对流扩散问题流线扩散法的最优误差估计 *

金大永
(河北工业大学理学院，天津 300130)
(E-mail: jindayong@eyou.com)

张书华
(天津财经大学理工学院，天津 300222)
(E-mail: szhang@tjufe.edu.cn)

周俊明
(河北工业大学理学院，天津 300130)
(E-mail: zhoujunming@eyou.com)

摘　要　在本文中，我们考虑对流占优扩散问题流线扩散双线性有限元方法. 原先的文献在 $\varepsilon \le h^2$ 的条件下，得到了 L^2- 模最优误差估计，而本文则在 $\varepsilon \le h$ 的条件下得到了相同估计.

关键词　流线扩散法；最优误差估计；对流占优
MR(2000) 主题分类　65N30
中图分类　O.228

1　引言

考虑对流占优扩散问题

$$-\varepsilon\Delta u + b\cdot\nabla u + cu = f, \qquad \text{in} \;\; \Omega, \tag{1}$$
$$u = 0, \qquad \text{on} \;\; \partial\Omega \tag{2}$$

的有限元方法，其中 Ω 是有界矩形区域， ε 为小的正参数且 $\varepsilon \le h$， $b = (b_1, b_2)$ 为向量函数， b_1, b_2, c, f 均为充分光滑的函数，且满足

$$\inf_{x\in\Omega}\Big(c(x) - \frac{1}{2}\mathrm{div}\, b(x)\Big) \ge c_0 > 0. \tag{3}$$

众所周知，对于对流扩散问题，标准有限元法常产生数值震荡，而古典粘性 Galerkin 法精度较低. 为此， Hughes 和 Brooks 在 [1,2] 中提出了流线扩散 (SD) 法. 该方法是一种求解定常的对流占优扩散问题的粘性有限元方法. 随后 Johnson 和 Nävert[3] 将此方

本文 2001 年 1 月 31 日收到. 2001 年 1 月 18 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10471103 号) 资助项目.

法推广到发展型对流扩散问题，这种方法具有良好的数值稳定性和较高的精度，因此越来越受到人们的喜爱.

对问题 (1), (2), [4] 证明了它的稳定性， [5] 证明了当 $\varepsilon \le h^2$ 时的超收敛性质. 而实际计算中常取 $\varepsilon = O(h)$, 故本文利用积分恒等式来证明当 $\varepsilon \le h$ 时，在一致矩形剖分下， [5] 的最优收敛性质依然成立.

2 问题弱形式及已有的结果

取 $V = H_0^1(\Omega)$, 则问题 (1), (2) 的标准 Galerkin 方法的弱形式为： $\forall \in v \in V$, 求 $u \in V$ 满足：

$$\varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u + cu, v) = (f, v). \tag{4}$$

本文中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 上的内积， $\|\cdot\|_m$, $|\cdot|_m$ 分别表示 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)(W^{m,2}(\Omega))$ 上的模和半模. 可以证明：在 (3) 成立时 (4) 有唯一解. 但由于利用标准 Galekin 方法求解问题 (1), (2) 在实际计算中数值解不稳定，因而常常采用流线扩散法. 流线扩散法为： $\forall v \in V$, 求 $u \in V$ 满足

$$B(u, v) = L(v), \tag{5}$$

其中双线性形式 $B(u, v)$ 和线性形式 $L(v)$ 分别为

$$\begin{aligned} &B(u, v) = \varepsilon(\nabla u, \nabla v) + (b \cdot \nabla u + cu, v) + (\varepsilon \Delta u + b \cdot \nabla u + cu, \delta b \cdot \nabla v), \\ &L(v) = (f, v + \delta b \cdot \nabla v), \end{aligned}$$

这里 $\delta = O(h)$. 定义

$$|||v|||^2 = \varepsilon|v|_1^2 + c_0\|v\|_0^2 + \delta\|b \cdot \nabla v\|_0^2.$$

对区域 Ω 进行一致矩形剖分，并记剖分 $\Gamma_h = \{\tau_k\}$, 有限元空间

$$V_0^h = \left\{v : v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ v|_{\tau_k} \in Q_1(\tau_k),\ \forall\, \tau_k \in \Gamma_h\right\},$$

