第 23 卷 第 1 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 23 No. 1
2000 年 1 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Jan., 2000

二维全空间上线性阻尼 Navier-Stokes 方程的全局吸引子及其维数估计*

赵春山 李开泰
(西安交通大学理学院计算物理研究室, 西安 710049)

摘 要 本文研究二维全空间上线性阻尼 Navier-Stokes 方程的大时间性态, 在外力项 $f(x)\in(L^2(R^2))^2$ 而不需要对 $f(x)$ 作任何加权限制的条件下, 证明了线性阻尼 Navier-Stokes 方程的全局吸引子的存在性, 并给出了其 Hausdorff 及 Fractal 维数估计.

关键词 线性阻尼, Navier-Stokes 方程, 全局吸引子, Hausdorff 及 Fractal 维数

1 引言

无界区域上发展方程的大时间性态在过去几年中已有一些具体的结果 [1-6], 其基本思想是利用加权函数保证紧性证明全局吸引子的存在性. [4] 中研究了如下二维全空间上的线性阻尼 Navier-Stokes 方程的大时间性态:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+\alpha u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f(x),\qquad x\in R^2,\ \ t>0,\tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}u=0,\tag{1.2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=0,\tag{1.3}$$

$$u(x,0)=u_0(x).\tag{1.4}$$

(1.1)–(1.4) 中, $u=(u_1,u_2)^{\mathrm T}$ 为流体的速度向量, p 为压力项, $f(x)$ 为与时间无关的外力项, $\nu>0$ 为流体的粘性系数, $\alpha>0$ 为线性阻尼常数, αu 理解为与速度向量场平行的阻尼项 [4]. 在 [1–4] 全局吸引子的 Hausdorff 及 Fractal 维数估计的过程中, 我们发现并未并未用到 $f(x)$ 属于适当加权空间的假设. 本文采用能量方程方法 [7,8], 在 $f(x)\in\left(L^2(R^2)\right)^2$ 而不需要对 $f(x)$ 作任何加权限制的条件下, 证明 (1.1)–(1.4) 全局吸引子的存在性, 并给出了其 Hausdorff 及 Fractal 维数估计. 与 [4] 中的结果相比大大拓宽 $f(x)$ 的取值范围, 推广了其结果.

2 准备知识

记 $\mathcal{L}^2(R^2)=\left(L^2(R^2)\right)^2$, $(u,v)=\int_{R^2}u\cdot v\,\mathrm{d}x$, $|u|=(u,u)^{\frac12}$, 为 $\mathcal{L}^2(R^2)$ 的内积和范数.

本文 1998 年 6 月 15 日收到. 1999 年 6 月 3 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金资助项目.

$\mathcal{H}^1(R^2)=\big(H^1(R^2)\big)^2$, $H^1(R^2)=W^{1,2}(R^2)$ 为通常的 Soblev 空间，其范数记为 $\|\cdot\|_1$.

$$\mathcal{D}=\{v: v\in\big(C_0^\infty(R^2)\big)^2,\ \nabla\cdot v=0\},$$
$$\big((u,v)\big)=\int_{R^2}\sum_{j=1}^{2}\nabla u_j\cdot\nabla v_j\,\mathrm{d}x,\qquad \|u\|=\big((u,u)\big)^{\frac12},$$

则

$$\|u\|_1^2=|u|^2+\|u\|^2,\qquad \forall u\in\mathcal{H}^1(R^2).$$

记：V 为 $\mathcal{D}$ 在 $\|\cdot\|_1$ 范数下的完备空间，V' 为 V 的对偶空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $V\times V'$ 上的对偶积. H 为 $\mathcal{D}$ 在 $|\cdot|$ 下的完备空间. $\widehat{P}:\mathcal{L}^2(R^2)\to H$ 为 Leray 投影算子，$A=-\widehat{P}\Delta$ 为 Stokes 算子.

