第 25 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 25 No. 1
2002 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2002

非等腰梯形映射族 MSS 序列的唯一性 *

张　荣
(重庆大学工商管理学院, 重庆 400044)

王　理
(北京工业大学应用数学系, 北京 100022)

摘　要　本文研究非等腰梯形映射族 MSS 序列的唯一性问题. 我们证明在 $0<e_1,e_2<\{(1+\sqrt{513})^{2/3}+(1+\sqrt{513})^{1/3}-8\}/\{3(1+\sqrt{513})^{1/3}\}$(约为 $0.361103\cdots$) 时, 对非等腰梯形映射族 $\lambda f_{e_1,e_2}(x)$, 给定一个 MSS 序列 A, 存在唯一的 $\lambda\in[0,1]$, 使 $I^{\lambda f_{e_1,e_2}}(\lambda)=A$.

关键词　梯形映射,　MSS 序列, 符号动力学

1　引言

1973 年 N. Metropolis, M.Stein 和 P.Stein[1] 通过对若干单峰映射族的稳定周期轨道所对应的符号序列的研究，惊奇地发现尽管这些单峰映射有着完全不同的分析性质，但符号序列出现的规律却完全一致. 这引起了人们的广泛注意. 现在人们把这些按规律排列的符号序列以他们三人名字命名称为 MSS 序列. 更为重要的是此后 Feigenbaum[2] 对单峰圆顶映射族进行了深入的研究，提出了著名的普适性理论，尤其是关于系统参数的倍周期收敛常数 δ 及另一自相似常数 α 的理论为混沌学的最终创立奠定了基础.

普适性理论可分为构造普适性及度量普适性，前者如 MSS 序列的普适性等，后者如 Feigenbaum 常数 δ 和 α 等. 关于度量普适性的研究可见 [2–7] 等等，取得了丰硕的成果. 关于构造普适性理论中 MSS 序列，甚至包括非周期最大序列的存在性、唯一性的研究应该说始于 CE[8]. [8] 中第一个明确地给出了上述存在性的一个充分判定条件. 此后 BMS[9] 在一定程度上减弱了 Collet 及 Eckmann 的充分条件. 我国学者麦结华 [10] 给出的充分条件是最弱的.

对一般单峰映射族 MSS 序列唯一性的讨论是比较困难的，这方面的成果不多. 最早讨论唯一性的应该是 BMS. 他们对对称梯形映射族证明了其唯一性是在该种映射的构造参数 $0<e<(3\sqrt{17}-11)/4\approx 0.3423\cdots$ 时成立. 此后 LM[11] 用了很长的篇幅对对称梯形映射作了很漂亮的研究，其中彻底证明了唯一性问题.

对于非对称梯形映射族，由于对称性的破坏，情况要复杂得多，唯一性问题的研究可以说还未见到，本文试图在该问题上做一点抛砖引玉的试探. 至于更一般的单峰映射族的情况，上述唯一性问题就更复杂了.

2　符号动力学简介

2.1　单峰映射

如图 1 所示, 单峰映射有一极值点 c, 或唯一一个最大值子区间, 再任取其中一点 c, c 点把 [0,1] 区间分为两部分, 在 c 点的左侧为单调上升, 右侧为单调下降, 且 $f(0)=f(1)=0$.

本文 1999 年 5 月 20 日收到. 2001 年 12 月 24 日收到修改稿.
* 中国博士后科学基金资助项目.

任意给定区间上一点 x_0, 以其为初始值开始迭代，可得到一条 **轨道**

$$x_0, x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots.$$

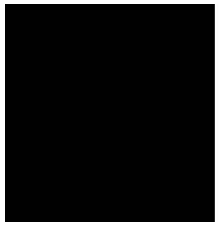

图 1

如果我们不关心 x_i 在区间上的确切位置，只问其落在 c 点的左侧或右侧，分别记下字母 L 或 R；另如果恰好落在 c 点上则记为 C, 并且规定此时终止迭代. 于是可由上述轨道得到一条符号序列 $a_0a_1a_2\cdots$, 其中

$$a_k = \begin{cases} L, & x_k < c, \\ C, & x_k = c, \\ R, & x_k > c. \end{cases}$$

显然符号序列比轨道在描述迭代的方法上看似要粗糙得多. 然而，这种符号序列却更能反映迭代产生的许多动力学行为，并为数学家们广泛采用且形成了符号动力系统的理论.