其中

$$Q_1(\tau_k) = \operatorname{span}\{1, x, y, xy\}.$$

V_0^h 具有以下逆性质：存在与 h 无关的常数 C, $\forall v \in V_0^h$ 都有

$$\|\nabla v\|_0 \le Ch^{-1}\|v\|_0, \|v\|_0^2 = \int_\Omega v^2 d\Omega.$$

对 $V \in V_0^h$, $\Delta V = 0$, 当 h 适当小时，

$$\begin{aligned} B(V, V) =&\varepsilon|V|_1^2 + (c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b, V^2) + \delta\|b \cdot \nabla V\|^2 + \delta(-\varepsilon\Delta V + cV, b \cdot \nabla V) \\ =&\varepsilon|V|_1^2 + (1-\delta)(c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b, V^2) + \delta\|b \cdot \nabla V\|^2 \ge \frac{1}{2}|||V|||^2. \end{aligned} \tag{6}$$

这说明问题 (5) 具有唯一解，并且格式 (5) 稳定. 为得到 L^2 模的误差估计，我们引入 (1), (2) 解的双线性插值 u^I. 显然

$$|||u - u^I||| \le C\big(\delta^{\frac{1}{2}}h + \varepsilon^{\frac{1}{2}}h + h^2\big)\,|u|_2.$$

因为

$$B(u^h - u^I, v) = B(u - u^I, v), \qquad v \in V_0^h, \tag{7}$$

其中， $u^h \in V_0^h$ 为式 (5) 的解.

由

$$
\begin{aligned}
&\big(b\cdot\nabla(u-u^I),v\big) = -(u-u^I, b\cdot\nabla v) + \big(\nabla\cdot b,(u-u^I)v\big),\\
&\big|(b\cdot\nabla(u-u^I),v)\big| \le C(\delta^{-\frac{1}{2}}h^2+h^2)\,|u|_2|||v|||,
\end{aligned}
$$

可以得到

$$
\big|B(u-u^I,v)\big| \le C\big(\varepsilon^{\frac{1}{2}}h+\delta^{-\frac{1}{2}}h^2+h^2+\varepsilon\delta^{\frac{1}{2}}+\delta^{\frac{1}{2}}h\big)\,|u|_2|||v|||.
$$

当 $\varepsilon \le h,\ \delta = O(h)$ 时， $|||u-u^h||| \le Ch^{\frac{3}{2}}|u|_2$.

3 $L^2(\Omega)$ 下的最优误差估计

首先， $\forall\tau\in\Gamma_h$, 引入误差函数如下：

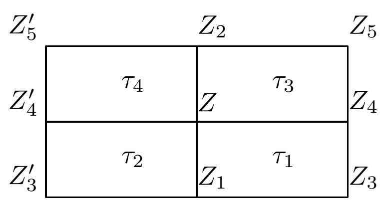
$$
E(x) = \frac{1}{2}\big((x-x_\tau)^2-h_x^2\big),\qquad F(y) = \frac{1}{2}\big((y-y_\tau)^2-h_y^2\big),
$$

其中 (x_τ,y_τ) 为单元 τ 的中心点坐标， h_x,h_y 分别为单元 τ 的 x 和 y 方向上边长的一半， u^h 为格式 (5) 的解， $u^I\in V_0^h$ 为 u 的双线性插值， $w=u-u^I$.

引理 3.1 设 $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ b_1\in W^{1,\infty}\ (i=1,2),\ h=\max\{h_x,h_y\}$, 则 $\forall v\in V_0^h$,

$$
\big|(b\cdot\nabla w,v)\big| \le Ch^2\|u\|_3\|v\|_0.
$$

证 考虑两个相邻单元 τ_1 和 τ_2, 如图. 设 $z=(x_i,y_j),\ z_1=(x_i,y_j-2h_y),\ z_4=(x_i+2h_x,y_j),\ V(z_i)$ 为 V 在 z_i 点的函数值， z_1,z 为 τ_1 与 τ_2 的交点，