方程 (1.1)–(1.4) 的弱形式如下，寻求 $u\in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V)(\forall T>0)$ 使得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,v)+\nu\big((u,v)\big)+\alpha(u,v)+b(u,u,v)=(f,v),\qquad \forall v\in V,\ \ 0<t\le T,\tag{2.1}$$
$$u(x,0)=u_0,\tag{2.2}$$

其中

$$b(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{R^2}u_i\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j\,\mathrm{d}x,\qquad \forall\,u,v,w\in V.$$

(2.1) 等价于 V' 中如下的算子形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\nu Au+\alpha u+B(u,u)=\widehat{P}f,\qquad \forall t>0.\tag{2.3}$$

这里 $B(u,u)$ 为如下定义的 $V\times V\to V'$ 的线性算子：

$$\langle B(u,v),w\rangle=b(u,v,w),\qquad \forall\,u,v,w\in V.$$

$b(u,v,w)$ 具有以下性质及估计式 [9]：$b(u,v,w)=-b(u,w,v)$，特别地 $b(u,u,u)=0$，$\forall\,u,v,w\in V$,

$$\big|b(u,v,w)\big|\le c|u|^{\frac12}\|u\|^{\frac12}\|w\|\,|v|^{\frac12}\|v\|^{\frac12},\qquad \forall\,u,v,w\in V.$$

从而有

$$\big\|B(u,u)\big\|_{V'}\le c\,|u|\,\|u\|,\qquad \forall\,u\in V.$$

以后若无具体说明，$c,c_i\ (i=1,2,\cdots)$ 表示与具体函数无关的常数.

引理 2.1　$\forall\,f(x)\in\mathcal{L}^2(R^2)$, $u_0(x)\in H$, 方程 (1.1)–(1.4) 存在唯一解 $u(x,t)\in L^\infty(R^+;H)\cap L^2(0,T;V)\cap C(R^+;H)\ (\forall T>0)$.

此引理可按 [9] 中 Faedo-Galerkin 方法容易给出证明，这里从略.

下面给出方程 (1.1)–(1.4) 解的先验估计，(1.1) 式两边与 u 做内积得：

$$\frac{\mathrm{d}\,|u|^2}{\mathrm{d}t}+2\alpha|u|^2+2\nu\|u\|^2=2(f,u),\qquad \forall\,t>0.\tag{2.4}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}\,|u|^2}{\mathrm{d}t}+\alpha|u|^2+2\nu\|u\|^2\le\frac{1}{\alpha}|f|^2.\tag{2.5}$$

从而由 Grownwall 不等式得

$$\left|u(t)\right|^2 \leq |u_0|^2 e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha^2}(1-e^{-\alpha t})\,|f|^2. \tag{2.6}$$

记 $\beta = \min(\alpha, 2\nu)$, 由 (2.5) 式:

$$\frac{1}{t}\int_0^t \left\|u(s)\right\|_1^2 \mathrm{d}s \leq \frac{1}{\alpha\beta}|f|^2 + \frac{1}{t\beta}|u_0|^2, \qquad \forall t>0. \tag{2.7}$$

由引理 2.1, 我们可以定义算子半群 $\left\{S(t)\right\}_{t\geq 0}: H \to H$, 使得 $S(t)u_0 = u(t)$. 由 (2.6) 易知半群 $\left\{S(t)\right\}_{t\geq 0}$ 在 H 中存在吸收集 $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \Big\{v : v\in H,\ |v| \leq \rho_0 \triangleq \frac{\sqrt{2}}{\alpha}|f|\Big\}.$$

引理 2.2 若 $\{u_{0n}\} \subset B_1$ 为 H 中的弱收敛序列, B_1 为 H 中的任何有界集, $u_0 \in H$ 为其弱极限, 则:

(i) $S(t)u_{0n} \rightharpoonup S(t)u_0$ 在 H 中弱收敛, $\forall t \geq 0$.

(ii) $S(t)u_{0n} \rightharpoonup S(t)u_0$ 在 $L^2(0,T;V)$ 中弱收敛, $\forall T>0$.

