第 23 卷 第 1 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 23 No. 1
2000 年 1 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Jan., 2000

局部紧 H 半群上概率测度卷积幂的弱收敛性*

张　慧
(山东财政学院基础部，济南 250014)

刘锦萼 †
(山东大学数学与系统科学学院，济南 250100)

摘　要　本文讨论局部紧 H 半群上概率测度卷积幂的弱收敛性，将紧群上的 Kawada-Itô 型结果以某种相应的形式建立到局部紧 H 半群上，由于紧半群上的概率测度卷积幂序列必为胎紧的，所以，不仅 Kawada-Itô 经典结果是本文的特例，而且 [1] 中的定理和 [2] 中的定理 2 都可以作为本文定理的推论.

关键词　局部紧 H 半群，概率测度，卷积幂

1　预备知识和引理

文中未特别指明时，S 总表示局部紧、第二可数、Hausdorff 拓扑半群，$B(S)$ 表示 S 的 Borel 域，$P(S)$ 表示 S 上所有正则概率测度的集合. 在 $P(S)$ 中引进乘法 $*t$(卷积运算):

对 $\mu_1,\mu_2\in P(S)$，$E\in B(S)$，

$$\mu_1*\mu_2(E)\triangleq\int_S\mu_1(Ex^{-1})\mu_2\,\mathrm{d}x=\int_S\mu_2(x^{-1}E)\mu_1\,\mathrm{d}x,$$

其中

$$Ex^{-1}\triangleq\{y\in S:yx\in E\},\qquad x^{-1}E\triangleq\{y\in S:xy\in E\},$$

则 $(P(S),*)$ 成为一个代数半数，引进弱拓扑，$P(S)$ 还是一个拓扑半群.

本文中测度的收敛恒指弱收敛.

$$E(A)\triangleq\{e\in A:e^2=e\}\ \text{即}\ A\ \text{中所有幂等元组成的集合}$$

$\forall x\in S$，δ_x 表示 x 处的点测度.

定义 1　S 为半群，且幂等元可换，即：$\forall e,\ f\in E(S)$ 有 $ef=fe$，称 S 为 H 半群，当 S 还为局部紧时，称 S 为局部紧 H 半群.

本文 1997 年 12 月 31 日收到. 1999 年 5 月 28 日收到修改稿.
*国家自然科学基金资助项目.

定义 2　称概率测度卷积幂序列 $\{\mu^n\}$ 为胎紧的，如果 $\forall n \geq 1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 紧集 $K_\varepsilon \supseteq S$, s.t. $\mu^n(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon$ 成立.

定义 3　设 $\mu \in P(S)$, μ 的支撑集定义为:

$$S_\mu = \{x \in S : \forall \text{开集 } O_x \ni x,\ \mu(O_x) > 0\}.$$

支撑集具有以下性质：设 $\mu, \nu, \lambda \in P(S)$,

(1) S_μ 是闭集;

(2) $S_{\mu*\nu} = \overline{S_\mu \cdot S_\nu}$ (当 S 为紧时，$S_{\mu*\nu} = S_\mu \cdot S_\nu$);

(3) 若 $\lambda^2 = \lambda$, 则 S_λ 为完全简单半群 (即含有本原幂等元且不含真理想的半群).

引理 1　S 为局部紧拓扑半群，若 S 是完全简单半群，则 $S = \bigcup\limits_{f\in E(S)} fSf$, 其中 fSf 为两两不交的极大子群 (见 [3] 中引理 2).

推论 1　若 S 为局部紧完全简单半群，则 S 为群当且仅当 S 有唯一的幂等元.

引理 2　若 S 为局部紧完全简单半群，且幂等元可换，则 S 为群.

证　由引理 1 知 $S = \bigcup\limits_{f\in E(S)} fSf$, $\forall e, f \in E(S)$, $f = f\cdot f\cdot f \in fSf$, 而 $f\cdot e\cdot f \in fSf$, 又 $fef = ef = (ef)^2$, 即 f, ef 均为 fSf 中的幂等元，又因为 fSf 为群，所以 $f = ef$; 同理可证 $e = ef$, 故 $e = f$, 由推论 1 知：S 为群.

推论 2　S 为局部紧 H 半群，$\lambda \in P(S)$, $\lambda^2 = \lambda$, 则 S_λ 为群.

证　由定义 3 知 S_λ 为局部紧完全简单半群，由引理 2 知 S_λ 为群.

