第 23 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 23 No. 1
2000 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2000

投影型插值算子的超收敛性质及其应用*

张　铁

(东北大学数学系，沈阳 110006)

本文首先将证明矩形剖分单元上的 Lobatto 点， Gauss 点和拟 Lobatto 点分别是二维投影型插值算子函数，梯度和二阶导数的逼近佳点；然后考虑了二阶椭圆边值问题的有限元近似. 通过建立投影型插值算子各种形式的超收敛基本估计，证明了投影型插值算子的各类逼近佳点分别是有限元解的函数，梯度和二阶导数逼近的超收敛点；并且对 $a_{ij}=1$, $a_i=0$ 情形，证明了有限元解的函数逼近在剖分节点处，一阶导数逼近在两点算术平均意义下及二阶混合导数逼近在 Gauss 节点处均具有强超收敛性，即比整体最优收敛阶高出二阶 (不计 $|\ln h|$ 因子) 的超收敛性. 此外，本文对有限元解的二阶混合导数逼近也导出了整体超收敛性，这是一个值得关注的现象.

1　二维投影型插值算子及其超收敛性

设单元 $e=e_1\times e_2=(x_e-h_e,x_e+h_e)\times(y_e-k_e,y_e+k_e)$, $\{L_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ 和 $\{\widetilde{L}_j(y)\}_{j=0}^{\infty}$ 分别为 $L_2(e_1)$ 和 $L_2(e_2)$ 上规范完备的 Legendre 正交多项式函数系. 记

$$\omega_0(x)=\widetilde{\omega}_0(y)=1,\quad \omega_{j+1}(x)=\int_{x_e-h_e}^{x}L_j(x)\,\mathrm{d}x,\quad \widetilde{\omega}_{j+1}(y)=\int_{y_e-k_e}^{y}L_j(y)\,\mathrm{d}y,\qquad j\geq 0,$$

熟知多项式 $\omega_{k+1}(x)$, $L_k(x)$ 和 $L_k'(x)$ $(k\geq 1)$ 在单元 e_1 上分别有 $k+1$, k 和 $k-1$ 个零点，它们关于单元中点 x_e 是对称分布的. 将这三类零点集合依次记为单元 e_1 的 Lobatto 点集 $N_k^{(0)}=\{g_j^{(0)}\}$, Gauss 点集 $N_k^{(1)}=\{g_j^{(1)}\}$ 和拟 Lobatto 点集 $N_k^{(2)}=\{g_j^{(2)}\}$. 对单元 e_2 上的多项式 $\widetilde{\omega}_{k+1}(y)$, $\widetilde{L}_k(y)$ 和 $\widetilde{L}_k'(y)$ 可有完全类同的结论. 记单元 $e=e_1\times e_2$ 上的 Lobatto 点集，Gauss 点集和拟 Lobatto 点集依次为 $N_k^{(s)}\times\widetilde{N}_k^{(s)}=\{G_{ij}^{(s)}=(g_i^{(s)},\widetilde{g}_j^{(s)})\}$, $s=0,1,2$. 设 $u\in H^2(e)$, 则有 Fourier 展开 [1]

$$u(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{ij}\omega_i(x)\widetilde{\omega}_j(y),\qquad (x,y)\in e,\tag{1}$$

$$\beta_{00}=u(x_e-h_e,\,y_e-k_e),\qquad \beta_{ij}=\int_e u_{xy}L_{i-1}(x)\widetilde{L}_{j-1}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{2}$$

$$\beta_{i0}=\int_{e_1}u_x(x,y_e-k_e)L_{i-1}(x)\,\mathrm{d}x,\quad \beta_{0j}=\int_{e_2}u_y(x_e-h_e,y)\widetilde{L}_{j-1}(y)\,\mathrm{d}y,\quad i,j\geq 1.\tag{3}$$

本文1998 年6 月1日收到. 1999 年4月27日收到修改稿.
* 辽宁省科学技术基金资助项目.

定义双 k 次投影型插值算子 $\pi_k : H^2(e) \to Q_k(e)$,

$$\pi_k u(x,y) = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k}\beta_{ij}\omega_i(x)\widetilde{\omega}_j(y), \qquad (x,y)\in e, \tag{4}$$

则 π_k 关于单元 e 上双 k 次多项式空间 $Q_k(e)$ 唯一可解且对 $k\geq 1$ 满足

$$\pi_k u(x_e \pm h_e,\, y_e \pm k_e) = u(x_e \pm h_e,\, y_e \pm k_e) \tag{5}$$

及通常的插值逼近性质 [1].