设单元的两边分别平行于 x 轴和 y 轴， $\varphi_z(x,y)$ 为有限元空间 V_0^h 的基函数， $z=(x_i,y_j)$, 则

$$
\varphi_z(x,y) = \begin{cases}
\dfrac{(x_i+2h_x-x)(y+2h_y-y_j)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_1,\\
\dfrac{(x+2h_x-x_i)(y-y_j+2h_y)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_2,\\
\dfrac{(x_i+2h_x-x)(y_j+2h_y-y)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_3,\\
\dfrac{(x-x_i+2h_x)(y_j+2h_y-y)}{4h_xh_y}, & (x_i,y_j)\in\tau_4,\\
0, & \text{其它}.
\end{cases}
$$

首先，$\forall v \in V_0^h$, 由

$$v(x,y) = v(x_1,y_1) + (x-x_1)v_x(x_1,y_1) + (y-y_1)v_y(x_1,y_1) + (x-x_1)(y-y_1)v_{xy},$$
$$v_x(x_1,y_1) = v_x(x,y) - (y-y_1)v_{xy}, v_y(x_1,y_1) = v_y(x,y) - (x-x_1)v_{xy},$$

得

$$\big|v(x_1,y_1)\big| \le 2h_x|v_x| + 2h_y|v_y| + 4h_xh_y|v_{xy}|.$$

注意到

$$(b\cdot\nabla w, v) = -(w, b\cdot\nabla v) + (\nabla\cdot b, wv),$$

由 Schwartz 不等式及插值基本定理，得

$$\big|(\nabla\cdot b, wv)\big| \le Ch^2\|u\|_2\|v\|_0,$$
$$(w, b\cdot\nabla v) = \sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau (b_1wv_x + b_2wv_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

在 τ_2 中，令 $X = x + 2h_x,\ Y = y$, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_1\bigcup\tau_2} b_1wv(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\int_{\tau_1}\big(b_1(x,y)w(x,y) - b_1(x+2h_x,y)w(x+2h_x,y)\big)v(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\int_{\tau_1}\big(b_1(x,y) - b_1(x+2h_x,y)w(x,y)\big)v(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
+&\int_{\tau_1} b_1(x+2h_x,y)\big(w(x,y) - w(x+2h_x,y)\big)v(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\big|(w(x,y) - w(x+2h_x,y))\big| = \big|\big[u(x,y) - u(x+2h_x,y)\big] - \big[u^I(x,y) - u^I(x+2h_x,y)\big]\big|\\
\le& Ch^2\big\|u(x,y) - u(x+2h_x,y)\big\|_2 = Ch^2\Big\|\int_{x+2h_x}^x \frac{\partial u}{\partial z}(z,y)\,\mathrm{d}z\Big\|_2 \le Ch^3\|u\|_3,
\end{aligned}$$

故

$$\int_{\tau_1\cup\tau_2} b_1wv(z_1)\frac{(2h_y-y)}{4h_xh_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le Ch^2\big(\|u\|_{2,\tau_1\cup\tau_2} + \|u\|_{3,\tau_1\cup\tau_2}\big)\,\|v\|_{0,\tau_1\cup\tau_2},$$

上式的推导利用了逆性质．从而

$$\Big|\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau b_1wv_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big| \le Ch^2\|u\|_3\|v\|_0.$$

同理利用 τ_1 和 τ_3, 可证

$$\Big|\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau b_2wv_y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big| \le Ch^2\|u\|_3\|v\|_0,$$

从而引理得证.

引理 3.2[6] 设 $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $h=\max\{h_x,h_y\}$, $\forall\, v\in V_0^h$, 成立

$$(w_y,v_x)\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1,\qquad (w_x,v_y)\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1.$$

证

$$\begin{aligned}(w_x,v_y)=&\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau Fu_{xyy}(v_y-(x-x_\tau)v_{xy})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&+\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau u_{xxy}E(x)v_x-\Big(\int\limits_{\partial\Omega_{上}}-\int\limits_{\partial\Omega_{下}}\Big)u_{xx}E(x)v_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

当 $v\in V_0^h$ 时, $v_x|_{\partial\Omega_{上}}=v_x|_{\partial\Omega_{下}}=0$, 故

$$\int_\Omega w_xv_ydxdy\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1.$$

同理可证

$$\big|(w_y,v_x)\big|\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1.$$

引理 3.3 设 $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $h=\max\{h_x,h_y\}$, $\forall\, v\in V_0^h$, 成立

$$(w_x,v_x)\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1,\qquad (w_y,v_y)\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1.$$

证

$$\begin{aligned}(w_x,v_x)&=\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau\Big\{Fv_x-\frac{1}{3}(F^2)_yv_{xy}u_{xyy}\Big\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\le\sum_{\tau\in\Gamma_h}h_y^2\int_\tau\big(|v_x|+h_y|v_{xy}|\big)\,u_{xyy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1.\end{aligned}$$

同理可证 $\big|(w_y,v_y)\big|\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_1$.