证 由 $\{u_{0n}\} \subset B_1$ 及 (2.6), (2.7) 式易知, $u_n(t) = S(t)u_{0n}$ 在 $L^\infty(R^+;H)\cap L^2(0,T;V)$ $(\forall T>0)$ 中关于 n 一致有界. 由 (2.3) 式知在 V' 中下式成立:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \widehat{P}f - \nu A u_n - \alpha u_n - B(u_n, u_n). \tag{2.8}$$

由 $A: V\to V'$ 为有界线性算子及 $\left\|B(u_n,u_n)\right\|_{V'} \leq c\,|u_n|\,\|u_n\|$ 可知: $\{\frac{\partial u_n}{\partial t}\} \in L^2(0,T:V')$ 且关于 n 一致有界. 从而 $\forall v\in V$, $0<t\leq t+a\leq T$ 有

$$\begin{aligned}(u_n(t+a)-u_n(t), v) &= \int_t^{t+a}\Big\langle \frac{\partial u_n(s)}{\partial s}, v\Big\rangle \mathrm{d}s\\ &\leq \|v\|_1 a^{\frac{1}{2}}\Big\|\frac{\partial u_n}{\partial t}\Big\|_{L^2(0,T:V')} \leq c_T\|v\|_1 a^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 c_T 为与 n 无关的常数.

(2.9) 式中取 $v = u_n(t+a) - u_n(t)$ 得

$$\left|u_n(t+a)-u_n(t)\right|^2 \leq c_T a^{\frac{1}{2}}\left\|u_n(t+a)-u_n(t)\right\|_1.$$

故

$$\begin{aligned}&\int_0^{T-a}\left|u_n(t+a)-u_n(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leq c_T a^{\frac{1}{2}}\int_0^{T-a}\left\|u_n(t+a)-u_n(t)\right\|_1 \mathrm{d}t\\ &\leq 2c_T T^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^{\mathrm{T}}\left\|u_n(t)\right\|_1^2 \mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \widetilde{c}_T a^{\frac{1}{2}} \quad \Big(\text{由}\Big(\int_0^{\mathrm{T}}\left\|u_n(t)\right\|_1^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\ \text{关于 } n \text{ 一致有界}\Big),\end{aligned}$$

其中 $\widetilde{c}_T$ 为与 n 无关的常数. 从而 $\forall r>0$

$$\lim_{a\to 0}\sup_n \int_0^{T-a}\left|u_n(t+a)-u_n(t)\right|^2_{\mathcal{L}^2(B_r)}\mathrm{d}t = 0, \tag{2.10}$$

其中 $B_r = \{x\in R^2,\ |x|\leq r\}$. 由 $\{u_n\}$ 在 $L^\infty(R^+;H)\cap L^2(0,T;V)$ 中关于 n 一致有界知 $\{u_n|_{B_r}\}$ 在 $L^\infty\big(R^+;\mathcal{L}^2(B_r)\big)\cap L^2\big(0,T:\mathcal{H}^1(B_r)\big)$ 中关于 n 一致有界, $u_n|_{B_r}$ 为 u_n 在 B_r 上的限制.

令

$$\tau(s)=\begin{cases}1 & s\in[0,1],\\ c^2\ \text{光滑} & s\in[1,2],\\ 0 & s\in[2,\infty).\end{cases}$$

记 $v_{n,r}=\tau\big(|x|/r\big)u_n(x)$, 由 (2.10) 式知

$$\lim_{a\to 0}\sup_n\int_0^{T-a}\big|v_{n,r}(t+a)-v_{n,r}(t)\big|^2_{\mathcal{L}^2(B_{2r})}\,\mathrm{d}t=0,\qquad \forall T>0,\ \ r>0,$$

且 $\{v_{n,r}\}$ 在 $L^2\big(0,T;\mathcal{H}_0^1(B_{2r})\big)\cap L^\infty\big(0,T;\mathcal{L}^2(B_{2r})\big)$ 中关于 n 一致有界. 从而由 [10] 中定理 13.3 知 $\{v_{n,r}\}$ 在 $L^2\big(0,T;\mathcal{L}^2(B_{2r})\big)$ 中为相对紧的. 从而 $\{u_n|_{B_r}\}$ 在 $L^2\big(0,T;\mathcal{L}^2(B_r)\big)$ 中为相对紧的, 故 $\{u_n\}$ 存在子列 $\{u_{n_1}\}$ 及 $\widehat{u}\in L^\infty(R^+;H)\cap L^2(0,T;V)$ 使得 $u_{n_1}\Rightarrow\widehat{u}$ 在 $L^\infty(R^+;H)$ 中弱 * 收敛, $u_{n_1}\Rightarrow\widehat{u}$ 在 $L^2(0,T:V)$ 中弱收敛, $u_{n_1}\Rightarrow\widehat{u}$ 在 $L^2\big(0,T;\mathcal{L}^2(B_r)\big)$ 中强收敛.