引理 3　设 S 为局部紧半群，$\mu \in P(S)$, $\{\mu^n\}$ 为胎紧序列，记 $Q(\mu) \triangleq \{\mu^n,\ n = 1, 2, \cdots\}$ 且 $G(\mu)$ 为 $Q(\mu)$ 的聚点集，则

(1) $G(\mu)$ 为 $P(S)$ 的一个紧子群;

(2) $\forall k \geq 1$, $\exists \mu_k \in G(\mu)$ s.t. $\mu^k * \mu_k = \mu_k * \mu^k = \lambda$, 其中 λ 为 $G(\mu)$ 中的单位元;

(3) $Q(\mu) * \lambda \subset G(\mu)$.

证　(1), (2) 可参考 [4] 中引理 2. (3) 由 (2) 知 $\forall k \geq 1$, $\exists \mu_k \in G(\mu)$ s.t. $\mu^k * \mu_k = \lambda$, 由 (1) 知 $\exists \mu_k^{-1} \in G(\mu)$ s.t. $\mu_k * \mu_k^{-1} = \lambda$, 且 $\lambda * \mu_k^{-1} = \mu_k^{-1}$, 所以 $\mu^k * \mu_k * \mu_k^{-1} = \lambda * \mu_k^{-1} = \mu_k^{-1}$, 即 $\mu^k * \lambda = \mu_k^{-1} \in G(\mu)$, 故 $Q(\mu) * \lambda \subset G(\mu)$.

引理 4　设 S 为局部紧拓扑半群，$N \subset P(S)$ 为概率测度的完全简单半群，则 $\operatorname{supp} N \triangleq \overline{\bigcup\limits_{\nu\in N} S_\nu} = \bigcup\limits_{\nu\in N} S_\nu$, 且它为完全简单半群 (见 [5] 定理 1 的推论 2).

引理 5　设 S 为局部紧、第二可数、Hausdorff 拓扑半群，$G \subset S$ 为闭群，$H \subset G$ 为闭集，则 $\forall g \in G$, $H\cdot g$, $g\cdot H$ 均为闭集.

证明从略.

引理 6　设 S 为局部紧 H 半群，$\mu \in P(S)$, $\{\mu^n\}$ 为胎紧序列，$G(\mu)$ 为其聚点集，λ 为 $G(\mu)$ 的单位元，令 $G \triangleq \operatorname{supp} G(\mu) = \overline{\bigcup\limits_{\nu\in G(\mu)} S_\nu}$, 则

(1) $G = \bigcup\limits_{\nu\in G(\mu)} S_\mu$ 为 S 的闭子群;

(2) S_λ 是 G 的一个不变子群;

(3) $\forall \nu \in G(\mu)$, $g \in S_\nu$ 有 $\nu = \lambda * \delta_g = \delta_g * \lambda$.

证　(1) 由引理 3 的 (1) 知 $G(\mu)$ 为紧群，从而 $G(\mu)$ 为完全简单半群，由引理 4 知 $G = \bigcup\limits_{\nu\in G(\mu)} S_\nu$ 为 S 的闭的完全简单半群，由引理 2 知 $G = \bigcup\limits_{\nu\in G(\mu)} S_\nu$ 为 S 的闭子群.

(2) 由推论 2 知 S_λ 为 G 的一个子群，再证 S_λ 为 G 的一个不变子群．$\forall a \in S_\lambda$, $\forall g \in G$, 由 (1) 知 $\exists \nu \in G(\mu)$, s.t. $g \in S_\nu$, 下证 $gag^{-1} \in S_\lambda$: 由 $g \in S_\nu$ 知 $g^{-1} \in S_{\nu^{-1}}$,

这时因为：$\exists \nu^{-1} \in G(\nu)$, s.t. $\nu * \nu^{-1} = \lambda$, 对于 $h \in S_{\nu^{-1}} \subset G$, $g \cdot h \in S_\nu \cdot S_{\nu^{-1}} \subset S_{\nu*\nu^{-1}} = S_\lambda$, $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} \in S_\lambda$; $g^{-1} = h(h^{-1}g^{-1}) \in S_{\nu^{-1}} \cdot S_\lambda \subset S_{\nu^{-1}*\lambda} = S_{\nu^{-1}}$; 所以 $gag^{-1} \in S_\nu \cdot S_\lambda \cdot S_{\nu^{-1}} \subset S_{\nu*\lambda*\nu^{-1}} = S_\lambda$, 故 S_λ 为 G 的不变子群.