定理 1　记导算子 $D_1 = \partial_x$, $D_2 = \partial_y$, $D^l = D_1^{l_1}D_2^{l_2}$, $l=(l_1,l_2)$, $|l| = l_1 + l_2$, $h = \sqrt{h_e^2 + k_e^2}$. 则单元 e 上的 Lobatto 点， Gauss 点和拟 Lobatto 点 $G_{ij}^{(s)} = (g_i^{(s)}, \widetilde{g}_j^{(s)})$, $s = 0,1,2$, 分别是投影型插值算子 π_k 的函数，梯度和二阶导数的超收敛逼近佳点，即

$$\left|D^l(u-\pi_k u)(G_{ij}^{(|l|)})\right| \leq Ch^{k+2-|l|}|u|_{k+2.\infty.e}, \qquad |l| = 0,1,2, \tag{6}$$

其中 $k\geq 1$, 或 $k \geq 2$ 当 $l_1 = 2$ 或 $l_2 = 2$ 时．此外，对于混合偏导数逼近，还成立

$$\left\|D_1D_2(u-\pi_k u)\right\|_{0.\infty.e} \leq Ch^k|u|_{k+2.\infty.e}, \qquad k\geq 1. \tag{7}$$

证　当 $u\in Q_k(e)\bigcup\{x^{k+1}, y^{k+1}\}$ 时， $u_{xy}\in Q_{k-1}(e)$, $u_x \in P_k(e_1)$, $u_y\in P_k(e_2)$, 则从 (1)-(4) 式和 Legendre 多项式的正交性可得

$$u - \pi_k u = \beta_{0,k+1}\widetilde{\omega}_{k+1}(y) + \beta_{k+1,0}\omega_{k+1}(x), \qquad \forall u \in P_{k+1}(e), \tag{8}$$

由此式且利用 Bramble-Hilbert 引理，即可证明定理 1 结论.

设 $\overline{g}_i^{(1)}$ ($\overline{\widetilde{g}}_j^{(1)}$) 为与 $g_i^{(1)}(\widetilde{g}_j^{(1)})$ 关于 $x_e(y_e)$ 对称的 Gauss 点，记算术平均导算子

$$\overline{D}_1u(g_i^{(1)},y) = \frac{1}{2}\left[D_1u(g_i^{(1)},y) + D_1u(\overline{g}_i^{(1)},y)\right], \qquad y\in e_2,$$
$$\overline{D}_2u(x,\widetilde{g}_j^{(1)}) = \frac{1}{2}\left[D_2u(x,\widetilde{g}_j^{(1)}) + D_2u(x,\overline{\widetilde{g}}_j^{(1)})\right], \qquad x\in e_1.$$

定理 2　设 Gauss 点 $(g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(1)})\in N_k^{(1)}\times\widetilde{N}_k^{(1)}$ (或 $(g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(1)})\in N_{k+1}^{(1)}\times\widetilde{N}_{k+1}^{(1)}$, 当 k 为奇数时), Lobatto 点 $(g_i^{(0)},\widetilde{g}_j^{(0)})\in N_k^{(0)}\times\widetilde{N}_k^{(0)}$, 则 π_k 具有强超收敛逼近性质

$$\left|\overline{D}_1(u-\pi_k u)(g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(0)})\right| \leq Ch^{k+2}|u|_{k+3.\infty.e}, \qquad k\geq 1, \tag{9}$$
$$\left|\overline{D}_2(u-\pi_k u)(g_i^{(0)},\widetilde{g}_j^{(1)})\right| \leq Ch^{k+2}|u|_{k+3.\infty.e}, \qquad k\geq 1. \tag{10}$$

此外，在 Gauss 点集 $G_{ij}^{(1)} = (g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(1)})\in N_k^{(1)}\times\widetilde{N}_k^{(1)}$ 上，也成立如下强超收敛逼近性质

$$\left|D_1D_2(u-\pi_k u)(G_{ij}^{(1)})\right| \leq Ch^{k+1}|u|_{k+3.\infty.e}, \qquad k\geq 1. \tag{11}$$