由 (2.8) 式知:

$$\Big(\frac{\partial u_{n_1}}{\partial t},v\Big)=(f,v)-\nu\big((u_{n_1},v)\big)-\alpha(u_{n_1},v)-b(u_{n_1},u_{n_1},v),\qquad \forall v\in\mathcal{D}.\tag{2.11}$$

(2.11) 中对 n_1 取极限, 进行极限过渡, 从而有

$$\Big(\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t},v\Big)=(f,v)-\nu\big((\widehat{u},v)\big)-\alpha(\widehat{u},v)-b(\widehat{u},\widehat{u},v),\qquad \forall v\in\mathcal{D}.\tag{2.12}$$

由于 $\mathcal{D}$ 在 V 中稠密, 从而下式成立 $\forall v\in V$,

$$\Big(\frac{\partial\widehat{u}}{\partial t},v\Big)=(f,v)-\nu\big((\widehat{u},v)\big)-\alpha(\widehat{u},v)-b(\widehat{u},\widehat{u},v),\tag{2.13}$$

故 $\widehat{u}$ 为 (2.3) 式的解, 易证 $\widehat{u}(0)=u_0$.

由引理 2.1 知 $\widehat{u}(t)=u(t)=S(t)u_0$. 利用反证法易证 $\{u_n\}$ 满足 $u_n\Rightarrow u$ 在 $L^\infty(R^+;H)$ 中弱 * 收敛, $u_n\Rightarrow u$ 在 $L^2(0,T;V)$ 中弱收敛, $u_n\Rightarrow u$ 在 $L^2(0,T;\mathcal{L}^2(B_r))$ 中强收敛, 故 $u_n\to u$ 在 $L^2(B_r)$ 中强收敛关于 $t\in R^+$ 几乎处处成立, 从而有 $(u_n(t),v)\to(u(t),v)$, $\forall v\in\mathcal{D}$ 关于 t 几乎处处成立.

由 $u_n(t)=S(t)u_{0n}$ 在 $L^\infty(R^+;H)\cap L^2(0,T;V)$ $(\forall T>0)$ 关于 n 一致有界及 (2.9) 式 $(u_n(t),v)$ 在 $[0.T]$ 上等度连续知:

$$(u_n(t),v)\to(u(t),v),\qquad \forall t\in R^+,\ \ v\in\mathcal{D}.\tag{2.14}$$

由 (2.14) 式及 $\mathcal{D}$ 在 H 中稠密可知:

$$(u_n(t),v)\to(u(t),v),\qquad \forall\, t\in R^+,\ \ \forall\, v\in H,$$

故 $u_n(t)=S(t)u_{0n}$ 在 H 中弱收敛到 $u(t)=S(t)u_0$, 引理 2.2 证毕.

3　全局吸引子的存在性

由第二节知识可知, 半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 在 H 中存在吸收集 $\mathcal{B}$, 下面我们证明半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 为渐进紧的. 令

$$[u,v]=\alpha(u,v)+2\nu\big((u,v)\big),\qquad [u]^2=[u,u],\qquad \forall u,v\in V,$$

则

$$\beta\,\|u\|_1^2 \le [u]^2 \le \gamma\,\|u\|_1^2, \qquad \gamma = \max(\alpha, 2\nu),$$

从而 $[\cdot]$ 与 $\|\cdot\|_1$ 在 V 中互为等价范数. 由能量方程 (2.4) 得

$$\frac{\mathrm{d}|u|^2}{\mathrm{d}t} + \alpha|u|^2 + [u]^2 = 2(f, u). \tag{3.1}$$