2.2 符号序列的排序

首先，我们规定 $L < C < R$, 这与区间上数值大小的关系一致. 设 $A = a_0a_1\cdots$, $B = b_0b_1\cdots$ 是两个符号序列，如果 $a_0a_1\cdots a_{i-1} = b_0b_1\cdots b_{i-1}$ 且 $a_0a_1\cdots a_{i-1}$ 含有偶 (奇) 数个 R, 且 $a_i < b_i\,(> b_i)$ 则定义 $A < B$.

类似地可以定义 $A > B$, $A \le B$, $A \ge B$ 等等.

接着我们介绍符号系统中几个非常重要的概念.

若 $A = a_0a_1\cdots a_{n-1}C$, 则称 A 的长度为 $|A| = n+1$. 若 A 为无限长，则记 $|A| = \infty$.

定义 1 记 $\phi^i(A) = a_ia_{i+1}\cdots$, $i \in N$ (A 的长度是有限时, $0 < i < |A|$), 则若 $A \ge \phi^i(A)$ 对一切的 $i < |A|$ 成立，那么 A 就称为最大序列. 特别地，以 C 结尾的最大序列称为 MSS 序列.

设在单位区间 [0,1] 上定义了一个单峰函数 f, 现构成单参数映射族 $\{\lambda f|\lambda \in [0,1]\}$. 本文考虑该族中所有映射 λf, 都从选定的极值点 c 出发，进行迭代产生的轨道所对应的符号序列. 那么对某些 $\lambda \in [0,1]$, λf 的迭代可能产生无限不循环的轨道，从而也产生了与之对应的无限不循环的仅由 LR 构成的符号序列；而另一些 $\lambda \in [0,1]$, λf 的迭代可能产生了周期轨道. 当周期轨道不包含 c 点时，对应的符号序列自然就是由 LR 两个字母构成的有限字节的无限循环的符号序列，

如 $(\mathrm{RLR})^\infty$；而当包含出发点 c 时，则按上述迭代规定，第一次返回 c 时，迭代便终止，此时轨道对应的符号序列便是以 C 结尾的有限 LR 序列. [9] 中严格证明了 MSS 序列 (即以 C 点结尾的最大序列) 当且仅当它是由某个适当的 $\lambda \in [0,1]$, 映射 λf 从 c 点出发的迭代所产生的以 C 结尾的有限 LR 序列.

定义 2 若存在 $n \in N$, 使 $A = (a_0a_1\cdots a_{n-1})^\infty$, 即符号节 $a_0a_1\cdots a_{n-1}$ 的无限重复，则称 A 为周期序列，否则称之为非周期序列 (注意此时不含 MSS 序列).

定义 3 若 A 是周期 (非周期) 的, 且是最大的, 则称 A 为周期 (非周期) 最大序列.

3 非等腰梯形映射族 MSS 序列的唯一性

3.1 基本概念

考虑如下的分段线性函数:

$$f_{e_1,e_2}(x)=\begin{cases} x/e_1, & 0\le x\le e_1,\\ 1, & e_1<x<1-e_2,\\ (1-x)/e_2, & 1-e_2\le x\le 1,\end{cases}$$

其中 $0<e_1,e_2<1,\ e_1+e_2<1,\ x\in[0,1]$, 其图象是图 2 所示梯形，故称 $f_{e_1,e_2}(x)$ 为一个梯形映射．相应的称 $\left\{\lambda f_{e_1,e_2}(x)|\lambda\in[0,1]\right\}$ 为单参数梯形映射族，随着 λ 在 $[0,1]$ 里的不同取值，得到一系列高度不同而上底宽度相同的梯形映射族，见图 2 所示.

图 2

当 $e_1=e_2=e$ 时，即为等腰梯形映射族．为了下面叙述方便，称上面单参数梯形映射族为非等腰梯形映射族.

显然，等腰梯形映射族只是非等腰梯形映射族 $e_1=e_2=e$ 时的特殊情形．以下简记 $f=f_{e_1,e_2}(x)$. 记 λf 的双值逆函数为

$$\begin{cases} f^{-1}_{\lambda,R}(x)=1-e_2x/\lambda,\\ f^{-1}_{\lambda,L}(x)=e_1x/\lambda.\end{cases}$$

对任意符号序列 $P=P_1P_2\cdots P_n,\ P_j\in\{R,L\},\ j=1,2,\cdots,n$, 记

(i) $\rho(P)=\{j|P_j=R\}$,

(ii) $\left|\rho(P)\right|$ 表示集合 $\rho(P)$ 元素的个数,

(iii) $G_\lambda(P,y)=f^{-1}_{\lambda,P_1}\big(f^{-1}_{\lambda,P_2}(\cdots(f^{-1}_{\lambda,p_n}(y))\cdots)\big),\ y\in[e_1,1-e_2]$.