(3) $\forall \nu \in G(\mu)$, $\forall g \in S_\nu$, $\forall g_1 \in S_\nu$, 有 $g_1^{-1} \in S_{\nu^{-1}}$, $g_1^{-1}g \in S_{\nu^{-1}} \cdot S_\nu \subset S_{\nu^{-1}*\nu} = S_\lambda$, $g = g_1(g_1^{-1}g) \in g_1 \cdot S_\lambda$, 所以 $S_\nu \subset g_1 \cdot S_\lambda$; 另一方面，$g_1 \cdot S_\lambda \subset S_\nu \cdot S_\lambda \subset S_{\nu*\lambda} = S_\nu$; 所以有 $S_\nu = g_1 \cdot S_\lambda$, $\forall g_1 \in S_\nu$, 由于 S_λ 为 G 的不变子群，所以 $S_\nu = g_1 \cdot S_\lambda = S_\lambda \cdot g_1$, $\forall g_1 \in S_\nu$ 成立. 故 $S_\lambda = g_1^{-1}S_\nu = S_\nu g_1^{-1}$, 又由于 G 为 S 的闭群，$S_\nu \subset G$ 为闭集，由引理 5 知 $g_1^{-1}S_\nu$ 和 $S_\nu g_1^{-1}$ 均为闭集；故

$$S_\lambda = g_1^{-1}S_\nu = S_\nu g_1^{-1} = \overline{g_1^{-1}S_\nu} = \overline{S_\nu g_1^{-1}} = S_{\delta_{g_1^{-1}}*v} = S_{v*\delta_{g_1^{-1}}}.$$

下证 $\nu * \delta_{g_1^{-1}}$ 为 S_λ 上的不变测度：

$\forall h \in S_\lambda$, 由于 λ 为 S_λ 上的 Harr 测度 (群上的不变测度为 Harr 测度), 所以 $\lambda * \delta_h = \delta_h * \lambda = \lambda$; 又 $\nu \in G(\mu)$, λ 为 $G(\mu)$ 的单位元，故 $\lambda * \nu = \nu = \nu * \lambda$, 所以有：

$$\delta_h * \nu = \delta_h * (\lambda * \nu) = (\delta_h * \lambda) * \nu = \lambda * \nu = \nu,$$

所以 $\delta_h * \nu * \delta_{g_1^{-1}} = \nu * \delta_{g_1^{-1}}$.

综上所述 $\nu * \delta_{g_1^{-1}}$ 为 S_λ 上 Harr 测度，由 Harr 测度的唯一性知 $\nu * \delta_{g_1^{-1}} = \lambda$, 即 $\nu = \lambda * \delta_{g_1}$, $\forall g_1 \in S_\nu$; 类似可得 $\nu = \delta_{g_1} * \lambda$ $(\forall g_1 \in S_\nu)$, 所以，$\nu = \lambda * \delta_g = \delta_g * \lambda$ $(\forall g \in S_\nu)$.

推论 3 条件同引理 6, 且设 $e \in S_\lambda \subset G$ 为单位元，则 $\exists g \in S_{\mu*\lambda} \subset G$, 使得 $S_{\mu*\delta_e} \subset g \cdot S_\lambda$.

证 由引理 3 的 (3) 知：$\mu * \lambda \in G(\mu)$, 再由引理 6 知 $\mu * \lambda = \lambda * \delta_g = \delta_g * \lambda$, 其中 $g \in S_{\mu*\lambda} \subset G$, 故 $S_{\mu*\lambda} = S_{\lambda*\delta_g} = S_{\delta_g*\lambda}$

$$S_\mu \cdot e \subset S_\mu \cdot S_\lambda \subset S_{\mu*\lambda} = S_{\delta_g*\lambda} = \overline{g \cdot S_\lambda},$$

从而 $S_{\mu*\delta_e} = \overline{S_\mu \cdot e} \subset \overline{g \cdot S_\lambda}$, 由引理 5 知 $g \cdot S_\lambda$ 为闭的，所以 $S_{\mu*\delta_e} \subset g \cdot S_\lambda$.

