第 20 卷 第 11 期
1964 年 11 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 20, No. 11
November, 1964

关于光激射器的綫寬*

方励之　罗一祖
(中国科学技术大学)　(中国科学院)

提　　要

本文从描述光激射器工作的基本方程出发,討論了光激射器光束綫寬的"短期"(short-time)部分. 通常都以下式描写这部分綫寬:

$$\Delta \nu_s = \frac{8\pi h\nu(\Delta \nu')^2}{P}, \tag{1}$$

其中 $\Delta \nu'$ 是諧振腔电磁模的半寬度; ν 为光束頻率; P 为輸出功率. 我們的主要結論可以归結为以下三点: (1)綫寬主要是由与电磁模耦合的耗散体系引起的,与分子耦合的耗散体系的貢献是可以忽略的; (2)在单模近似下,只要分子的綫寬比电磁模的綫寬大得多,則(1)式是正确的; (3)如果多模諧振腔中激发模与其他模之間的相互作用是强的,則式(1)将被推广为

$$\Delta \nu_s = \frac{8\pi h\nu(\Delta \nu')^2}{P} + \frac{4h\nu(\Delta \nu')}{P} \sum_{\lambda' \neq \lambda} \frac{\gamma^2_{\lambda\lambda'}}{\gamma_{\lambda'}}, \tag{2}$$

其中 $\gamma_{\lambda\lambda'}$ 是相关弛豫系数; $\gamma_{\lambda'}$ 是模 λ' 的綫寬. 在某些情况下, 式(2)中第二項可以比其第一項还大. 所以,这可能是目前关于綫寬的实驗結果与由式(1)計算結果不相符合的原因之一.

一

受激发射光束的最重要特点之一是具有高度的相干性以及很窄的綫寬. 引起光激射器輸出頻率不稳的原因有两种,一种是所謂"长期"(long-time)的, 它是由于器件参数在工作过程中系統性变化(例如热膨胀等)引起的頻率漂移; 另一种是所謂"短期"(short-time)的,它是由于耗散系統引起的頻率涨落. 例如,具有无規相位的自发輻射光子与热輻射光子进入振蕩模引起的頻率涨落等. 显然,对于"长期"的漂移, 要視器件的具体条件而定,而对于"短期"的涨落,由于耗散与涨落存在普遍的联系,可以做一般性討論. 在最早的理論工作[1]中就已經提出下式来描写"短期"的涨落:

$$\Delta\nu_s = \frac{8\pi h\nu(\Delta\nu')^2}{P}, \tag{1}$$

其中 $\Delta\nu_s$ 为輸出光束的綫寬; $\Delta\nu'$ 为腔模的半寬度; P 为輸出总功率; ν 为工作頻率. 但是(1)式是直接从微波振蕩器理論中搬过来的,未做分析.

对分子振蕩器, Троицкий[2] 曾經从基本的振蕩方程出发,利用小参数方法証明过(1)式. 如果将他的分析引伸到光激射器的情況,至少有三点必須澄清:

1. 文献[2]一开始就用了准靜态近似,将分子体系的作用以复介电常数来代替. 当分子体系的弛豫时間比腔模弛豫时間小时,准靜态近似是对的,也就是可以認为分子的极化

* 1964 年 4 月 1 日收到.

能够准静态的跟上振蕩的振幅与頻率的变化. 气体光激射器还勉強满足这个条件,但許多固态器件是不滿足这个条件的. 例如,紅宝石 R 綫熒光寿命約为 10^{-3}秒,而腔模寿命約为 10^{-8}秒.

2. 光激射器中沒有分子束微波振蕩器中的散粒效应問題,但是有泵強涨落問題,以及工作分子与耗散体系的耦合是不可忽略的. 这种耦合引起的涨落如何,在文献[2]中沒有相应的分析.

3. 文献[2]对諧振腔作了单模近似,将諧振腔用单个电磁振子代表. 在微波波段,这是对的,因为每个模的物理性質相差較大,可以訒为是相互无关的. 但是对于光頻波段,显然不符合实际情况,因为这时有大量模式的性質是很相近的.