注 1 利用分部积分还可证明 [7]

$$(w_x,v_x)\le Ch^2\|u\|_4\|v\|_0,\qquad (w_y,v_y)\le Ch^2\|u\|_4\|v\|_0.$$

引理 3.4 在引理 3.3 的条件下成立以下不等式

$$\big|(b\cdot\nabla w,\delta b\cdot\nabla v)\big|\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_0.$$

证 引入 b_i $(i=1,2)$ 的平均函数 $\overline{b}_i|_\tau=\int_\tau b_i\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/|\tau|$, 这里 $|\tau|$ 为单元 τ 的面积, 则

$$\begin{aligned}&|b_i-\overline{b}_i|\le Ch\|b_i\|_{1,\infty},\\&(b\cdot\nabla w,\delta b\cdot\nabla v)\\\le&\sum_{\tau\in\Gamma_h}\big(\overline{b}\cdot\nabla w,\delta\overline{b}\cdot\nabla v\big)_\tau+\sum_{\tau\in\Gamma_h}\big((b-\overline{b})\cdot\nabla w,\delta b\cdot\nabla v\big)\\&+\sum_{\tau\in\Gamma_h}\big(\overline{b}\cdot\nabla w,\delta(b-\overline{b})\cdot\nabla v\big)\end{aligned}$$

$$\le \sum_{\tau\in\Gamma_h}\left(\overline{b}\cdot\nabla w,\delta\overline{b}\cdot\nabla v\right)_\tau + C\|b\|_{1,\infty}h^2\delta\|b\cdot\nabla v\|_0\|u\|_2 + Ch^2\delta\|b\|_{0,\infty}\|b\|_{1,\infty}\|u\|_2\|v\|_1,$$

$$\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\overline{b}\cdot\nabla w,\delta\overline{b}\cdot\nabla v)_\tau = \delta\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau \overline{b}_1^2 w_x v_x + \overline{b}_2^2 w_y v_y + \overline{b}_1\overline{b}_2 w_x v_y + \overline{b}_1\overline{b}_2 w_y v_x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

注意到相邻单元 τ_k,τ_l 有 $|\overline{b}_i|\tau_k - \overline{b}_i|\tau_l| \le Ch$, 故由引理 3.2 和引理 3.3, 得

$$\sum_{\tau\in\Gamma_h}(\overline{b}\cdot\nabla w,\delta\overline{b}\cdot\nabla v)_\tau \le Ch^2\delta\|u\|_3\|v\|_1.$$

再结合 $\delta = O(h)$ 和逆性质，本引理得证.

引理 3.5 设 b_1, b_2 均属于 $W^{1,\infty}(\Omega)$, $h=\max\{h_x,h_y\}$, $\forall v\in V^h$, 则

$$(\varepsilon\Delta w,\delta b\cdot\nabla v)\le Ch^2\|u\|_3\|v\|_0.$$

证

$$\begin{aligned}
&(\varepsilon\Delta w,\delta b\cdot\nabla v)\\
=&(\varepsilon\Delta w,\delta(b-\overline{b})\cdot\nabla v)+(\varepsilon\Delta w,\delta\overline{b}\cdot\nabla v)\\
=&\delta\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau \varepsilon\Delta w\overline{b}_1\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\sum_{\tau\in\Gamma_h}\int_\tau \varepsilon\Delta w\overline{b}_2\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+C\varepsilon\delta\|b\|_{1,\infty}\|u\|_2\|v\|_0,
\end{aligned}$$

类似引理 3.1 的证明和 $\varepsilon<h$, $\delta=O(h)$, 再注意到 $|\overline{b}_1|_{\tau_1}-\overline{b}_1|_{\tau_3}=O(h)$, 得

$$\left|\delta\int_{\tau_1\cup\tau_3}\varepsilon\Delta w\overline{b}_1\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le\delta\varepsilon C\|u\|_{3,\tau_1\cup\tau_3}\|v\|_{0,\tau_1\cup\tau_3},$$

和

$$\left|\delta\int_{\tau_1\cup\tau_2}\varepsilon\Delta w\overline{b}_2\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\le\delta\varepsilon C\|u\|_{3,\tau_1\cup\tau_3}\|v\|_{0,\tau_1\cup\tau_3}.$$

综合以上三式，本引理得证.