证明的主要步骤　首先利用 (1) − (4) 式和 Legendre 多项式的正交性，对 $u\in P_{k+2}(e)$, 导出 $D_1(u-\pi_k u)(x,y)$ 的表达式，然后取 $y = \widetilde{g}_j^{(0)} \in \widetilde{N}_k^{(0)}$, 再利用 $L_k(x)$ 关于 x_e 的对称与反对称性，可得到 $D_1(u-\pi_k u)(x_e+\tau,\widetilde{g}_j^{(0)}) + D_1(u-\pi_k u)(x_e-\tau,\widetilde{g}_j^{(0)})$ 的表达式．再取 $\tau = g_i^{(1)} - x_e = x_e - \overline{g}_i^{(1)}$, $g_i^{(1)}\in N_k^{(1)}$ (或 $g_i^{(1)}\in N_{k+1}^{(1)}$ 当 k 为奇数时), 推得

$\overline{D}_1(u-\pi_k u)(g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(0)})=0$, $\forall\, u\in P_{k+2}(e)$. 由此式，利用 Bramble-Hilbert 引理，即可证得定理 2 (9) 式成立，其它证明类同.

2 投影型插值算子的基本估计

设 $\Omega\subset R^2$ 为矩形区域， $J_h=\{e\}$ 为 Ω 的一个正则矩形剖分， e 为剖分单元， h 为剖分直径. 设 $S_h\subset C(\overline{\Omega})\bigcap H_0^1(\Omega)$ 为 J_h 上分片双 k 次多项式构成的 Lagrange 型有限元空间. 在每一单元 $e\in J_h$ 上，按节 1 中定义双 k 次投影型插值算子 π_k, 则得到 π_k 在 J_h 上的定义. 文 [1] 节 1.4.3 已推得，当 $k\geq 2$ 时， π_k 具有性质

$$\int_e (u-\pi_k u)q\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\qquad \forall\, q\in Q_{k-2}(e),\quad e\in J_h, \tag{12}$$

$$\int_l (u-\pi_k u)\,p\,\mathrm{d}s=0,\qquad \forall\, p\in P_{k-2}(l),\quad 线段 l\in\partial e. \tag{13}$$

由 π_k 的性质 (5) 和 (13) 式即可推得 $\pi_k:\, H^2(\Omega)\to S_h$, $k\geq 1$. 定义双线性形式

$$A(u,v)=\sum_{i,j=1}^{2}(a_{ij}D_i u,D_j v)+\sum_{i=1}^{2}(a_i D_i u,v)+(a_0 u,v). \tag{14}$$

引理 1 在单元 $e\in J_h$ 上成立如下基本估计

$$\left|(D_i(u-\pi_k u)\,,D_i v_h)_e\right|\leq Ch^{k+1+s}\left\|u\right\|_{k+2.p.e}\left\|v_h\right\|_{s+1.q.e},\qquad i=1,2, \tag{15}$$

$$\left|(\,D_iD_j(u-\pi_k u),w)_e\right|\leq Ch^{k+1+s}\left\|u\right\|_{k+2.p.e}\left\|w\right\|_{s+1.q.e},\qquad i\neq j, \tag{16}$$

其中 $v_h\in S_h$, $w\in W_q^{s+1}(e)$, $0\leq s\leq k-1$, $k\geq 1$, $2\leq p\leq\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 记线性赋范空间 $W(e)=S_h\bigcap W_q^{s+1}(e)$. 引进双线性变换 $(x,y)=F(\xi,\eta)=(x_e+\xi h_e,y_e+\eta k_e)$, $(\xi,\eta)\in\widehat{e}=(-1,1)\times(-1,1)$, 则 $F:\ \widehat{e}\to e$. 记 $\widehat{u}(\xi,\eta)=u\big(F(\xi,\eta)\big)$. 定义双线性形式

$$E(\widehat{u},\widehat{v}_h)=(\widehat{D}_1(\widehat{u}-\widehat{\pi}_k\widehat{u}),\,\widehat{D}_1\widehat{v}_h)_{\widehat{e}}=h_e k_e^{-1}(D_1(u-\pi_k u),D_1 v_h)_e, \tag{17}$$

则 $E(\widehat{u},\widehat{v}_h)$ 为 $W_p^{k+2}(\widehat{e})\times W(\widehat{e})$ 上连续的双线性泛函. 利用 (8) 式， Legendre 多项式的正交性和 (12)–(13) 式可以证明 $E(\widehat{u},\widehat{v}_h)$ 满足

$$\begin{aligned} &E(\widehat{u},\widehat{v}_h)=0,\qquad \forall\,\widehat{u}\in P_{k+1}(\widehat{e}),\quad \widehat{v}_h\in W(\widehat{e});\\ &E(\widehat{u},\widehat{q}_s)=0,\qquad \forall\,\widehat{u}\in W_p^{k+2}(\widehat{e}),\quad \widehat{q}_s\in P_s(\widehat{e}),\end{aligned} \tag{18}$$

则利用双线性引理 [2] 可证得 (15) 式 $i=1$ 情形，其它类似可证.

