第 25 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 25 No. 1
2002 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2002

研究简报

强对称的自正交对角拉丁方

杜北梁　　曹海涛

(苏州大学数学系, 苏州 215006)

1 引言

一个 n 阶拉丁方是含 n 个相异元素的集合 N 上的一个 n 阶方阵, 其每一行和每一列都是 N 的一个置换. n 阶拉丁方的一条截态是位于不同行不同列的 n 个位置使得其中的 n 个元素两两相异. n 阶对角拉丁方是一个 n 阶拉丁方, 其主对角线 (位置 $(i,i):1\le i\le n$) 与反对角线 (位置 $(i,n+1-i):1\le i\le n$) 均为截态.

两个 n 阶拉丁方 A 和 B 称为正交的 (简记作 $A\perp B$), 如果把它们迭合在一起时, 拉丁方 A 的每一个记号与拉丁方 B 的每一个记号相遇一次且仅相遇一次. 如果一个 n 阶拉丁方 L 和它自己的转置正交, 则称 L 为一个自正交的拉丁方, 简记为 SOLS(n).

n 阶自正交对角拉丁方的存在性已经被许多数学工作者研究过. Danhof, Phillips 和 Wallis 在 [1] 中研究了一类特殊的自正交对角拉丁方 — 强对称的自正交对角拉丁方. 一个 n 阶自正交对角拉丁方称为强对称的 (简记作 SSSODLS(n)), 如果对任意 $i,j\in N$ 有 $A(i,j)+A(n-1-i,n-1-j)=n-1$, 这里 $A(i,j)$ 表示位置 (i,j) 的元素.

在 [1] 中, Danhof 等给出了 SSSODLS(n) 的一些小设计的构造, 他们的结果如下.

定理 1.1 (1) 当 $n\in\{4,5,7,8,12\}$ 时, 存在 SSSODLS(n);

(2) 当 $n\in\{2,3,6,10\}$ 时, 不存在 SSSODLS(n).

本文将建立强对称的自正交对角拉丁方的一些直接和递推构造方法, 并运用它们改进定理 1.1 的结果. 我们证明: 对任意的正整数 n, $n\equiv 0,1,3 \pmod 4$ 且 $n\ne 3,15$, 存在 n 阶强对称的自正交对角拉丁方 SSSODLS(n). 对 $n\equiv 2 \pmod 4$ 的情况, 只需构造一个该类的设计就可以基本上解决这类设计的存在性.

2 某些构造方法

在这一节中, 我们将给出 SSSODLS(n) 的一些构造方法. 其中包括一个直接构造方法和一些积构造的方法. 我们首先给出一个直接构造方法.

设 q 为奇素数幂, $GF(q)=\{x_0,x_1,\cdots,x_{q-1}\}$, 其中 $x_0=0$, $x_i+x_{q-1-i}=q-1$, $1\le i\le q-1$. 设 $A=(a_{i,j})$, 其中 $a_{i,j}=\lambda x_i+(1-\lambda)x_j$, $\lambda\in GF(q)$. 当 $\lambda\ne 0,1$ 时易证 A 是一个拉丁方. 设 A 的转置 $B=(b_{i,j})$, 则 $b_{i,j}=a_{j,i}=\lambda x_j+(1-\lambda)x_i$, $\lambda\in GF(q)$. 注意到 $a_{i,j}+a_{q-1-i,q-1-j}=\lambda(x_i+x_{q-1-i})+(1-\lambda)(x_j+x_{q-1-j})=q-1$. 如果 $\lambda\ne 0,1$ 并且 $\begin{vmatrix}\lambda & 1-\lambda\\ 1-\lambda & \lambda\end{vmatrix}\ne 0$, 则不难验证 A 是一个强对称的自正交对角拉丁方. 从而我们有下述

本文 2001 年 12 月 20 日收到. 2002 年 1 月 21 日收到修改稿.

引理.

引理 2.1 设 q 是奇素数幂, $q \geq 5$, 则存在 SSSODLS(q).

下面我们给出一些递推构造方法. 首先来看一个积构造, 它的证明是显而易见的.

引理 2.2 如果存在 SSSODLS(m) 和 SSSODLS(n), 则存在 SSSODLS(mn).