本文的目的就是初步分析这些疑点. 討論应用(1)式的限度,引起"短期"涨落的主要机构. 同样,我們只研究工作点附近的行为,从而可以采用在工作点附近将振蕩方程綫性化的方法.

光激射器由四个典型部分組成: 电磁振子、工作分子、負載和泵. 由于是自激振蕩型工作,必須考慮分子与振子間作用的非綫性性質,并将振子与分子作为动力子系处理. 而負載及泵只是起正耗散或負耗散的作用,并将它們作为耗散子系处理,它們的作用在最低級近似下是通过动力子系方程中的綫性弛豫系数及涨落項来表现的.

在海森堡表象,典型化的光激射器的基本方程是

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_j}{dt} &= i\omega_0 P_j - \frac{1}{T_2} P_j + \sum_{\lambda} F_{\lambda j} r_{3j} a_{\lambda}^{+} + \Theta_j, \\
\frac{dr_{3j}}{dt} &= \frac{1}{T_1}(r_3 - r_{3j}) - \frac{1}{2}\sum_{\lambda}(F_{\lambda j} P_j a_{\lambda} + F_{\lambda j} P_j^{+} a_{\lambda}^{+}) + \Phi_j, \qquad (2) \\
\frac{da_{\lambda}^{+}}{dt} &= i\omega_{\lambda} a_{\lambda}^{+} - \sum_{\lambda'} \gamma_{\lambda\lambda'} a_{\lambda'}^{+} + \frac{1}{2}\sum_{j} F_{\lambda j} P_j + \Gamma_{\lambda}.
\end{aligned}
$$

所用符号同文献[3]. $P_j = r_{1j} + i r_{2j}$, r_{1j}、r_{2j}、r_{3j} 是第 j 个两能級分子的力学量,有对易关系

$$\mathbf{r} \times \mathbf{r} = i\mathbf{r},$$

ω_0 是分子頻率; T_1, T_2 是分子的纵横弛豫时間,分别由工作能級的寿命及綫寬决定; a_{λ}^{+} 是第 λ 模的产生算符,对应的頻率是 ω_{λ}; $F_{\lambda j}$ 是 λ 模与第 j 个分子間耦合系数, 調节分子波函数的相角, 使之成实数. r_3 表示泵強, 如果泵強能用負温度 $T_p < 0$ 表示, 則 $r_3 = -\frac{1}{2}\ \mathrm{th}\,\frac{\hbar\omega_0}{2kT_p} > 0$. r_3 与 j 无关是由于假設了泵对各分子作用是相同的.

方程組(2)与通常所用的有两处不同. 其一是振子的弛豫項中除了 $\gamma_{\lambda\lambda} = \frac{\omega_{\lambda}}{2Q_{\lambda}}$項之外,还有交叉弛豫項 $\gamma_{\lambda\lambda'}(\lambda \neq \lambda')$[4]. 它是因为諸模都是与同一腔壁"分子"(耗散体系)耦合带来的弛豫关联. 当各模的性質相近时,这种关联是不可略去的. 另一不同点是出现了 Θ_j, Φ_j, Γ_j 代表的各相应的涨落項,是当引入弛豫时必須引入的,这正是"短期"涨落的来源. 由于涨落的无規性,它們对耗散体系平均后都为零:

$$\langle \Theta_j \rangle = \langle \Phi_j \rangle = \langle \Gamma_{\lambda} \rangle = 0, \qquad (3)$$

而它們的关联函数将只决定于耗散体系的温度以及各个弛豫系数.

方程組(2)中的各算符,是作用到动力子系及耗散子系整体的波函数空間上的，各量的期待值将由对总体系的密度矩陣平均給出. 但是由于方程中有耗散項，长时間后各期待值与动力子系的初始性质无关，实际上只决定于对处于平衡态的耗散体系的平均. McCumber[5] 曾将分子体系也归入負耗散体系来描述，因为考虑振子与分子的非綫性作用,需引入非平衡态系綜,但这是不方便的.

第二节討論了与电磁振子耦合的耗散体系引起的綫寬. 第三节討論了与分子耦合的耗散体系引起的綫寬. 第四节討論了多模腔对綫寬的影响. 最后,第五节中作了簡单的总結.

