a$  不减, 对分量  $b$  不减; 且  $H(a,a) = f(a)$ .  $H$  的具体取法将在下一节中给出. 下面为了表达方便, 在不引起混淆的情况下略去变量  $t$  的书写. 考虑到 (2.4b) 式中的  $S_j$  在光滑区域为  $v''(x_j)$  的近似值, 故对其积分项采用更高阶的求积公式, 例如 Simpson 公式. 从而可得问题 (2.1) 的半离散二次有限元格式为:

$$\frac{d}{dt} v_j + H\left(D_+ v_j - \frac{S_j}{2} h, D_+ v_{j-1} + \frac{S_{j-1}}{2} h\right) = 0, \quad (2.5a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} S_j + \frac{4}{h^2} \left[ H\left(D_+ v_j - \frac{S_j}{2} h, D_+ v_{j-1} + \frac{S_{j-1}}{2} h\right) \right. \\ & \left. + H\left(D_+ v_{j+1} - \frac{S_{j+1}}{2} h, D_+ v_j + \frac{S_j}{2} h\right) - 2f(D_+ v_j) \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.5b)$$

取基函数 (2.3) 的便利之处在于: 对任意的  $j$ , 均有  $\psi'_j(x_{j+\frac{1}{2}}) = 0$  成立, 从而有  $v_{h,x}(x_{j+\frac{1}{2}}) = (v_{j+1} - v_j)/h$ , 即  $v_{h,x}(x_{j+\frac{1}{2}})$  的值与  $S_j$  无关. 因此我们可以利用关系  $u_{j+\frac{1}{2}} = v_{h,x}(x_{j+\frac{1}{2}})$  来求解守恒律方程的数值解: 反过来, 也可借助守恒律方程的数值解的性质来分析 H-J 方程数值解的性质.

## 2.2 守恒律方程的数值格式

常微分方程组 (2.5) 为 Hamilton-Jacobi 方程的二阶精度的半离散格式, 可采用二阶 TVD Runge-Kutta<sup>[10]</sup> 方法求解, 由于二阶 TVD Runge-Kutta 是二步 Euler 向前差分方法, 若格式 (2.5) 对于 Euler 向前差分方法是 TVD 型的, 则对于二阶 TVD Runge-Kutta 方法也满足 TVD 性质. 这里 TVD 性质是指守恒律方程的数值解或 H-J 方程的数值解的一阶差商的变差不增. 下面仅给出了 (2.5a) 式 Euler 向前差分的离散结果, 其余方程

的离散可类似求得.

$$v_j^{n+1} - v_j^n + \Delta t H\left(D_+ v_j^n - \frac{S_j^n}{2} h, D_+ v_{j-1}^n + \frac{S_{j-1}^n}{2} h\right) = 0. \quad (2.6)$$

在求解出  $v$  后, 如果令

$$u_{j+\frac{1}{2}}(t) = \frac{v_{j+1}(t) - v_j(t)}{h}, \quad (2.7)$$

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h}, \quad (2.8)$$

则可得守恒律方程 (2.2) 的数值格式, 格式 (2.5)–(2.7) 类似于二阶精度的广义 MUSCL 格式<sup>[11]</sup>.

### 2.3 有限元格式的性质

格式 (2.5) 中的  $H$  为单调数值 Hamiltonian, 可任选下列之一.

令  $I = [\min(a, b), \max(a, b)]$ ,

(1) Engquist-Osher 型

$$H(a, b) = \int_0^a \min(f'(s), 0) ds + \int_0^b \max(f'(s), 0) ds + f(0).$$

(2) Lax-Friedrichs 型

$$H(a, b) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - \theta(a - b)],$$

$\theta$  为  $|f'(u)|$  在区间  $[\inf u_0(x), \sup u_0(x)]$  的最大值.