定理 3.1 设 $\varepsilon\le h$, b, c 满足式 (3), 且 b_1, $b_2\in W^{1,\infty}(\Omega)$, $c\in L^\infty(\Omega)$, $u\in H^3(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, u^h 为式 (5) 的解, u^I 为 u 的双线性插值，则存在与 h 无关的常数 C 使得 $|||u^h-u^I|||\le Ch^2\|u\|_3$.

证 在式 (6) 中令 $V=u^h-u^I$, 可以得到

$$B(u^h-u^I,u^h-u^I)\ge\frac{1}{2}|||u^h-u^I|||^2.$$

由引理 3.1–3.5, 知

$$B(u-u^I,u^h-u^I)\le Ch^2|||u^h-u^I|||.$$

综合以上两式，两端消去 $|||u^h-u^I|||$, 定理 3.1 得证.

定理 3.2 在定理 3.1 条件下，成立如下估计式:

$$||u-u^h||_0\le Ch^2\|u\|_3.$$

证 由插值性质 $\|u-u^I\|_0\le Ch^2|u|_2$ 及

$$\|u-u^h\|_0\le\|u-u^I\|_0+C|||u^I-u^h|||\le Ch^2|u|_2+|||u^h-u^I|||,$$

再由定理 3.1, 本定理得证.

参 考 文 献

[1] Hughes T, Brooks A. A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion. AMD F. E. M. for Convection Dominated Flows. New York: ASME, 1979, Vol.34

[2] Hughes T, Brooks A. A Theoretical Framework for Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions: Application to the Streamline-upwind Procedure. Finite Elements in Fluids. New York: Wiley, 1982

[3] Johnson C, Nävert U. An Analysis of Some Finite Element Methods for Advection-diffusion Problems. In: Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis (O. Axelsson et al., eds.). Amsterdam: North-Holland, 1981

[4] Nä U. A Finite Element Method for Convection-diffusion Problems. Ph.D. Thesis, Chalmers University of Technology Göteborg, 1982

[5] Zhou G, Rannacher R. How Accurate is the Streamline Diffusion Finite Element Method? *Mathematics of Computation*, 1997, 66(217): 31–34

[6] Lin Q, Yan N. The Construction and Analysis of High Efficiency Finite Element Methods. Shijiazhuang: Hebei University Publishers, 1996 (in Chinese)

[7] Lin Q, Zhu Q. The Preprocessing and Postprocessing for the Finite Element Method. Shanghai: Shanghai Technical Publishers, 1994 (in Chinese)

The Optimal Error Estimate of Streamline Diffusion Finite Element Method for Convection-diffusion Problem

JIN Dayong

(*Hebei University of Technology, Tianjin* 300130)

(*E-mail: jindayong@eyou.com*)

ZHANG Shuhua

(*Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin* 300222)

(*E-mail: szhang@tjufe.edu.cn*)

ZHOU Junming

(*Hebei University of Technology, Tianjin* 300130)

(*E-mail: zhoujunming@eyou.com*)

Abstract In this paper, we consider the streamline diffusion finite element method (SDFEM) with bilinear element for convection dominated diffusion problems. In the previous literature, under the condition of $\varepsilon \leq h^2$, the optimal error estimate in L^2 is derived for SDFEM scheme. However, in this paper, we'll improve the condition $\varepsilon \leq h^2$ as $\varepsilon \leq h$ and use a different method to prove the optimal error estimate in L^2 for SDFEM scheme.

Key words streamline diffusion method; optimal error estimate; convection-dominated

MR(2000) Subject Classification 65N30
Chinese Library Classification O.228