称 $g_P(\lambda)=G_\lambda(P,y)$ 为 P 的逆序列函数.

另外， λ 的旅程 (itinerary) 记为 $I^{\lambda f}(\lambda)$, 它表示以梯形映射 $\lambda f_{e_1,e_2}(x)$ 的最高点为初值进行迭代而产生的符号序列．在等腰梯形情况下，且取 $y=1/2$ 时，则 $I^{\lambda f}(\lambda)$ 为 [8] 上熟知的旅程的定义．本文中， y 的取值是区间 $[e_1,1-e_2]$ 上的任意一点，一旦取定后， y 作为产生符号序列的极值点 c, 即落在 y 点左边的轨道点对应于字母 L, 落在 y 右边的对应于字母 R.

3.2 MSS 序列唯一性的证明

引理 1 对于梯形映射族， $P=RL^{n-1}C,\ n\in N$, 则当 $0<e_1,e_2<1,\ e_1+e_2<1$ 时，存在唯一的 $\lambda\in[0,1]$, 使 $I^{\lambda f}(\lambda)=P$.

证　由 [10], 存在性得证，故下只证唯一性.

由 $g_P(\lambda)=1-e_2e_1^{n-1}y/\lambda^n=\lambda$ 得

$$\lambda^{n+1}-\lambda^n+e_2e_1^{n-1}y=0.$$

记

$$h_n(\lambda)=\lambda^{n+1}-\lambda^n+e_2e_1^{n-1}y,\qquad n=1,2,\cdots.$$

易见

$$h_n(1-e_2)<0,h_n(1)>0,$$

而解方程

$$h_n'(\lambda)=(n+1)\lambda^n-n\lambda^{n-1}=0,$$

知 $\lambda=0$ 和 $\lambda=\frac{n}{n+1}$ 为其仅有的两个极值点. 结合上面的两式知其解唯一.

引理 2 $\min\limits_{k,\alpha}\left\{\sqrt[k]{\frac{\alpha}{k+\alpha}}\right\}=\frac{2}{3}$, 其中 $k\in N,\alpha\geq 2$.

证 首先利用数学归纳法证明

$$\sqrt[k]{\frac{2}{k+2}}\geq\frac{2}{3},\qquad k\geq 2.\tag{1}$$

当 $k=1$ 时, $\frac{2}{k+2}=\frac{2}{3}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{3}$;

当 $k=i$ 时, 假定结论成立, 即 $\frac{2}{i+2}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^i$;

当 $k=i+1$ 时, 由 $\frac{3}{i+3}\geq\frac{2}{i+2}$ 及归纳假设 $\frac{2}{i+2}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^i$ 知 $\frac{3}{i+3}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^i$, 将此式两端同时乘以 2/3, 得 $\frac{2}{i+3}\geq\frac{2}{[(i+1)+2]}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}$, 即 $k=i+1$ 时, (1) 式成立.

综上, 对任意 $k\geq 2$, (1) 式成立.

其次易见

$$\sqrt[k]{\frac{\alpha}{k+\alpha}}\geq\sqrt[k]{\frac{2}{k+2}},\qquad \alpha\geq 2.\tag{2}$$

由 (1), (2) 式, 引理得证.

定理 1 对于给定的非等腰梯形映射族 $\{\lambda f_{e_1,e_2}(x)\mid\lambda\in[0,1]\}$, 符号序列 $P=P_1P_2\cdots P_n$, $P_j\in\{R,L\}$, $j=1,2,\cdots,n$ 的逆序列函数

$$\begin{aligned}G_\lambda(P,y)=&\sum_{j\in\rho(P)}(-1)^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_2^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_1^{j-|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|}/\lambda^{j-1}\\&+(-1)^{|\rho(P)|}e_2^{|\rho(P)|}e_1^{|P|-|\rho(P)|}y/\lambda^{|P|}.\end{aligned}$$

证 下面利用数学归纳法证明.

当 $|P|=1$ 时, 则 P 可能为 R 或 L. 若 $P=R$. 一方面, 此时有 $\rho(P)=\{1\}$, $|\rho(P)|=1$, $|P|=1$, 代入 $G_\lambda(P,y)$ 的表达式, 有 $G_\lambda(P,y)=1-e_2y/\lambda$. 另一方面, 由逆序列函数的定义, $G_\lambda(P,y)=G_\lambda(R,y)=f^{-1}_{\lambda,R}(y)=1-e_2y/\lambda$, 即此时定理成立. 当 $P=L$ 时同样可得. 于是 $|P|=1$ 时, 欲证结论成立.