(3) 局部 Lax-Friedrichs 型

$$H(a, b) = \frac{1}{2} [f(a) + f(b) - \beta(a - b)], \quad \beta = \max_{u \in I} |f'(u)|.$$

(4) Godunov 型

$$H(a, b) = \begin{cases} \max_{u \in I} f(u), & \text{当 } a \leq b \text{ 时;} \\ \min_{u \in I} f(u), & \text{当 } a > b \text{ 时.} \end{cases}$$

令  $\lambda = \Delta t/h$ ,  $H_1, H_2$  分别表示  $H$  对第一、第二个分量的 Lipschitz 系数. 关于二次元格式, 我们有下列结论:

**定理 1** (1) 如果

$$-1 \leq \frac{S_j - S_{j-1}}{2D_- D_+ v_j} \leq 1, \quad (2.9)$$

则 H-J 方程的半离散格式 (2.5) 满足 TVD 性质, 即  $\frac{d}{dt} TV(D_+ v_j(t)) \leq 0$ .

(2) 如果

$$-1 \leq \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{2D_- D_+ v_j^n} \leq 1 \quad (2.10)$$

且满足 CFL 条件, 即  $\lambda(H_2 - H_1)_{j+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$ ,  $\forall j$ , 则格式 (2.5), (2.6) 满足  $TV(D_+ v_j^{n+1}) \leq TV(D_+ v_j^n)$ .

证 我们仅证明结论 (2). 结论 (1) 证明类似, 从略.

由计算可得:

$$\begin{aligned} D_+v_j^{n+1} &= D_+v_j^n - \lambda \left[ H \left( D_+v_{j+1}^n - \frac{S_{j+1}^n}{2}h, D_+v_j + \frac{S_j^n}{2}h \right) \right. \\ &\quad \left. - H \left( D_+v_j^n - \frac{S_j^n}{2}h, D_+v_{j-1}^n + \frac{S_{j-1}^n}{2}h \right) \right] \\ &= D_+v_j^n + \lambda \left[ C_{j+\frac{1}{2}}(D_+v_{j+1}^n - D_+v_j^n) - D_{j-\frac{1}{2}}(D_+v_j^n - D_+v_{j-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} C_{j+\frac{1}{2}} &= -(H_1)_{j+\frac{1}{2}} \left[ 1 - \frac{(S_{j+1}^n - S_j^n)h}{2(D_+v_{j+1}^n - D_+v_j^n)} \right], \\ D_{j-\frac{1}{2}} &= (H_2)_{j-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{(S_j^n - S_{j-1}^n)h}{2(D_+v_j^n - D_+v_{j-1}^n)} \right], \\ (H_1)_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{H(D_+v_{j+1}^n - \frac{S_{j+1}^n}{2}h, D_+v_j + \frac{S_j^n}{2}h) - H(D_+v_j^n - \frac{S_j^n}{2}h, D_+v_j + \frac{S_j^n}{2}h)}{D_+v_{j+1}^n - D_+v_j^n - \frac{1}{2}(S_{j+1}^n - S_j^n)h}, \\ (H_2)_{j-\frac{1}{2}} &= \frac{H(D_+v_j^n - \frac{S_j^n}{2}h, D_+v_j + \frac{S_j^n}{2}h) - H(D_+v_j^n - \frac{S_j^n}{2}h, D_+v_{j-1}^n + \frac{S_{j-1}^n}{2}h)}{D_+v_j^n - D_+v_{j-1}^n + \frac{1}{2}(S_j^n - S_{j-1}^n)h}. \end{aligned}$$