二

在本节及下节中取单模近似,在方程組(2)中只保留一个电磁振子方程，去掉所有对 λ 的求和号. 輸出光束的涨落及綫寬是由 a^+ 的关联函数决定的[6]. 为了求它,考虑到涨落項很小,将方程組(2),在工作点附近綫性化,即令

$$\begin{aligned} P_i &= \langle P_i\rangle(1+\delta P_i), \\ r_{3i} &= \langle r_{3i}\rangle(1+\delta r_{3i}), \\ a^+ &= \langle a^+\rangle(1+\delta a^+), \end{aligned} \tag{4}$$

其中$\langle P_i\rangle$, $\langle r_{3i}\rangle$, $\langle a^+\rangle$为工作点的值,在附录中給出. 代入(2)式,得到 δP_i, δr_{3i}, δa^+ 的綫性方程組. 由量子力学的一般原理得知，对于綫性系統，量子解往往与經典解是相似的. 因此,可将綫性化的算符方程組理解为經典量 δP_i, δr_{3i} 及 δa^+ 的綫性方程組. 而 Θ_i, Φ_i 及 Γ 理解为經典的无規涨落力. 只要取无規涨落力的平均值及关联函数与对应的算符的平均相同就可以了. 經典化后,可将 δP_i 及 δa^+ 用分子及振子的相角及振幅的涨落表示. 由附录中式(26)容易得知,

$$\delta P_i = b_i + i\delta\vartheta_i,\ \ \delta a^+ = e + i\delta\varphi, \tag{5}$$

其中 $b_i = \dfrac{\delta B_i}{B_i}$; $e = \dfrac{\delta A}{A}$; B_i 及 A 为工作点的值，δB_i, δA, $\delta\vartheta_i$ 及 $\delta\varphi$ 各为相应的振幅及相角涨落值,它們为实数.

Θ, Φ 及 Γ 引起的涨落是相加的,完全可以忽略它們之間的关联，因此，可以分別計算. 本节討論 Γ 項引起的涨落. 在最低級近似下,略去振子耗散体系与分子及其耗散体系的关联,则 Γ 的性质将与单独討論振子耗散間題时一样，它的关联函数已由文献[7]給出,

$$\langle\Gamma(t_1)\Gamma^*(t_2)\rangle = \frac{2\omega}{\pi Q}\left\{2\pi\delta(t_1-t_2)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT_d}\right)-1}\right]+i\frac{P}{t_1-t_2}\right\}, \tag{6}$$

其中 P 表示取主值; T_d 为耗散体系的温度. 方括号中第一項代表自发輻射引起的涨落，第二項代表热噪声. 对光激射器，$\hbar\omega \gg kT_d$，热涨落可以略去.

将 Γ 看成是經典的涨落力，并写成 $\Gamma(t)=\Gamma'(t)e^{i\theta(t)}$, $\Gamma'(t)$ 及 $\theta(t)$ 为实函数. 代入綫性化的方程組,得到了包含振子及耗散体系所致涨落的方程式:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{db_j}{dt} = -\frac{1}{T_2}(b_j - \delta r_{3j} - e) - (\omega_0 - \Omega)(\delta\vartheta_j - \delta\varphi),\\
&\frac{d\delta r_{3j}}{dt} = -\frac{1}{T_1}(\delta r_{3j} + r_j e + r_j b_j) + \frac{r_j}{T_1}T_2(\omega_0 - \Omega)(\delta\vartheta_j - \delta\varphi),\\
&\frac{de}{dt} = -\frac{\omega}{2Q}e + \frac{1}{2T_1A^2}\sum_j (r_3 - \langle r_{3j}\rangle) b_j -\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2T_1A^2}T_2(\omega_0 - \Omega)\sum_j (r_3 - \langle r_{3j}\rangle)(\delta\vartheta_j - \delta\varphi) +\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{A}\Gamma'(t)\cos(\delta(t) - \Omega t),\\
&\frac{d\delta\vartheta_j}{dt} = -(\omega_0 - \Omega)(\delta r_{3j} + e - b_j) - \frac{1}{T_2}(\delta\vartheta_j - \delta\varphi),\\
&\frac{d\delta\varphi}{dt} = T_2(\omega_0 - \Omega)\frac{1}{2T_1A^2}\sum_j (r_3 - \langle r_{3j}\rangle) b_j - T_2(\omega_0 - \Omega)\frac{\omega}{2Q}e +\\
&\quad + \frac{1}{2T_1A^2}\sum_j (r_3 - \langle r_{3j}\rangle)(\delta\vartheta_j - \delta\varphi) + \frac{1}{A}\Gamma'(t)\sin(\delta(t) - \Omega t),
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