现假定当 $|P|=|P_1P_2\cdots P_n|=n$ 时,

$$\begin{aligned}G_\lambda(P,y)=&\sum_{j\in\rho(P)}(-1)^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_2^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_1^{j-|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|}/\lambda^{j-1}\\&+(-1)^{|\rho(P)|}e_2^{|\rho(P)|}e_1^{|P|-|\rho(P)|}y/\lambda^{|P|},\end{aligned}$$

那么当 $|P'| = |PP_{n+1}| = |P_1P_2\cdots P_nP_{n+1}| = n+1$ 时,

$$G_\lambda(P', y) = G_\lambda(PP_{n+1}, y) = G_\lambda\big(P, f^{-1}_{\lambda,P_{n+1}}(y)\big). \tag{3}$$

此时又有两种情况， $P_{n+1} = R$ 或 $P_{n+1} = L$. 首先证明 $P_{n+1} = R$ 的情况.

当 $P_{n+1} = R$ 时， $f^{-1}_{\lambda,P_{n+1}}(y) = f^{-1}_{\lambda,R}(y) = 1-(e_2/\lambda)y$, 则 (3) 式右边等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in\rho(P)}(-1)^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_2^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_1^{j-|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|}/\lambda^{j-1}\\
&+(-1)^{|\rho(P)|}e_2^{|\rho(P)|}e_1^{|P|-|\rho(P)|}(1-(e_2/\lambda)y)/\lambda^{|P|}\\
=&\sum_{j\in\rho(P)}(-1)^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_2^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_1^{j-|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|}/\lambda^{j-1}\\
&+(-1)^{|\rho(P)|}e_2^{|\rho(P)|}e_1^{|P|-|\rho(P)|}/\lambda^{|P|}+(-1)^{|\rho(P)|+1}e_2^{|\rho(P)|+1}e_1^{|P|-|\rho(P)|}y/\lambda^{|P|+1}.
\end{aligned}$$

注意到条件 $P_{n+1} = R$, 有 $|\rho(P)|+1 = |\rho(P')|$, 而 $|P|+1 = |P'|$, 所以 $|P|-|\rho(P)| = |P'|-|\rho(P')|$, 故上式化为

$$\begin{aligned}
G_\lambda(P', y) = &\sum_{j\in\rho(P')}(-1)^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_2^{|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|-1}e_1^{j-|\rho(P_1P_2\cdots P_j)|}/\lambda^{j-1}\\
&+(-1)^{|\rho(P')|}e_2^{|\rho(P')|}e_1^{|P'|-|\rho(P')|}y/\lambda^{|P'|},
\end{aligned}$$

$P_{n+1} = L$ 的情况与 $P_{n+1} = R$ 类似可证.

于是得到 $|P'| = n+1$ 时结论亦成立.

综上，定理证毕.

定理 2 对于给定的 $0 < e_1, e_2 < \big\{(1+\sqrt{513})^{2/3}+(1+\sqrt{513})^{1/3}-8\big\}/\{3(1+\sqrt{513})^{1/3}\}$, 若 A 是 MSS 序列，那么存在唯一的 $\lambda\in[0,1]$, 使 $I^{\lambda f}(\lambda) = A$.

证 存在性由 [10] 直接可得. 故以下仅证唯一性.

首先对于任意 $y\in[e_1, 1-e_2]$, 以下三条从定义出发是十分容易检验的:

(a) 当 $y \le \lambda \le 1-e_2$ 时， λ 的旅程是 R^∞.

(b) 当且仅当 $\lambda = y$ 时， $I^{\lambda f}(\lambda) = C$.

(c) 当 $\lambda < y$ 时， $I^{\lambda f}(\lambda) = L^\infty$.

不妨设 $A = a_0a_1a_2\cdots a_{n-1}C$. 由 A 是 MSS 序列及 (a),(b),(c) 这些平凡的情形，我们只需考虑 $\lambda > 1-e_2$ 的情形.

首先，当 $A = RL^{n-1}C$, $n\in N$ 时，由引理 1 直接可得其对应的参数唯一.