由条件 (2.10) 以及  $H$  的单调性知  $C_{j+\frac{1}{2}} \geq 0$ ,  $D_{j-\frac{1}{2}} \geq 0$ , 又由条件  $\lambda(H_2 - H_1)_{j+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$  知  $\lambda(C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}}) \leq 1$ . 因此, 我们可得下面的结论:

$$\begin{aligned} TV(D_+v_j^{n+1}) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |D_+v_{j+1}^{n+1} - D_+v_j^{n+1}| \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \left[ 1 - \lambda(C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}}) \right] (D_+v_{j+1}^n - D_+v_j^n) + \lambda C_{j+\frac{3}{2}}(D_+v_{j+2}^n - D_+v_{j+1}^n) \right. \\ &\quad \left. + \lambda D_{j-\frac{1}{2}}(D_+v_j^n - D_+v_{j-1}^n) \right| \\ &\leq \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 - \lambda(C_{j+\frac{1}{2}} + D_{j+\frac{1}{2}}) \right] |D_+v_{j+1}^n - D_+v_j^n| + \lambda C_{j+\frac{3}{2}} |D_+v_{j+2}^n - D_+v_{j+1}^n| \\ &\quad + \lambda D_{j-\frac{1}{2}} |D_+v_j^n - D_+v_{j-1}^n| \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} |D_+v_{j+1}^n - D_+v_j^n| = TV(D_+v_j^n). \end{aligned}$$

为了使格式满足条件 (2.9), (2.10) 以及避免数值解出现振荡, 我们使用  $\min \bmod$  函数对  $S_j, S_j^n$  加以限制. 令:

$$B_j = \min \bmod (S_j, D_-D_+v_j, D_-D_+v_{j+1}), \quad B_j^n = \min \bmod (S_j^n, D_-D_+v_j^n, D_-D_+v_{j+1}^n),$$

其中  $\min \bmod$  限制器定义如下:

$$\min \bmod (s_1, s_2, s_3) = \begin{cases} \text{sign}(s_1) \min (|s_1|, |s_2|, |s_3|), & \text{若 } s_1, s_2, s_3 \text{ 的符号相同;} \\ 0, & \text{若 } s_1, s_2, s_3 \text{ 的符号不同;} \end{cases}$$

并在格式 (2.5), (2.6) 的  $H$  中用  $B_j$ 、 $B_j^n$  分别代替  $S_j$ ,  $S_j^n$ . 由 min mod 限制器的定义, 我们得

$$-1 \leq \frac{B_j - B_{j-1}}{2D_- D_+ v_j} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{B_j^n - B_{j-1}^n}{2D_- D_+ v_j^n} \leq 1,$$

即使用 minmod 限制器的格式 (2.5), (2.6) 分别满足条件 (2.9), (2.10), 从而定理 1 的结论成立. 当利用格式 (2.5) 或者 (2.5), (2.6) 求出方程 (2.1) 的数值解后, 进一步利用关系 (2.7), (2.8) 分别计算  $u_{j+\frac{1}{2}}(t)$ ,  $u_{j+\frac{1}{2}}^n$ . 由定理 1 及关系 (2.7), (2.8) 可得守恒律方程 (2.2) 的数值解具有 TVD 性质, 即  $\frac{d}{dt} TV(u_{j+\frac{1}{2}}(t)) \leq 0$ ,  $TV(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \leq TV(u_{j+\frac{1}{2}}^n)$ , 故守恒律方程 (2.2) 的数值解收敛于其弱解.

**评注** 实际上, 定理 1 中的  $\lambda \max_{j \in \mathbb{Z}} (H_2 - H_1)_{j+\frac{1}{2}} \approx \lambda \max |f'(u)|$ , 故仍称为 CFL 条件. 另外由于使用了 minmod 限制器, 将会导致格式 (2.5) 在拐点处的精度退化为一阶.