从而有

$$\big|u(t)\big|^2 = |u_0|^2\mathrm{e}^{-\alpha t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\big(2(f, u(s)) - \big[u(s)\big]^2\big)\,\mathrm{d}s,$$

即

$$|S(t)u_0|^2 = |u_0|^2\mathrm{e}^{-\alpha t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\big(2(f, S(s)u_0) - [S(s)u_0]^2\big)\,\mathrm{d}s. \tag{3.2}$$

设 B_2 为 H 中的任意有界集, 序列 $\{u_n\} \subset B_2$, $\{t_n\}$ $(t_n \ge 0)$, $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ 由于 $\big\{S(t)\big\}_{t\ge 0}$ 存在吸收集 $\mathcal{B}$, 故存在 $T(B_2) > 0$ 使得 $S(t)B_2 \subset \mathcal{B}$, $\forall t \ge T(B_2)$, 故 $\{S(t_n)u_n\}$ 中存在子列 $\{S(t_{n'})u_{n'}\}$ 及 $w \in \mathcal{B}$ 满足

$$S(t_{n'})u_{n'} \rightharpoonup w \ \text{ 在 } H \text{ 中弱收敛}. \tag{3.3}$$

同理 $\forall T > 0$, 当 $t_{n'} > T + T(B_2)$ 时 $S(t_{n'} - T)u_{n'} \in \mathcal{B}$, 从而 $\{S(t_{n'} - T)u_{n'}\}$ 存在子列, 仍记为 $\{S(t_{n'} - T)u_{n'}\}$ 及 $w_T \in \mathcal{B}$, 使得

$$S(t_{n'} - T)u_{n'} \rightharpoonup w_T \ \text{ 在 } H \text{ 中弱收敛}.$$

由引理 2.2 (i) 知:

$$\begin{aligned} w =& H_w - \lim_{n'\to\infty} S(t_{n'})u_{n'} = H_w - \lim_{n'\to\infty} S(T)S(t_{n'} - T)u_{n'} \\ =& S(T)\Big(H_w - \lim_{n'\to\infty} S(t_{n'} - T)u_{n'}\Big) = S(T)w_T. \end{aligned} \tag{3.4}$$

这里 $H_w - \lim\limits_{n'\to\infty}$ 表示 H 中弱拓扑意义下的极限. 由 (3.3) 可知:

$$|w| \le \lim_{n'\to\infty} \inf |S(t_{n'})u_{n'}|. \tag{3.5}$$

下面我们证明 $\lim\limits_{n'\to\infty} \sup |S(t_{n'})u_{n'}| \le |w|$.

$\forall T > 0$, $t_{n'} > T$, 由 (3.2) 式

$$\begin{aligned} &|S(t_{n'})u_{n'}|^2 = |S(T)S(t_{n'} - T)u_{n'}|^2 \\ =& |S(t_{n'} - T)u_{n'}|^2\mathrm{e}^{-\alpha T} + \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}\big(2(f, S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'}) \\ &- [S(s)S(t_{n'} - T)u_{n'}]^2\big)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.6}$$

当 $t_{n'} > T + T(B_2)$ 时,

$$\lim_{n'\to\infty} \sup\ \big(\mathrm{e}^{-\alpha T}|S(t_{n'} - T)u_{n'}|^2\big) \le \rho_0^2\mathrm{e}^{-\alpha T}. \tag{3.7}$$

由引理 2.2 (ii) 得：

$$S(s)S(t_{n'}-T)u_{n'} \rightharpoonup S(s)w_T \quad 在\ L^2(0,T;V)\ 中弱收敛. \tag{3.8}$$

从而

$$\lim_{n'\to\infty}\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}(f,S(s)S(t_{n'}-T)u_{n'})\,\mathrm{d}s=\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}(f,S(s)w_T)\,\mathrm{d}s. \tag{3.9}$$