其次证明当 A 至少含有两个 R 时，结论成立. 为了书写方便，我们依从小到大的顺序将 $\rho(A)$ 的元素记为 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{|\rho(A)|-1}$. 由 MSS 序列的最大性易知 $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 \ge 3$. 于是

$$A = RL^{\alpha_1-2}R\cdots C, \qquad |A| = n+1.$$

若令 $t = 1/\lambda$, 且注意到上面的约定，则定理 1 中的式子改写为:

$$g_A(\lambda) = 1-e_2e_1^{\alpha_1-2}t^{\alpha_1-1}+e_2^2e_1^{\alpha_2-3}t^{\alpha_2-1}-e_2^3e_1^{\alpha_3-4}t^{\alpha_3-1}+\cdots+(-1)^{|\rho(A)|}e_2^{|\rho(A)|}e_1^{n-|\rho(A)|}t^ny,$$

两边同时对 λ 求导，注意到 $dt=-\frac{1}{\lambda^2}d\lambda$, 得

$$\begin{aligned}g'_A(\lambda)=&\Big(-\frac{1}{\lambda^2}\Big)\big[-(\alpha_1-1)e_2e_1^{\alpha_1-2}t^{\alpha_1-2}+(\alpha_2-1)e_2^2e_1^{\alpha_2-3}t^{\alpha_2-2}\\&-(\alpha_3-1)e_2^3e_1^{\alpha_3-4}t^{\alpha_3-2}+\cdots+(-1)^{|\rho(A)|}ne_2^{|\rho(A)|}e_1^{n-|\rho(A)|}t^{n-1}y\big].\end{aligned}$$

下面证明

1 当 $0<e_1\le e_2\le 0.4$ 时，

$$-(\alpha_i-1)e_2^ie_1^{\alpha_i-1-i}t^{\alpha_i-2}+(\alpha_{i+1}-1)e_2^{i+1}e_1^{\alpha_{i+1}-1-(i+1)}t^{\alpha_{i+1}-2}<0,\qquad i=1,2,\cdots,\quad(4)$$

欲证 (4) 式成立，只需

$$t^{\alpha_{i+1}-\alpha_i}<\frac{\alpha_i-1}{\alpha_{i+1}-1}\frac{1}{e_2e_1^{\alpha_{i+1}-\alpha_i-1}}.$$

由 $e_1\le e_2$, 只需将上式中的 e_1 换为 e_2 后，只要

$$t<\sqrt[\alpha_{i+1}-\alpha_i]{\frac{\alpha_i-1}{\alpha_{i+1}-1}}\frac{1}{e_2},$$

而这只要 t 满足

$$t<min_{k,\alpha}\Big\{\sqrt[k]{\frac{\alpha}{k+\alpha}}\Big\}\frac{1}{e_2},\qquad k\in N,\quad \alpha\ge 2\quad(5)$$

即可.

由 $e_2\le 0.4$, 知 $1-e_2\ge 3e_2/2$, 而 $\lambda>1-e_2$, 所以 $\lambda>3e_2/2$, 即 $1/\lambda<2/(3e_2)$, 亦即 $t<2/(3e_2)=(2/3)(1/e_2)$, 再由引理 2 知 (5) 式成立.

从而，当 $0<e_1\le e_2\le 0.4$ 时， (4) 式成立．于是有

$$|g'_A(\lambda)|\le\Big|\frac{1}{\lambda^2}\big[-(\alpha_1-1)e_2e_1^{\alpha_1-2}t^{\alpha_1-2}\big]\Big|\le\frac{2e_1e_2}{\lambda^3},\qquad 取\ \ \alpha_1=3).$$

要 $\frac{2e_1e_2}{\lambda^3}<1$, 只需 $2e_1e_2<\lambda^3$, 注意到 $\lambda\ge 1-e_2$, 故只需 $2e_1e_2<(1-e_2)^3$, 由 $e_1\le e_2$, 这只需解 $e_2^3-e_2^2+3e_2-1<0$. 容易解出 $0<e_2<\big\{(1+\sqrt{513})^{2/3}+(1+\sqrt{513})^{1/3}-8\big\}/3(1+\sqrt{513})^{1/3}\approx 0.36\cdots$ 即可．从而此时 $d(g_A(\lambda)-\lambda)/d\lambda=g'_A(\lambda)-1<0$, 于是 $g_A(\lambda)-\lambda$ 在 $[1-e_2,1]$ 上单调，故逆序列方程 $g_A(\lambda)=\lambda$ 在 $[1-e_2,1]$ 上至多有一个解.