引理 2 设 $u\in H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$, $a(x,y)\in C^1(\overline{\Omega})$, (n,x) 和 (n,y) 分别表示 ∂e 的外法向量 n 与 x 轴和 y 轴的夹角，均值 $\overline{D_1 v}\,(\partial e)\big|_l=\frac{1}{|l|}\int_l D_1 v\,\mathrm{d}s$, 线段 $l\in\partial e$. 则成立

$$\sum_{e\in J_h}\int_{\partial e} a\,\cos(n,y)D_1(u-\pi_k u)w_h\,\mathrm{d}s=0,\qquad \forall\, w_h\in S_h, \tag{19}$$

$$\sum_{e\in J_h}\int_{\partial e} a\,\cos(n,y)(u-\pi_k u)\overline{D_1 v}\,(\partial e)\,\mathrm{d}s=0,\qquad \forall\, v\in H^2(\Omega). \tag{20}$$

定理 3 双 k 次投影型插值算子 π_k 满足如下超收敛基本估计：

$$\left|A(u-\pi_k u, v_h)\right| \le Ch^{k+1}\|u\|_{k+2.p}\|v_h\|_{1.q}, \qquad k \ge 1, \tag{21}$$

$$\left|A(u-\pi_k u, \pi_k v)\right| \le Ch^{k+2}\|u\|_{k+2.p}\|v\|_{2.q}, \qquad k \ge 2, \tag{22}$$

其中 $v_h \in S_h$，$v \in H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$，$2 \le p \le \infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证明的主要步骤 利用分部积分，(12) 式和 $\pi_k u$ 的逼近性质，可推得一阶项和函数项的估计. 对二阶项，当 $a_{ij}=$ 常数时，利用引理 1 (15) 式 $(s=0,1)$ 且注意 $\|\pi_k v\|_{2.q.e} \le C\|v\|_{2.q.e}$, 则直接得到 $(D_i(u-\pi_k u), D_i v_h)$ 和 $(D_i(u-\pi_k u), D_i\pi_k v)$ 的估计. 对混合项，利用分部积分和引理 1, 2 也可得到相应估计；当 $a_{ij} \ne$ 常数时，对系数采用分片常数逼近，利用分部积分，逼近性质，引理 1, 2 和 (13) 式证之. 证明稍微复杂，略.

定理 4 设双线性形式 $A(u,v)=(\nabla u, \nabla v)+(a_0 u, v)$, 则成立强超收敛基本估计

$$\left|A(u-\pi_k u, v_h)\right| \le Ch^{k+2}\|u\|_{k+3.p}\|v_h\|_{1.q}, \qquad k \ge 2, \tag{23}$$

$$\left|A(u-\pi_k u, \pi_k v)\right| \le Ch^{k+3}\|u\|_{k+3.p}\|v\|_{2.q}, \qquad k \ge 3, \tag{24}$$

其中 $v_h \in S_h$，$v \in H_0^1(\Omega)\bigcap H^2(\Omega)$，$2 \le p \le \infty$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 [1] 中 2.1.2 节已给出 $(\nabla(u-\pi_k u), \nabla w_h)$，$w_h = v_h$ 或 $\pi_k v$ 的估计，只须估计函数项. 利用 (12) 式和逼近性质可证得相应估计.

3 有限元逼近的超收敛性质

设双线性形式 $A(u,v)$ 由 (14) 式定义，进一步假设 $A(u,v)$ 在 $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 上是连续和一致正定的 (不必对称). 对函数 $u \in H_0^1(\Omega)$ 定义其有限元逼近： $u_h \in S_h$ 满足 $A(u-u_h, v_h)=0$, $\forall v_h \in S_h$. 以下假设剖分 J_h 是拟一致的. 利用定理 3, 4 中的基本估计和 [3, 第三章] 中的 Green 函数论证方法，即可证明如下定理.