但事实上, 我们可以减弱上述这个积构造的条件从而得到一些新的构造. 以下将给出这个积构造的一些推广形式. 我们先将条件中的两个 SSSODLS 中的一个减弱为 SOLS. 设 A 是一个 SOLS, A^t 为它的转置. 将 A 按照顺时针方向旋转 90 度和 180 度, 记得到的拉丁方为 $A^\wedge$ 和 $\overline{A}$, 则不难证明: $A \perp A^t$, $\overline{A} \perp (\overline{A})^t$, $A^\wedge \perp \left((\overline{A})^\wedge\right)^t$, $(\overline{A})^\wedge \perp (A^\wedge)^t$. 假设 n 是偶数, B 是 n 元集 N 上的 SSSODLS(n), A 是 m 元集 M 上的 SOLS(m), 我们按照下述方法来构造 $N \times M$ 上的拉丁方 L. 从拉丁方 B 出发, 用 m 行 m 列的表代替每一个位置 (i,j) 上的元素, 这个表中的每一个位置上元素都有两个分量, 其中第一个分量为 B 中的元素 $b_{i,j}$. 下面我们给出这个表的每一个位置上元素的第二个分量的取法. 如果该位置位于反对角线的上方, 则该表的第二个分量取为 A; 如果该位置位于反对角线的下方, 则该表的第二个分量取为 $(\overline{A})_{m-1}$, 其中 $(\overline{A})_{m-1}$ 为将 $\overline{A}$ 的元素 a 换为 $m-1-a$ 而得到的拉丁方; 如果该位置位于反对角线上的上半部分, 则该表的第二个分量取为 $(\overline{A})^\wedge$; 如果该位置位于反对角线上的下半部分, 则该表的第二个分量取为 $(A^\wedge)_{m-1}$. 不难验证构造出来的 L 是一个 SSSODLS(mn). 这样我们就得到了下述引理.

引理 2.3 设 n 是偶数, 如果存在 SSSODLS(n) 和 SOLS(m), 则存在 SSSODLS(mn).

进一步地, 我们用不完全的 SOLS 来代替引理 2.3 中的 SOLS. 如果 v 阶 SOLS 在它的右下角包含一个子 SOLS, 将该子方移去即得不完全的 SOLS, 记作 ISOLS(v,n). 需要说明的是这样的子方不一定都要求是存在的. 关于 ISOLS 的完整的定义及存在结果见 [2–4].

令 K 是一个 k 元集合. 在引理 2.3 中的构造中, 将主对角线上方位置填入的 m 行 m 列表 SOLS(m) 换成集合 $M \cup K$ 上的 ISOLS($m+k,k$) D, 其中 K 中的元素没有第一分量; 把主对角线上的 SOLS $(\overline{A})_{m-1}$ 换成 $(\overline{D})_{m-1}$. 在 L 的中间部分再添加 k 个新的行和列, 中央的 $k \times k$ 方阵填入 SSSODLS(k). 最后重新命名 $N \times M$ 中的元素 (x,y) 为 $xm+y$ (当 $x \leq n/2$ 时) 或者 $xm+k+y$ (当 $x > n/2$ 时), K 中元素 a 为 $a+(n/2+1)m$. 则可以验证这样构造出来的拉丁方为 $(N \times M) \cup K$ 上的 SSSODLS($mn+k$). 我们把它叙述在下面这个引理中.

引理 2.4 设 n 为偶数. 如果同时存在 SSSODLS(n), SSSODLS(k), SOLS(m) 和 ISOLS($m+k,k$), 则存在 SSSODLS($mn+k$).

在引理 2.4 中, 如果同时再将 ISOLS($m+h,h$) 应用到反对角线上并将 SSSODLS($k+h$) 填入中央的 $(k+h) \times (k+h)$ 方阵, 可以得到 SSSODLS($mn+k+h$). 为了恰当地放置新的行和列, kh 必须是偶数. 不妨设 k 是偶数. 对中间的新的 $k+h$ 行, 我们将 h 行放在中间, $k/2$ 行放在其上方, 另外 $k/2$ 行放在其下方. 对中间的新的 $k+h$ 列, 我们将 h 列放在中间, $k/2$ 列放在其左边, 另外 $k/2$ 列放在其右边. 这样我们就得到了一个新的构造.

引理 2.5 设 n 和 kh 均为偶数. 如果同时存在 SSSODLS(n), SSSODLS($k+h$), SOLS(m), ISOLS($m+k,k$) 和 ISOLS($m+h,h$), 则存在 SSSODLS($mn+k+h$).

注意到引理 2.3 到 2.5 是引理 2.2 当 n 是偶数时的推广. 对 n 为奇数时, 我们同样可以考虑引理 2.2 的一个推广. 这时, 我们要求 m, k 和 h 中至多只能有一个是奇数, 同时还要求存在一个 SSSODLS($m+k+h$). 具体的构造类似于上面的引理, 我们不再加以叙述.

引理 2.6 设 m, k 和 h 中至多只有一个是奇数且 n 为奇数. 如果同时存在 SSSODLS(n), SSSODLS($m+k+h$), SOLS(m), ISOLS($m+k,k$) 和 ISOLS($m+h,h$), 则存在 SSSODLS ($mn+k+h$).

3 主要结果

在证明我们的主要结果以前，我们先给出 SOLS 和 ISOLS 的一些存在性结果.