引理 7 设 S 为局部紧 H 半群，$\mu \in P(S)$, $\{\mu^n\}$ 为胎紧的，$G(\mu)$ 为其聚点集，λ 为 $G(\mu)$ 的单位元，$e \in S_\lambda \subset \operatorname{supp} G(\mu) \triangleq G$ 为单位元，则 (1) $G = \overline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e} = F$, 其中 $F \triangleq \overline{[S_{\mu*\delta_e}]}$ 为有 $S_{\mu*\delta_e}$ 生成的闭群；

(2) 若 $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} \neq \emptyset$, 则 $G = \underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e}$. 在证明此引理前先给出两个记号：

对 $\mu \in P(S)$, 记

$$\overline{\lim} S_{\mu^n} = \bigcap_{m\ge1} \overline{\bigcup_{n\ge m} S_{\mu^n}} = \{x \in S,\ \forall 开 O_x \ni x,\ \exists \{n_i\} \subset \{n\} \text{ s.t. } O_x \cap S_{\mu^{n_i}} \neq \emptyset\};$$

$$\underline{\lim}\, S_{\mu^n} = \overline{\bigcup_{m\ge1} \bigcap_{n\ge m} S_{\mu^n}} = \{x \in S,\ \forall 开 O_x \ni x,\ \exists n_0 \ge 1,\ 当\ n > n_0\ 时,\ O_x \cap S_{\mu^n} \neq \emptyset\}.$$

证 (1) 先证 $G \subset \overline{\lim}\, S_{\mu^n}$. 由引理 6 的 (1) 知 $G = \bigcup\limits_{\nu\in G(\mu)} S_\nu$, 设 $x \in G$, $\exists \nu \in G(\mu)$, s.t. $x \in S_\nu$, $x \overline{\in} \overline{\lim}\, S_{\mu^n}$, 则 $\exists m_0 \ge 1$, s.t. $x \overline{\in} \overline{\bigcup\limits_{n\ge m_0} S_{\mu^n}}$, 从而 $\exists$ 开 $O_x \ni x$, s.t. $O_x \cap \big(\bigcup\limits_{n\ge m_0} S_{\mu^n}\big) = \emptyset$, 故 $O_x \subset \big(\bigcup\limits_{n\ge m_0} S_{\mu^n}\big)^c = \bigcap\limits_{n\ge m_0} S_{\mu^n}^c$, 从而 $\mu^n(O_x) = 0$, $\forall n \ge m_0$ 成立；由 $\nu \in G(\mu)$ 知，$\exists \{n_i\} \subset \{n\}$, s.t. $\mu^{n_i} \to \nu$ $(n_i \to \infty)$. 因为当 $n_i \ge m_0$ 时，$\mu^{n_i}(O_x) = 0$, 所以

$0 \le \nu(O_x) \le \lim_{n_i} \inf \mu^{n_i}(O_x) = 0$, 即 $\nu(O_x) = 0$, 这与 $x \in S_\nu$ 矛盾，所以 $x \in \overline{\lim} S_{\mu^n}$, 故 $G \subset \overline{\lim} S_{\mu^n}$. 另外，由引理 3 的 (3) 知 $\mu * \lambda \in G(\mu)$,

$$S_{\mu*\delta_e} = \overline{S_\mu \cdot e} \subset \overline{S_\mu \cdot S_\lambda} = S_{\mu*\lambda} \subset G.$$

由引理 6 的 (1) 知 G 为闭群，从而由 $S_{\mu*\delta_e}$ 生成的闭群存在，且

$$F \triangleq \overline{[S_{\mu*\delta_e}]} \subset G. \tag{1.1}$$

因为 $S_{\mu*\delta_e} \subset G$, 所以 $(\mu*\delta_e)^n \in P(G)$ (事实上，$S_{(\mu*\delta_e)^n} = \overline{S^n_{\mu*\delta_e}} \subset G$); 又因为 e 为群 G 的单位元，所以 $\forall x \in G$, $\forall E \in B(S)$, 有

$$Ex^{-1}e^{-1} = \{y \in S : y \cdot e \cdot x \in E\} = \{y \in S : y \cdot x \in E\} = Ex^{-1},$$

故

$$\begin{aligned}(\mu*\delta_e)^n(E) &= \int_S (\mu*\delta_e)(Ex^{-1})(\mu*\delta_e)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \int_G (\mu*\delta_e)(Ex^{-1})(\mu*\delta_e)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_G \mu(Ex^{-1}e^{-1})(\mu*\delta_e)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \int_G \mu(Ex^{-1})(\mu*\delta_e)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_S \mu(Ex^{-1})(\mu*\delta_e)^{n-1}\,\mathrm{d}x = \mu*(\mu*\delta_e)^{n-1}(E).\end{aligned}$$