由 $[\cdot]$ 与 $\|\cdot\|_1$ 互为等价范数，$0<\mathrm{e}^{-\alpha T}\le \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}\le 1$，$s\in[0,T]$，故 $\left(\int_0^{\mathrm{T}}\mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}[\cdot]^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}$ 与 $\left(\int_0^{\mathrm{T}};\|\cdot\|_1^2\,\mathrm{d}s\right)^{\frac12}$ 互为 $L^2(0,T;V)$ 中的等价范数，从而由 (3.8) 得

$$\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}[S(s)w_T]^2\,\mathrm{d}s\le \lim_{n'\to\infty}\inf\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}[S(s)S(t_{n'}-T)u_{n'}]^2\,\mathrm{d}s.$$

从而有

$$\begin{aligned}&\lim_{n'\to\infty}\sup\left(-\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}[S(s)S(t_{n'}-T)u_{n'}]^2\,\mathrm{d}s\right)\\ =&-\lim_{n'\to\infty}\inf\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}[S(s)S(t_{n'}-T)u_{n'}]^2\,\mathrm{d}s\\ \le&-\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}[S(s)w_T]^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{3.10}$$

从而由 (3.7), (3.9), (3.10) 式得

$$\lim_{n'\to\infty}\sup|S(t_{n'})u_{n'}|^2\le \rho_0^2\mathrm{e}^{-\alpha T}+\int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{e}^{-\alpha(T-s)}\left(2(f,S(s)w_T)-[S(s)w_T]^2\right)\mathrm{d}s. \tag{3.11}$$

另一方面由 (3.2) 得

$$|w|^2=|S(s)w_T|^2=|w_T|^2\mathrm{e}^{-\alpha T}+\int_0^{\mathrm{T}}\left(2(f,S(s)w_T)-[S(s)w_T]^2\right)\mathrm{d}s. \tag{3.12}$$

由 (3.11), (3.12) 式得

$$\lim_{n'\to\infty}\sup|S(t_{n'})u_{n'}|^2\le |w|^2+(\rho_0^2-|w_T|^2)\mathrm{e}^{-\alpha T}\le |w|^2+\rho_0^2\,\mathrm{e}^{-\alpha T},\qquad \forall T>0. \tag{3.13}$$

由 T 的任意性，(3.13) 式中令 $T\to\infty$ 得

$$\lim_{n'\to\infty}\sup|S(t_{n'})u_{n'}|^2\le |w|^2.$$

结合 (3.5) 式得

$$\lim_{n'\to\infty}|S(t_{n'})u_{n'}|=|w|.$$

由于 H 为 Hilbert 空间，故为一致凸的 Banach 空间，由下面的引理 3.1 可知

$$\lim_{n'\to\infty}S(t_{n'})u_{n'}=w \quad 在\ H\ 中强收敛,$$

故 $\{S(t_n)u_n\}$ 在 H 中为预紧的, 从而半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 在 H 中为渐进紧的. 于是 $\omega(\mathcal{B}) = \overline{\bigcap_{s\geq 0}\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}}$ 为 H 中的非空紧集. 从而可知如下定理成立:

定理 3.1 半群 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ 在 H 中存在全局吸引子 $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}) = \overline{\bigcap_{s\geq 0}\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}}$.

引理 3.1 设 $\widehat{B}$ 为一致凸的 Banach 空间, $\{v_n\} \subset \widehat{B}$ 在 $\widehat{B}$ 中弱收敛到 v, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} |v_n|_{\widehat{B}} = |v|_{\widehat{B}}$, $|\cdot|_{\widehat{B}}$ 表示空间 $\widehat{B}$ 中的范数, 则 $v_n \to v$ 在 $\widehat{B}$ 中强收敛.

此引理的详细证明见 [8] 中 Remark A.

4 全局吸引子的维数估计

下面我们对 $\mathcal{A}$ 的 Hausdorff 及 Fractal 维数进行估计.