引理 3.1[5] 对任意正整数 n, $n \neq 2,3,6$, 存在 SOLS(n).

引理 3.2[2−4] 设 v 和 n 为正整数, $v \neq 6$. 如果 $v \geq 3n+1$, $(v,n) \notin \{(6m+2,2m): m = 1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,16,17,23\}$, 则存在 ISOLS($v,n$).

下面我们运用上一节的构造分四种情况来证明本文的主要结果.

引理 3.3 如果 $n \equiv 0 \pmod 4$, 则存在 SSSODLS(n).

证 令 $n = 4k$. 由定理 1.1 可知存在 SSSODLS(4), 同时由引理 3.1 知：当 $k \neq 2,3,6$ 时存在 SOLS(k). 应用引理 2.3 即得当 $n \neq 8,12,24$ 时存在 SSSODLS(n). 由定理 1.1 知结论对 $n = 8,12$ 也成立. 对剩余的 $n = 24$, 在引理 2.5 中取 $n = 4$, $m = 5$, $k = h = 2$ 即得所需要的设计，其中条件 ISOLS(7,2) 来自引理 3.2.

引理 3.4 如果 $n \equiv 1 \pmod 4$, 则存在 SSSODLS(n).

证 令 $n = 4k+1$. 由定理 1.1 可知存在 SSSODLS(4), 同时由引理 3.1 和 3.2 知：当 $k \neq 1,2,3,5,6$ 时存在 SOLS(k) 和 ISOLS($k+1,1$). 应用引理 2.4 即得当 $n \neq 5,9,13,21,25$ 时存在 SSSODLS(n). 对 $n = 21$, 把它表示为 $21 = 5 \times 4 + 1$. 在引理 2.6 中取 $n = 5$, $m = 4$, $k = 1$, $h = 0$ 即得所需要的设计. 剩余的四个值均为素数幂，由引理 2.1 可得.

引理 3.5 如果 $n \equiv 3 \pmod 4$ 且 $n \neq 3,15$, 则存在 SSSODLS(n).

证 令 $n = 4k+7$. 由定理 1.1 可知存在 SSSODLS(4). 由引理 3.1 和引理 3.2 知：当 $k \geq 15$ 时存在 SOLS(k) 和 ISOLS($k+7,7$). 应用引理 2.4 即得当 $n \geq 67$ 时存在 SSSODLS(n). 由引理 2.2 知结论对 $n = 35,55,63$ 也成立. 对 $n = 39,51$, 把它们表示为 $39 = 7 \times 5 + 2 + 2$ 和 $51 = 7 \times 7 + 2 + 0$ 并运用引理 2.6 即得所需要的设计. 剩余的值由素数幂构造引理 2.1 可得.

引理 3.6 如果存在一个 SSSODLS(r), $r \equiv 2 \pmod 4$, 则对任意正整数 $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \geq 5r + 20$, 存在 SSSODLS(n).

证 因为 SOLS(2) 和 SOLS(6) 均不存在，故可设 $r \geq 10$. 把 n 表示为 $n = 4m+k+h$, 其中 $k = r/2+1$, $h = r/2-1$. 从而 $m \geq r+5$, $m+k \geq 3k+3$. 由定理 1.1 可知存在 SSSODLS(4), 同时由引理 3.1 和 3.2 知：存在 SOLS(m), ISOLS($m+k,k$) 和 ISOLS($m+h,h$). 应用引理 2.4 即得所需要的设计.

综合引理 3.3 到引理 3.6, 我们就得到本文的主要结果.

定理 3.7 (1) 对任意的正整数 n, $n \equiv 0,1,3 \pmod 4$ 且 $n \neq 3,15$, 存在 n 阶强对称的自正交对角拉丁方.

(2) 如果存在一个 SSSODLS(r), $r \equiv 2 \pmod 4$, 则对任意正整数 $n \equiv 2 \pmod 4$ 且 $n \geq 5r + 20$, 存在 SSSODLS(n).

参 考 文 献

1 Danhof K J, Phillips N C K, Wallis W D. On Self-orthogonal Diagonal Latin Squares. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 1990, 8: 3–8

2 Heinrich K, Wu L, Zhu L. Incomplete Self-orthogonal Latin Squares ISOLS($6m+6,2m$) Exist for all m. *Discrete Math.*, 1991, 87: 281–290

3 Heinrich K, Zhu L. Incomplete Self-orthogonal Latin Squares. *J. Austral. Math. Soc.* (Series A), 1987, 42: 365–384

4 Zhu L. Existence of Self-orthogonal Latin Squares ISOLS($6m+2,2m$). *Ars Combin.*, 1995, 39: 65–74

5 Bragton R B, Coppersmith D, Hoffman A J. Self-orthogonal Latin Squares. Teorie Combinatoric, Proc. Rome Conf., 1976, 509–517