依次类推知 $(\mu*\delta_e)^n = \mu^n * \delta_e$, 于是

$$\begin{aligned} G &= G \cdot e \subset (\overline{\lim} S_{\mu^n}) \cdot e \subset \overline{\lim} S_{\mu^n} * \delta_e \\ &= \overline{\lim} S_{(\mu*\delta_e)^n} \subset \overline{\bigcup_{n\ge1} S_{(\mu*\delta_e)^n}} \subset \overline{\bigcup_{n\ge1} \overline{S^n_{\mu*\delta_e}}} \subset \overline{[S_{\mu*\delta_e}]} \triangleq F. \end{aligned} \tag{1.2}$$

总之，由 (1), (2) 两式得出：

$$G = \overline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e} = \overline{\bigcup_{n\ge1} S_{\mu^n*\delta_e}} = \overline{[S_{\mu*\delta_e}]} \triangleq F.$$

(2) 由于 G 为群，故只需证明 $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e}$ 为 G 的理想即可.

在 (1) 的证明中已得出 $G = \overline{\bigcup_{n\ge1} S_{\mu^n*\delta_e}}$, $\forall g_1 \in S_{\mu^m*\delta_e}$ $(m \ge 1)$, $\forall g_2 \in \underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e}$, 以下证明 $g_1 \cdot g_2$ 和 $g_2 \cdot g_1 \in \underline{\lim}\, S_{\mu^n*e}$.

对 $g_1 \cdot g_2$ 的任意邻域 U, 存在 g_2 的邻域 V, s.t. $g_1 \cdot V \subset U$; 因为 $g_2 \in \underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$, 存在 $m_0 \ge 1$, 当 $n > m_0$ 时，$V \cap S_{\mu^n*\delta_e} \ne \emptyset$.

令 $n > m + m_0$, 取 $g_3 \in V \cap S_{\mu^{n-m}*\delta_e}$, 那么 $g_1 \cdot g_3 \in g_1 \cdot V \subset U$ 且

$$g_1 \cdot g_3 \in S_{\mu^m*\delta_e} \cdot S_{\mu^{n-m}*\delta_e} = S_{(\mu*\delta_e)^m} \cdot S_{(\mu*\delta_e)^{n-m}} \subset S_{(\mu*\delta_e)^n},$$

即

$$U \cap S_{(\mu*\delta_e)^n} = U \cap S_{\mu^n*\delta_e} \ne \emptyset,$$

这表明 $g_1 \cdot g_2 \in \underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$. 类似可证 $g_2 \cdot g_1 \in \underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$. 由 S 中乘法的连续性和 $\underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$ 的闭性知，$\forall g_1 \in G$, $\forall g_2 \in \underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$, 有 $g_1 \cdot g_2$ 和 $g_2 \cdot g_1 \in \underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$, 这表明 $\underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$ 为 G 的理想，又 G 为群，所以 $G = \underline{\lim} S_{\mu^n*\delta_e}$.

2 主要结论及其证明

定理 S 为局部紧 H 半群， $\mu \in P(S)$, $\{\mu^n\}$ 为胎紧序列， $G(\mu)$ 为其聚点集， λ 为 $G(\mu)$ 的单位元， $e \in S_\lambda \subset \operatorname{supp} G(\mu) \triangleq G$ 为单位元， $F \triangleq \overline{[S_{\mu*\delta_e}]}$ 为由 $S_{\mu*\delta_e}$ 生成的闭群，则下列条件等价：

(1) $\{\mu^n\}$ 收敛;

(2) $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} \neq \emptyset$;

(3) $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} = \overline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e}$;

(4) $F = \overline{[\bigcup_{n\geq 1} S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e}]}$;

(5) F 的任何闭的不变子群的任何真陪集不包含 $S_{\mu*\delta_e}$;

(6) S_λ 在 F 中的任何真陪集都不包含 $S_{\mu*\delta_e}$;

(7) λ 为 F 上的 Harr 测度，即 $\lambda(Bx^{-1}) = \lambda(x^{-1}B) = \lambda(B), \forall x \in F, \forall B \in B(S)$, 且 $S_\lambda = F$.