$\forall u_0 \in \mathcal{A}$, 方程 (2.3) 在 $u(t) = S(t)u_0$ 的线性化方程为:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nu A v + \alpha v + B(u,v) + B(v,u) = 0, \tag{4.1}$$

$$v(0) = \psi. \tag{4.2}$$

$\forall \psi \in H$, 易知方程 (4.1), (4.2) 存在唯一解 $v(x,t) \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, $\forall T > 0$. 为方便起见, 记 $F'(u)v = -\nu Av - \alpha v - B(u,v) - B(v,u)$, 则 (4.1), (4.2) 简记为:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F'\big(u(t)\big)v, \tag{4.3}$$

$$v(0) = \psi. \tag{4.4}$$

$\forall \psi_1, \cdots, \psi_m \in H$ 线性无关, 方程 (4.3) 以 $v(0) = \psi_i$ $(i = 1, \cdots, m)$ 为初值的解记为 $v_i(t)$ $(i = 1, \cdots, m)$, ϕ_i $(i = 1, \cdots, m)$ 为 $\operatorname{span}\{v_1(t), \cdots, v_m(t)\}$ 中的一组标准正交基, $Q_m(t): H \to \operatorname{span}\{\phi_1(t), \cdots, \phi_m(t)\}$ 为正交投影算子. 记

$$q_m = \lim_{t\to\infty} \sup_{u_0\in\mathcal{A}} \sup_{\psi_i\in H,\, |\psi|\leq 1,\, i=1,\cdots,m} \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{Tr}\big(F'(S(\tau)u_0)\cdot Q_m(\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau.$$

引理 4.1[9] 设 $\mathcal{A}$ 为方程 (1.1)–(1.4) 的全局吸引子, 且存在 $N > 0$ 使得 $q_N < 0$, 则 $\mathcal{A}$ 的 Hausdorff 维数为 $d_H(\mathcal{A}) \leq N$, 其 Fractal 维数满足

$$d_F(\mathcal{A}) \leq N\Big(1 + \max_{1\leq j\leq N-1} \frac{(q_j)_+}{|q_N|}\Big).$$

下面我们估计 $\operatorname{Tr}\big(F'(u(\tau))\cdot Q_m(\tau)\big)$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}\big(F'(u(\tau))\cdot Q_m(\tau)\big) = \sum_{i=1}^m \big\langle F'\big(u(\tau)\big)\phi_i, \phi_i\big\rangle \\
=&\sum_{i=1}^m \big\langle -\nu A\phi_i - \alpha\phi_i - B(u,\phi_i) - B(\phi_i,u), \phi_i\big\rangle \\
=&\sum_{i=1}^m \big(-\nu\,\|\phi_i\|^2 - \alpha|\phi_i|^2 - b(\phi_i,u,\phi_i)\big) = -\alpha m - \sum_{i=1}^m \big(\nu\,\|\phi_i\|^2 + b(\phi_i,u,\phi_i)\big),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{m} b(\phi_i,u,\phi_i)\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{m}\int_{R^2}\sum_{k,l=1}^{2}\phi_{ik}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\phi_{il}\,\mathrm{d}x\Big| \\
=&\Big|\int_{R^2}\sum_{k,l=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\Big(\sum_{i=1}^{m}(\phi_{ik}\phi_{il})\Big)\Big)\,\mathrm{d}x\Big| \\
\le&\Big|\int_{R^2}\Big(\sum_{k,l=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k,l=1}^{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\phi_{ik}\phi_{il}\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\Big| \\
\le&\|u\|\Big(\int_{R^2}\Big(\sum_{i=1}^{m}|\phi_i|^2\Big)^2\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

由 Lieb-Thirring 不等式 [9] $\int_{R^2}\big(\sum\limits_{i=1}^{m}|\phi_i|^2\big)^2\,\mathrm{d}x \le c_1\sum\limits_{i=1}^{m}\|\phi_i\|^2$ 得：

$$
\Big|\sum_{i=1}^{m} b(\phi_i,u,\phi_i)\Big| \le \|u\|\Big(c_1\sum_{i=1}^{m}\|\phi_i\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \le \frac{\nu}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\|\phi_i\|^2\Big) + \frac{c_1}{2\nu}\|u\|^2,
$$

故

$$
Tr\left(F'(u(\tau))\cdot Q_m(\tau)\right) \le -\frac{\nu}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\|\phi_i\|^2\Big) - \alpha m + \frac{c_1}{2\nu}\|u\|^2.
$$

由 (2.5) 式得

$$
\frac{1}{t}\int_0^t \big\|u(s)\big\|^2\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{2\nu\alpha}|f|^2 + \frac{1}{t}|u_0|^2.
$$