如果  $f$  为凸函数, 在更强的限制下, 对于半离散的格式我们有下列收敛性定理. 令

$$\hat{u}_j = \frac{\int_{D_+ v_j}^{D_+ v_{j+1}} s f'(s) ds}{f(D_+ v_{j+1}) - f(D_+ v_j)}.$$

**定理 2** 如果 (1) 条件 (2.9) 成立;

(2) 对于  $D_+ v_j > D_+ v_{j+1}$  的情况, 下列条件成立:

$$\begin{cases} S_j h \geq 2(\hat{u}_j - D_+ v_j), \text{ 且 } S_{j+1} h \geq 2(D_+ v_{j+1} - \hat{u}_j), & \text{当 } \hat{u}_j \in [D_+ v_{j+1}, D_+ v_j] \text{ 时;} \\ S_{j+1} = S_j = 0, & \text{当 } \hat{u}_j \notin [D_+ v_{j+1}, D_+ v_j] \text{ 时;} \end{cases}$$

则格式 (2.5) 的数值解收敛于 H-J 方程 (2.1) 的粘性解.

证 类似于 [11] 的定理 3.1 的证明, 可得下列结论, 我们略去了重复性的证明.

当  $h \rightarrow 0$  时, 格式 (2.5)–(2.7) 的数值解  $u_h(x, t)$  在  $L^1$  范数意义下收敛于守恒律方程 (2.2) 熵解  $u(x, t)$ , 即

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t) - u_h(x, t)| dx = 0,$$

其中数值解  $u_h(x, t)$  的定义为:

当  $x_{j-1} \leq x < x_j$  时,  $u_h(x, t) = u_{j-\frac{1}{2}}(t)$ ,  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

进一步, 由关系 (2.7) 得:

$$v_j(t) = \sum_{k=-\infty}^j u_{k-\frac{1}{2}}(t) h.$$

由于守恒律方程 (2.2) 的熵解  $u(x, t)$  对应于 H-J 方程 (2.1) 的粘性解  $v(x, t)$ , 即  $v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(x, t) dx$ , 故对固定的  $x_0$ , 当  $h \rightarrow 0$  时, 且  $x_j \rightarrow x_0$ , 下列结论成立

$$\begin{aligned} & |v(x_0, t) - v_j(t)| = \left| \int_{-\infty}^{x_0} u(x, t) dx - \sum_{k=-\infty}^j u_{k-\frac{1}{2}} h \right| \\ & \leq \left| \int_{-\infty}^{x_j} u(x, t) dx - \sum_{k=-\infty}^j u_{k-\frac{1}{2}} h \right| + \left| \int_{x_j}^{x_0} u(x, t) dx \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

### 3 数值实例及结论

本文采用了几个模型问题进行试算. 具体计算中, 在例 1, 2 中我们使用了格式 (2.5) 和 2 阶 TVD Runge-Kutta 方法<sup>[10]</sup>,  $H$  均取 Lax-Friedrichs 型. 从计算结果来看, 这种方法不仅在光滑区域有比较高的精度, 而且对奇点 (导数的间断处) 的分辨能力比较好. 在所有的图形中, 实线表示精确解, “+” 表示格式 (2.5) 的数值解, “ $\nabla$ ” 表示一阶局部 Lax-Friedrichs 格式 (简称 L-F 格式) 的数值解<sup>[6]</sup>.

**例 1** 计算具有凸 Hamilton 函数的 H-J 方程的周期初值问题

$$\begin{cases} v_t + \frac{(v_x + 1)^2}{2} = 0, & -1 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = -\cos \pi x. \end{cases} \quad (3.1)$$

当  $t \geq 1.5/\pi^2$  时, 问题 (3.1) 的解的导数会出现间断. 我们可以通过下面表格来考察二次有限元方法 (2.5) 的精度, 误差分析表明格式 (2.5) 具有二阶精度. 下面表格中的单元总数是在区间  $[-1, 1]$  上取得的.