证 (1)$\Rightarrow$(2) 设 $\mu^n \to \nu\ (n \to \infty)$, 则有 $\mu^n*\delta_e \to \nu*\delta_e\ (n\to\infty)$ 且 $\nu*\delta_e \in P(G)$, (事实上，$P(S)$ 在弱收敛意义下为拓扑半群，而且 $S_{\mu*\delta_e} = \overline{S_\mu \cdot e} \subset \overline{S_\mu \cdot S_\lambda} = S_{\mu*\lambda} \subset G$ (由引理 3 的 (3) 知 $\mu*\lambda \in G(\mu)$, $S_{\mu^n*\delta_e} = S_{(\mu*\delta_e)^n} = \overline{S^n_{\mu*\delta_e}} \subset G$; $1 = \limsup\limits_n \mu^n*\delta_e(G) \leq \nu*\delta_e(G)$).

若 $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} = \emptyset, \forall g \in S_{\nu*\delta_e}, \exists$ 开 $O_g \ni g$, $\exists \{n_i\} \subset \{n\}$, s.t. $O_g \cap S_{\mu^{n_i}*\delta_e} = \emptyset\ (\forall i)$, 所以 $S_{\mu^{n_i}*\delta_e} \subset O_g^c\ (\forall i)$, 故有 $\overline{\bigcup_i S_{n^{n_i}*\delta_e}} \subset O_g^c$. 仿引理 7(1) 中证明 $G \subset \overline{\lim}\, S_{\mu^n}$ 的方法易证下式成立:

$$\operatorname{supp} \overline{\{\mu^{n_i} * \delta_e,\ i = 1, 2, \cdots\}} \subset \overline{\bigcup_i S_{\mu^{n_i}*\delta_e}},$$

所以

$$\operatorname{supp} \overline{\{\mu^{n_i} * \delta_e,\ i \geq 1\}} \cap O_g = \emptyset, \tag{$*$}$$

又由于 $g \in S_{\nu*\delta_e} \cap O_g \subset \operatorname{supp} \overline{\{\mu^{n_i} * \delta_e,\ i\geq 1\}} \cap O_g$. 这与 $(*)$ 式相矛盾，故 $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} \neq \emptyset$.

(2)$\Rightarrow$(3) 是引理 7 的直接结论.

(3)$\Rightarrow$(4) 证明 $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} \subset \overline{\bigcup_{n\geq 1} S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e}}$. 由引理 7 知 $G = \underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e}$ 为群，$\forall y \in \underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e}$, y 可写成 $y = z\cdot w^{-1}$, 其中 $z, w \in \underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e}$; $\forall$ 开 $\widehat{O}_y \ni y$, $\emptyset \neq \widehat{O}_y \cap G$ 为 y 在 G 中开邻域，由 S 中乘法的连续性知：存在 z, w 在 G 中的开邻域 O_z, O_w, s.t. $O_z \cdot O_w^{-1} \subset \widehat{O}_y \cap G$; 对于 O_z, O_w, 存在 S 中的开邻域 $\widehat{O}_z \in z$, $\widehat{O}_w \ni w$, s.t. $O_z = \widehat{O}_z \cap G$, $O_w = \widehat{O}_w \cap G$; 注意到 $z, w \in \underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} = G$, 且

$$S_{\mu^n*\delta_e} = S_{(\mu*\delta_e)^n} = \overline{S^n_{\mu*\delta_e}} \subset F = G,$$

$\exists n_1 \geq 1$, s.t. $n \geq n_1$ 时， $\widehat{O}_z \cap S_{\mu^n*\delta_e} \neq \emptyset$, 因为 $\widehat{O}_z \cap S_{\mu^n*\delta_e} = \widehat{O}_z \cap G \cap S_{\mu^n*\delta_e} = O_z \cap S_{\mu^n*\delta_e}$, 所以 $O_z \cap S_{\mu^n*\delta_e} \neq \emptyset\ (n \geq n_1)$; 同理， $\exists n_2 \geq 1$, s.t. $n \geq n_2$ 时， $O_w \cap S_{\mu^n*\delta_e} \neq \emptyset$. 取 $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, 当 $n \geq n_0$ 时，有 $O_z \cdot O_w^{-1} \cap (S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e}) \neq \emptyset$, 故

$$\widehat{O}_y \cap [S_{\mu^n*\delta_e} \cdot (S^{-1}_{\mu^n*\delta_e})] \supset (\widehat{O}_y \cap G) \cap (S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e}) \supset O_z \cdot O_w^{-1} \cap (S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e}) \neq \emptyset,$$

所以

$$y \in \overline{\bigcup_{n\geq n_0} (S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e})} \subset \overline{\bigcup_{n\geq 1} (S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e})},$$

故 $\underline{\lim}\, S_{\mu^n*\delta_e} \subset \overline{\bigcup_{n\geq 1} (S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e})}$. 由引理 7 知， $F = \overline{[\bigcup_{n\geq 1} (S_{\mu^n*\delta_e} \cdot S^{-1}_{\mu^n*\delta_e})]}$.