定理 5 $\pi_k u$ 与 u_h 满足如下超收敛估计

$$\|\pi_k u - u_h\|_{1.\infty} \le Ch^{k+1}|\ln h|\,\|u\|_{k+2.\infty}, \qquad k \ge 1, \tag{25}$$

$$\|\pi_k u - u_h\|_{0.\infty} \le Ch^{k+2}|\ln h|\,\|u\|_{k+2.\infty}, \qquad k \ge 2. \tag{26}$$

进一步设 $A(u,v)=(\nabla u, \nabla v)+(a_0 u, v)$, 则成立如下强超收敛估计

$$\|\pi_k u - u_h\|_{1.\infty} \le Ch^{k+2}|\ln h|\,\|u\|_{k+3.\infty}, \qquad k \ge 2, \tag{27}$$

$$\|\pi_k u - u_h\|_{0.\infty} \le Ch^{k+3}|\ln h|\,\|u\|_{k+3.\infty}, \qquad k \ge 3. \tag{28}$$

结合 (5) 式和定理 5 中 (28) 式即可得到 u_h 在剖分节点处的强超收敛性质.

定理 6 在单元 e 的 Lobatto 点，Gauss 点和拟 Lobatto 点 $G_{ij}^{(s)} \in N_k^{(s)}\times N_k^{(s)}$, $s=0,1,2$ 上，成立如下超收敛估计

$$\left|D^l(u-u_h)(G_{ij}^{(|l|)})\right| \le Ch^{k+2-|l|}|\ln h|\,\|u\|_{k+2.\infty}, \qquad |l|=0,1,2,$$

其中 $k \ge 1$, 或者 $k \ge 2$, 当 $|l|=0$ 或 $l_1=2$ 或 $l_2=2$ 时. 此外，对于混合偏导数逼近，还成立如下整体超收敛估计

$$\max_{e\in J_h}\left\|D_1D_2(u-u_h)\right\|_{0.\infty.e} \le Ch^k|\ln h|\,\|u\|_{k+2.\infty}, \qquad k \ge 1.$$

定理 7 设双线性形式 $A(u,v)=(\nabla u,\nabla v)+(a_0u,v)$. 导数均值算子 $\overline{D}_1,\overline{D}_2$ 如节 1 中规定, Gauss 点 $(g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(1)})\in N_k^{(1)}\times\widetilde{N}_k^{(1)}$ (或 $(g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(1)})\in N_{k+1}^{(1)}\times\widetilde{N}_{k+1}^{(1)}$, 当 k 为奇数时), Lobatto 点 $(g_i^{(0)},\widetilde{g}_j^{(0)})\in N_k^{(0)}\times\widetilde{N}_k^{(0)}$, 则成立如下强超收敛估计

$$\left|\overline{D}_1(u-u_h)(g_i^{(1)},\widetilde{g}_j^{(0)})\right|\le C\,h^{k+2}|\ln h|\,\|u\|_{k+3.\infty},\qquad k\ge 2, \tag{29}$$

$$\left|\overline{D}_2(u-u_h)(g_i^{(0)},\widetilde{g}_j^{(1)})\right|\le C\,h^{k+2}|\ln h|\,\|u\|_{k+3.\infty},\qquad k\ge 2. \tag{30}$$

此外, 在 Gauss 点集 $G_{ij}^{(1)}\in N_k^{(1)}\times\widetilde{N}_k^{(1)}$ 上, 也成立

$$\left|D_1D_2(u-u_h)(G_{ij}^{(1)})\right|\le Ch^{k+1}|\ln h|\,\|u\|_{k+3.\infty},\qquad k\ge 2. \tag{31}$$

证 结合定理 1 (定理 2) 和定理 5 并利用三角不等式即证得定理 6 (定理 7) 结论. 当涉及二阶导数时, 需先对定理 5 结果使用有限元逆不等式.

参 考 文 献

1 林群, 朱起定. 有限元的预处理和后处理理论. 上海: 上海科学技术出版社, 1994
2 Ciarlet P G 著, 蒋尔雄等译. 有限元素法数值分析. 上海: 上海科学技术出版社, 1978
3 朱起定, 林群. 有限元超收敛理论. 长沙: 湖南科学技术出版社, 1989