表 误差分析

格式误差 单元总数	一阶 L-F 格式	有限元格式 (2.5)	一阶 L-F 格式	有限元格式 (2.5)
	( $L^1$ 误差)	( $L^1$ 误差)	( $L^\infty$ 误差)	( $L^\infty$ 误差)
20	$5.09 \times 10^{-2}$	$1.46 \times 10^{-3}$	$1.18 \times 10^{-1}$	$3.35 \times 10^{-3}$
50	$2.03 \times 10^{-2}$	$1.58 \times 10^{-4}$	$4.75 \times 10^{-2}$	$6.76 \times 10^{-4}$
80	$4.33 \times 10^{-3}$	$6.92 \times 10^{-5}$	$3.23 \times 10^{-2}$	$2.40 \times 10^{-4}$

上面的表格是  $t = 0.5/\pi^2$  的结果. 下面图 1, 2 分别给出了问题 (3.1) 在  $t = 0.5/\pi^2$   $t = 1.5/\pi^2$  时的精确解, 有限元数值解以及一阶 L-F 格式的数值解的比较.

**例 2** 计算具有非凸 Hamilton 函数的 H-J 方程的周期初值问题.

$$\begin{cases} v_t - \cos(v_x + 1) = 0, & -1 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = -\cos \pi x. \end{cases} \quad (3.2)$$

图 3(a), 3(b) 分别给出了问题 (3.2) 在  $t = 0.5/\pi^2$ ,  $t = 1.5/\pi^2$  时数值解, 前者是间断尚未出现之时的解的图形, 后者是间断已形成之时解的图形.

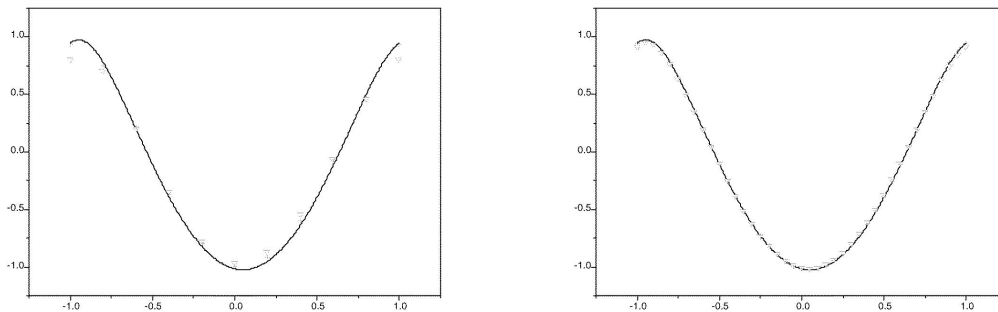


图 1 (a) 方程 (3.1) 的解,  $t = 0.5/\pi^2$ ,  $h = 0.2$  图 1 (b) 方程 (3.1) 的解,  $t = 1.5/\pi^2$ ,  $h = 0.05$

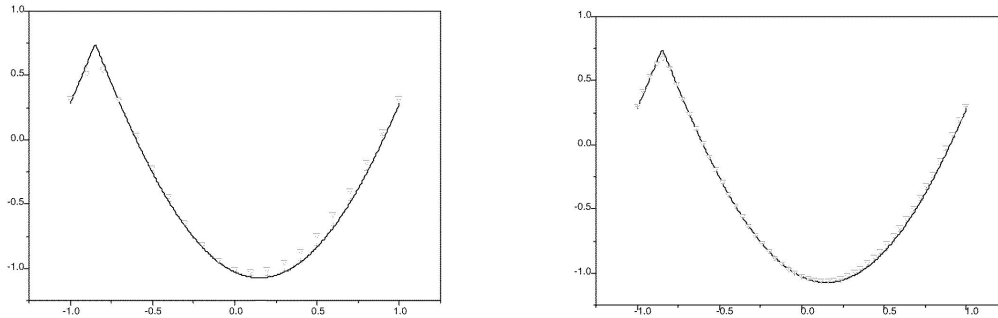


图 2 (a) 方程 (3.1) 的解,  $t = 0.5/\pi^2$ ,  $h = 0.1$  图 2 (b) 方程 (3.1) 的解,  $t = 1.5/\pi^2$ ,  $h = 0.04$