(4) ⇒ (5) 假定存在 F 的闭不变子群 H, 在 $g \in F$, s.t. $S_{\mu*\delta_e} \subset H \cdot g$, 则 $S^2_{\mu*\delta_e} \subset (H \cdot g) \cdot (H \cdot g) = H \cdot g^2$, 类似可得 $S^n_{\mu*\delta_e} \subset H \cdot g^n$, 由引理 5 知 $H \cdot g^n$ 为闭的 ($\forall n \geq 1$), 所以：

$$\begin{aligned} &S_{(\mu*\delta_e)^n} = \overline{S^n_{\mu*\delta_e}} \subset \overline{H \cdot g^n} = H \cdot g^n, \qquad &\forall n \geq 1, \\ &S^{-1}_{(\mu*\delta_e)^n} \subset g^{-n} \cdot H, &\forall n \geq 1. \end{aligned}$$

故

$$S_{(\mu*\delta_e)^n} \cdot S^{-1}_{(\mu*\delta_e)^n} \subset H \cdot g^n \cdot g^{-n} H = H,$$

从而 $F \subset H$, 故 $F = H$. 这表明 F 的任何闭不变子群的任何真陪集不包含 $S_{\mu*\delta_e}$.

(5) ⇒ (6) 由引理 6 知 S_λ 为 F 的闭不变子群，从而由 (5) 知 (6) 成立.

(6) ⇒ (7) 由推论 3 知 $S_{\mu*\delta_e} \subset S_\lambda \cdot g$ ($g \in F$), 又由 (6) 成立，所以 $S_\lambda \cdot g = F$, $S_\lambda = F$, 又因为 λ 为幂等测度，S_λ 为群，所以 λ 为 F 上的 Harr 测度.

(7) ⇒ (1) $\forall \lambda_1 \in G(\mu)$, λ 为群 $G(\mu)$ 的单位元，所以

$$\lambda_1 * \lambda = \lambda * \lambda_1 = \lambda_1. \tag{2.1}$$

$\forall E \in B(S)$, 因为 λ 为 F 上 Harr 测度，所以 $\forall x \in F$, $\lambda(Ex^{-1}) = \lambda(x^{-1}E) = \lambda(E)$, 故

$$\begin{aligned} \lambda_1 * \lambda(E) &= \int_S \lambda(x^{-1}E)\lambda_1(\mathrm{d}x) = \int_{S_{\lambda_1}} \lambda(x^{-1}E)\lambda_1(\mathrm{d}x) \\ &= \int_{S_{\lambda_1}} \lambda(E)\lambda_1(\mathrm{d}x)\ \big(\text{因为 } S_{\lambda_1} \subset F\big) = \lambda(E), \end{aligned}$$

所以

$$\lambda_1 * \lambda = \lambda. \tag{2.2}$$

结合 (2.1), (2.2) 两式知 $\lambda = \lambda_1$, 即 $G(\mu) = \{\lambda\}$, 又由于 $\{\mu^n\}$ 为胎紧序列，所以 $\mu^n \to \lambda$ ($n \to \infty$).

推论 1 设 S 是满足条件 (C) 的紧半群 (即 S 为半群，且 $\forall x \in S$, $\forall e \in E(S)$, 有 $e \cdot x = x \cdot e$), $\mu \in P(S)$, $G(\mu)$ 为 $\{\mu^n\}$ 的聚点集，λ 为群 $G(\mu)$ 的单位元，$K \triangleq \overline{[S_{\mu*\delta_e}]}$, 其中 e 是群 $G \triangleq \operatorname{supp} G(\mu)$ 中的单位元，则 $K = G$, 且下面的条件等价：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^n$ 存在；

(ii) $\underline{\lim}\, S_{(\mu*\delta_e)^n} \neq \emptyset$;

(iii) $\underline{\lim}\, S_{(\mu*\delta_e)^n} = \overline{\lim}\, S_{(\mu*\delta_e)^n}$;

(iv) $K = \overline{\left[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S^n_{\mu*\delta_e} \cdot S^{-n}_{\mu*\delta_e}\right]}$;

(v) $S_{\mu*\delta_e}$ 不含在群 K 的任意真 N- 陪集中，其中 N 是 K 的任意正规闭子集；

(vi) $S_{\mu*\delta_e}$ 不含在群 K 的任意真 S_λ 陪集中；

(vii) λ 为 G 上的 Harr 测度.