2 当 $e_2\le e_1\le 0.4$ 时，同上只需证 $2e_1e_2<(1-e_2)^3$, 由 $e_1\ge e_2$, 故只需要 $2e_1e_1<(1-e_1)^3$, 从而只要 $2e_1^2<1-e_1^3-3e_1+3e_1^2$, 亦即 $e_1^3-e_1^2+3e_1-1<0$, 于是同样可得 $0<e_1<\big\{(1+\sqrt{513})^{2/3}+(1+\sqrt{513})^{1/3}-8\big\}/\{3(1+\sqrt{513})^{1/3}\}\approx 0.36\cdots<0.4$.

若记 $\eta=\big\{(1+\sqrt{513})^{2/3}+(1+\sqrt{513})^{1/3}-8\big\}/\{3(1+\sqrt{513})^{1/3}\}$, 则由上述知，当 $0<e_1,e_2<\eta$ 时， $\big|g'_A(\lambda)\big|<1$, 从而 $g_A(\lambda)=\lambda$ 的解在 $[1-e_2,1]$ 上至多有一个.

综上， MSS 序列对应的参数在 $0<e_1,e_2<\eta$ 是存在唯一的，证毕.

4 结束语

本文利用逆序列方程证明了非等腰梯形映射族的 MSS 序列的唯一性在 $0<e_1,e_2<\big\{(1+\sqrt{513})^{2/3}+(1+\sqrt{513})^{1/3}-8\big\}/\{3(1+\sqrt{513})^{1/3}\}\approx 0.36\cdots<0.4$ 时成立．与等腰梯

形映射族相比较，由于非等腰梯形映射族对称性的打破，使得对它的研究变得复杂．本文的研究结果有助于更进一步揭示非等腰梯形映射族的某些性质．

参　考　文　献

1 Metropolis N, Stein M L, Stein P R. On Finite Sets for Transformation of the Unit Interval. *J. Combin Theory*, 1973, 15: 25–44

2 Feigenbaum M J. Quantitive Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *J. Statist. Phys.*, 1978, 19: 25–52; 1979, 21: 669–706

3 Beyer W A, Stein P R. Period Doubling for Trapezoid Function Iteration: Metric Theory. *Adv. Appl. Math.*, 1982, 3: 1–17

4 Beyer W A, Ebanks B R, Qualls C R. Convergence Rates and Convergence-Order Profiles for Sequences. *Acta Appllicandae Mathematicae*, 1990, 20: 267–284

5 Zhang Rong, Wang Li. Two Problems for Monotone Sequences. *Acta Appl. Math.*, 1997, 47: 213–220

6 Wang Li, Karzarinoff N D. A Metric Property of Period Doubling for Nonisosceles Trapezoidal Maps on an Interval. *Adv. in Appl. Math.*, 1987, 8: 208–221

7 Wang Li. Quadratic Convergence in Period Doubling to Chaos for Trapezoid Maps. *J. Math. Anal. Appl.*, 1998, 227: 1–24

8 Collect P, Eckmanne J P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems. Boston: Birkhauser, 1980

9 Beyer W A, Mauldin R D, Stein P R. Shift-maximal Sequences in Function Iteration: Existence, Uniqueness, and Multiplicity. *J. Math. Anal. Appl.*, 1986, 115: 305–362

10 麦结华，单峰函数族中捏制轨道系列的完整性． 数学学报, 1990, 33(3): 323–329
(Mai Jiehua. Integrity of Kneading Sequences on Unimodal Functions. *Acta Mathematica Sinica*, 1990, 33(3): 323–329)

11 Louck J D, Metropolis N. Symbolic Dynamics of Trapezoidal Maps. Reidel-Kluwer, Hingham MA, 1986

UNIQUENESS OF MSS SEQUENCES FOR NONISOSCELES TRAPEZOIDAL MAPS

ZHANG Rong

(*School of Business Administration, Chongqing University, Chongqing* 400044)

WANG Li

(*Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)

Abstract In this paper we study the uniqueness of MSS sequences for a family of one-parameter nonisosceles trapezoidal maps, $\{\lambda f_{e_1,e_2}(x)\}$, defined over an interval [0,1]. We prove that given an MSS sequence A, if $0 < e_1, e_2 < \{(1+\sqrt{513})^{2/3} + (1+\sqrt{513})^{1/3} - 8\}/3(1+\sqrt{513})^{1/3} \approx 0.36109\cdots$, there exists a unique parameter λ such that $I^{\lambda f_{e_1,e_2}(\lambda)} = A$.

Key words Trapezoidal maps, MSS sequence, Symbolic dynamics