故

$$
q_m \le -\alpha m + \frac{c_1}{2\nu^2\alpha}|f|^2.
$$

取 $m_0 = \big[\frac{c_1}{2\nu^2\alpha^2}|f|^2\big]_* + 1$, 这里 $[\cdot]_*$ 表示取整，则 $q_{m_0} < 0$, 从而有 $d_H(\mathcal{A}) \le \frac{c_1}{2\nu^2\alpha^2}|f|^2 + 1$. 再取 $m_1 = \big[\frac{c_1}{\nu^2\alpha^2}|f|^2\big]_* + 1$, 则 $q_{m_1} < 0$ 且 $\max\limits_{1\le j\le m_1-1}\frac{(q_j)_+}{|q_{m_1}|} \le 1$, 故 $d_F(\mathcal{A}) \le \frac{2c_1}{\nu^2\alpha^2}|f|^2 + 2$.

定理 4.1 半群 $\{S(t)\}_{t\ge0}$ 的全局吸引子的 Hausdorff 及 Fractal 维数估计如下：

$$
d_H(\mathcal{A}) \le \frac{c_1}{2\nu^2\alpha^2}|f|^2 + 1, \qquad d_F(\mathcal{A}) \le \frac{2c_1}{\nu^2\alpha^2}|f|^2 + 2.
$$

参 考 文 献

1 Abergel F. Attractors for a Navier-Stokes Flow in an Unbounded Domain. *Math. Mod. and Num. Anal.*, 1989, 23(3): 359–370

2 Abergel F. Existence and Finite Dimensionality of the Global Attractor for Evolution Equations on Unbounded Domain. *J. Diff. Equ.*, 1990, 83(1): 85–108

3 丁夏畦，吴永辉. 二维带形无界区域内 Navier-Stokes 方程整体吸引子及其维数估计. 数学物理学报, 1996, 16(2): 125–135
(Ding Xiaxi, Wu Yonghui. Global Attractor of Navier-Stokes Equations on Two-Dimensinal Strip-Like Domains and Estimates of Its Dimensions. *Acta Mathematica Scientia*, 1996, 16(2): 125–135)

4 丁夏畦，吴永辉. 二维全平面上具线性阻尼 Navier-Stokes 方程组解的有限维行为. 应用数学学报, 1997, 20(4): 509–519

(Ding Xiaxi, Wu Yonghui. Finite Dimensional Behaviors of Navier-Stokes Equations with Linear Dampness on the Whole R^2 Space. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1997, 20(4): 509–519)

5 Babin A V. The Attractor of Navier-Stokes System in an Unbounded Channel-like Domain. *J. Dynamics and Diff. Equ.*, 1992, 4(4): 555–584

6 Babin A V, Vishik M I. Attractors of Partial Differential Equations in an Unbounded Domain. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1990, 116A: 221–243

7 Rosa R. The Global Attractor for the 2-D Navier-Stokes Flow on Some Unbounded Domains. *Nonlinear Analysis TMA*, 1998, 32(1): 71–85

8 Wang X. An Energy Eqution for the Weakly Damped Driven Nonlinear Schrodinger Equations and Its Applications to Their Attractors. *Physica D.*, 1995, 88: 165–175

9 Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New York: Springer-Verlag, 1988

10 Temam R. Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. In: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 66, SIAM. Philadelphia, 1983

THE GLOBAL ATTRACTOR OF NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH LINEAR DAMPNESS ON THE WHOLE TWO-DIMENSIONAL SPACE AND ESTIMATES OF ITS DIMENSIONS

ZHAO CHUNSHAN LI KAITAI

(*Research Group of Computational Physics, School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

Abstract The long time behaviors of Navier-Stokes equations with linear dampness on the whole two-dimensional space were investigated. The existence of global attractor of the equations was proved under only condition $f(x) \in \left(L^2(R^2)\right)^2$. Moreover, the upper bounds of Hausdorff and Fractal dimensions of the global attractor were given.

Key words Linear dampness, Navier-Stokes equations, Global attractor, Hausdorff and Fractal dimensions