(见 [1] 中定理.)

推论 2 [2] 中定理 2.

推论 3 Kawada-Itô 经典结果 (见 [6] 定理 4.8).

推论 4 S 为局部紧群，$u \in P(S)$, $\{\mu^n\}$ 为胎紧的，$G(\mu)$ 为其聚点集，λ 为 $G(\mu)$ 的单位元，则下列条件等价：

(i) $\{\mu^n\}$ 收敛;

(ii) $\underline{\lim}\, S_{\mu^n} \neq \emptyset$;

(iii) $\underline{\lim}\, S_{\mu^n} = \overline{\lim}\, S_{\mu^n}$;

(iv) $F = \overline{\big[\bigcup_{n\geq 1} S_{\mu^n}\cdot S_{\mu^n}^{-1}\big]}$, 其中 $F = \overline{[S_\mu]}$ 是由 S_μ 生成的极小闭子群;

(v) F 的任何闭正规子群的任何真陪集不包含 S_μ;

(vi) S_λ 在 F 中的任何真陪集不包含 S_μ;

(vii) λ 为 F 上的 Harr 测度, 即 $\forall x\in F$, $\forall B\in B(S)$ 有 $\lambda(Bx^{-1}) = \lambda(x^{-1}B) = \lambda(B)$ 且 $S_\lambda = F$.

参 考 文 献

1 徐侃. 一类紧半群上概率测度卷积幂的弱收敛性. 应用数学学报, 1996, 19(2): 239–243
(XU Kan. Weak Convergence of Convolution Power Sequence of Probability Measures on Some Compact Semigroups. *Acta Math. Appl. Sinica*, 1996, 19(2): 239–243)

2 徐侃. 紧拓扑半群上概率测度卷积序列的极限性质. 数学学报, 1996, 39(6): 840–847
(XU Kan. Limit Behaviors of Convolution Sequences of Probability Measures on Compact Topological Semigroups. *Acta Math. Sinica*, 1996, 39(6): 840–847)

3 徐侃, 刘锦萼. 紧交换半群上概率测度卷积序列的极限性质. 系统科学与数学, 1992, 12(1): 89–93
(XU Kan, LIU Jin'e. Limit Bahaviors of Convolution Sequence of Probability Measures on Compact Abelian Semigroups. *Systems Sciences and Mathematical Sciences*, 1992, 12(1): 89–93)

4 徐侃. 局部紧拓扑半群上概率测度卷积幂的若干极限定理. 应用概率统计, 1997, 13(1): 81–86
(XU Kan. Some Limit Behaviors of Convolution Power Sequence of Probability Measure on Locally Compact Semigroups. *Appl. Prob. and Statis.*, 1997, 13(1): 81–86)

5 刘锦萼. 局部紧半群上概率测度的强一致组合收敛性. 中国科学(A 辑), 1996, 26(11): 984–990
(LIU Jin'e. Strong Uniform Convergence of Composition Sequences of Probability Measures on Locally Compact Topological Semigroups. *Science in China* (Series A), 1997, 40(1): 37–44)

6 Mukherjea A, Tserpes N A. Measures on Topological Semigroups. Lecture Notes in Math., Vol. 547, New York: Springer-Verlag, 1976

WEAK CONVERGENCE OF CONVOLUTION POWER SEQUENCE OF PROBABILITY MEASURE ON LOCALLY COMPACT H-SEMIGROUPS

ZHANG HUI

(*Department of Basic Science, Shan Dong Finance Institute, Jinan* 250014)

LIU JIN'E

(*School of Mathematics and System Science, Shandong University, Jinan* 250100)

Abstract In this paper, we discuss the property of the weak convergence of probability measure convolution power sequence on locally compact H semigroups. We rebuild some kind of Kawada-Itô conclusion on locally compact H-semigroups. Because the probability measure convolution power sequence must be tight on compact semigroups. Both the Kawada-Itô classical conclusion is the example of the paper, and the Theorem in [1] and Theorem 2 in [2] are all corollaries of the Theorem in this paper.

Key words Locally compact H-semigroup, probability measure, convolution power