其中 $r_j = (r_3 - \langle r_{3j}\rangle)/\langle r_{3j}\rangle$ 表示泵强超过閾值的相对大小．以下分两种情况解(7)式．

(1) 无頻移情况，即 $\omega_0 = \omega = \Omega$．

这时相角的方程与振幅的方程是分离的．首先討論相角的涨落，方程組

$$\frac{d\delta\vartheta_j}{dt} = -\frac{1}{T_2}\delta\vartheta_j + \frac{1}{T_2}\delta\varphi \tag{8}$$

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = -\frac{\omega}{2Q}\delta\varphi + \frac{1}{2T_1A^2}\sum_j (r_3 - \langle r_{3j}\rangle)\delta\vartheta_j + \frac{\Gamma'(t)}{A}\sin(\delta(t) - \Omega t)$$

的解是

$$\delta\varphi = \frac{1}{T_2A}\int_0^t dt' e^{-\left(\frac{1}{T_2}+\frac{\omega}{2Q}\right)t'}\int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{\left(\frac{1}{T_2}+\frac{\omega}{2Q}\right)t''}\Gamma'(t'')\sin(\delta(t'') - \Omega t'').$$

利用(6)式可得

$$\langle(\delta\varphi)^2\rangle = \frac{\omega}{QA^2\left(1 + \frac{\omega}{2Q}T_2\right)^2}\left(t + \frac{e^{-\left(\frac{1}{T_2}+\frac{\omega}{2Q}\right)t} - 1}{\frac{1}{T_2} + \frac{\omega}{2Q}}\right). \tag{9}$$

当 t 够大时，右端括号中第二項是不重要的．所以輸出相角，类似于自由粒子的布朗运动，是在不断漂移的．当振幅的相对涨落很小时(下面討論)，輸出綫寬完全由相角的迁移率决定[6]．所以有

$$\delta\nu = \frac{8\pi(\Delta\nu')^2\hbar\omega}{P} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{T_2\omega}{2Q}\right)^2}, \tag{10}$$

其中 $P = \frac{\hbar\omega^2A^2}{Q}$ 是輸出功率；$\Delta\nu' = \frac{\omega}{4\pi Q}$ 是腔模半寬度．对光激射器，一般都滿足 $\frac{1}{T_2} \gg \frac{\omega}{2Q}$．这样(10)式就过渡为(1)式．所以只要工作能級的綫寬比腔模綫寬大得多，在单模近似下就会有(1)式，而不須要全部准靜态条件$\left(\frac{1}{T_2}, \frac{1}{T_1} \gg \frac{\omega}{2Q}\right)$，这是因为相角弛豫只与 T_2 有关．

現在来检查振幅相对涨落是否很小．振幅涨落方程是

$$\left.\begin{aligned}\frac{db_j}{dt} &= -\frac{1}{T_2}(b_j - \delta r_{3j} - e),\\ \frac{d\delta r_{3j}}{dt} &= -\frac{1}{T_1}(\delta r_{3j} + r_j e + r_j b_j),\\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\omega}{2Q}e + \frac{\omega}{2QN}\sum_j b_j + \frac{1}{A}\Gamma'(t)\cos(\delta(t) - \Omega t),\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