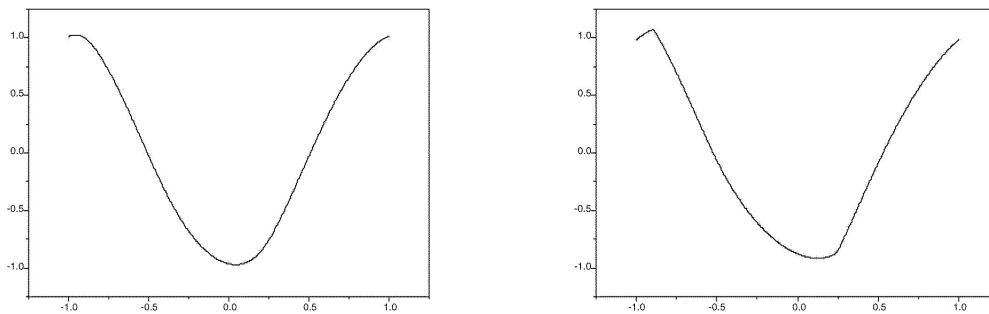


图 3 (a) 方程 (3.2) 的解,  $t = 0.5/\pi^2$ ,  $h = 0.1$  图 3 (b) 方程 (3.2) 的解,  $t = 1.5/\pi^2$ ,  $h = 0.04$

图 3 表明有限元格式 (2.5) 不仅具有较高的精度, 而且对具有非凸 Hamilton 函数的问题也有很好的稳定性和收敛性.

### 参 考 文 献

- 1 Evans L C, Spruck J. Motion of Level Set via Mean Curvature I. *J. Diff. Geom.*, 1991, 33: 635–681
- 2 Lions P L. Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. London: Pitman, 1982
- 3 Sussman M, Fatemi E. An efficient, Interface-preserving Level Set Redistancing Algorithm and Its Application to Interfacial Incompressible Fluid Flow. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1999, 20: 1165–1191
- 4 Crandall M G, Lions P L. Two Approximations of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. *Math. Comp.*, 1984, 43: 1–19
- 5 Lafon F, Osher S. High Order Two Dimensional Nonoscillatory Methods for Solving Hamilton-Jacobi Scalar Equations. *J. Comput. Phys.*, 1996, 123: 235–253
- 6 Osher S, Shu C-W. High-order Essentially Non-oscillatory Schemes for Hamilton-Jacobi Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1991, 28: 907–922
- 7 Corrias L, Falcone M, Natalini R. Numerical Schemes for Conservation Laws via Hamilton-Jacobi Equations. *Math. Comp.*, 1995, 64: 555–580
- 8 Lions P L, Souganidis P E. Convergence of MUSCL and Filtered Schemes for Scalar Conservation Laws and Hamilton-Jacobi Equations. *Numer. Math.*, 1995, 69: 441–470



- 9 Jin S, Xin Z. Numerical Passage from Systems of Conservation Laws to Hamilton-Jacobi Equations and a Relaxation Schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1998, 35: 2385–2404
- 10 Shu C-W, Osher S. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-capturing Schemes. *J. Comput. Phys.*, 1988, 77: 439–471
- 11 Osher S. Convergence of Generalized MUSCL Schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1985, 22: 947–961

## FINITE ELEMENT METHODS FOR HAMILTON-JACOBI EQUATIONS

LI XIANGGUI

(*Department of Mathematics, University of Petroleum, Dongying 257062*)

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088*)

CHEN GUANGNAN      YU XIJUN

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088*)

**Abstract** In this paper, numerical schemes are presented for Hamilton-Jacobi equations by using Galerkin finite element with second order. These schemes belong to TVD type. If the semi-discrete scheme among them is given more limitations, its numerical solution converges to the viscosity solution of Hamilton-Jacobi equation. Numerical tests are given to illustrate these schemes with high resolution for discontinuities of derivatives.

**Key words** Galerkin finite element, Hamilton-Jacobi equation, conservation laws