这里假定了 F_j 与 j 无关(見附录)，从而 r_j 也与 j 无关．(11)式的一般解是較繁的，我們在 $\frac{1}{T_2} \gg \frac{\omega}{2Q}$ 的条件下求解．这时可令 $\frac{db_j}{dt} = 0$，消去 b_j，得到

$$\begin{aligned}\frac{d\delta r_{3j}}{dt} &= -\frac{2}{T_2}r_j e - \frac{(1 + r_j)}{T_1}\delta r_{3j},\\ \frac{de}{dt} &= \frac{\omega}{2QN}\sum_j \delta r_{3j} + \frac{1}{A}\Gamma'(t)\cos(\delta(t) - \Omega t).\end{aligned} \tag{12}$$

其解为

$$e(t) = -\frac{1}{A(\lambda_1 - \lambda_2)}\Big[\lambda_2 e^{\lambda_1 t}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_1 t_1}\Gamma'(t_1)\cos(\delta(t_1) - \Omega t_1)\,dt_1 - \\ - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}\int_{-\infty}^{t} e^{-\lambda_2 t_1}\Gamma'(t_1)\cos(\delta(t_1) - \Omega t_1)\,dt_1\Big],$$

其中 $\lambda_{1,2} = -\frac{1 + r_j}{2T_1} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + r_j}{2T_1}\right)^2 - \frac{r_j\omega}{T_1 Q}}$，为 e 所滿足的二次方程的特征根．利用(6)式求得振幅涨落的关联函数

$$\langle e(t_1)e(t_2)\rangle = \frac{1}{2A^2(\lambda_1 - \lambda_2)^2}\cdot\frac{2\omega}{Q}\Big[-\frac{\lambda_2^2}{2\lambda_1}e^{\lambda_1|t_2 - t_1|} - \frac{\lambda_1^2}{2\lambda_2}e^{\lambda_2|t_2 - t_1|} + \\ + \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)}\left(e^{\lambda_2|t_2 - t_1|} + e^{\lambda_1|t_2 - t_1|}\right)\Big]. \tag{13}$$

注意到 $\lambda_{1,2} < 0$，这是衰減型的关联函数．令 $t_1 = t_2$，就得到振幅的相对涨落的平方平均值

$$\langle e^2\rangle = \frac{1}{A^2}\cdot\frac{1 + r_j}{2r_j} + \frac{1}{A^2}\cdot\frac{T_1\omega}{2(1 + r_j)Q}. \tag{14}$$

如果对(14)式再利用条件 $\frac{1}{T_1} \gg \frac{\omega}{2Q}$，則 $\langle e^2\rangle = \frac{1}{A^2}\cdot\frac{1 + r_j}{2r_j}$，与文献[3]的結果是一样的．但是，恰恰相反，对許多光激射器 $T_1 \gg \frac{2Q}{\omega}$，(14)式中第二項会变得比第一項(准靜态的)还大．例如，在紅宝石情况，当 $r_j > 10^{-5}$ 时就如此．所以，准靜态近似对于振幅涨落是不适用的．虽然如此，振幅相对涨落的絕对值仍然是很小的．用紅宝石的数据粗略估計，只要泵強大于閾值的万分之一 ($r_j > 10^{-4}$)，就有 $\langle e^2\rangle \ll 1$．因此它不足以影响(10)式的正确性．

(2) 有頻移情况，即 $\omega_0 \neq \Omega$．

这时，仍不一般求解，而利用 $\frac{1}{T_2} \gg \frac{\omega}{2Q}$ 条件，可取 $\frac{db_j}{dt} = \frac{d\delta\vartheta_j}{dt} = 0$．在(7)式中消去 b_j 及 $\delta\vartheta_j$，并假定 F_j 不隨 j 变，得到

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{de}{dt}=\frac{\omega}{2QN}\sum_j \delta r_{3j}+\frac{1}{A}\Gamma'(t)\cos(\delta(t)-\Omega t),\\
&\frac{d\delta r_{3j}}{dt}=-\frac{2r_j}{T_1}e-\frac{(1+r_j)}{T_1}\delta r_{3j},\\
&\frac{d\delta\varphi}{dt}=T_2(\omega_0-\Omega)\frac{\omega}{2QN}\sum_j \delta r_{3j}+\frac{1}{A}\Gamma'(t)\sin(\delta(t)-\Omega t).
\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

(15)中第一、二个方程与(12)全同．所以，当 $\frac{1}{T_2}\gg\frac{\omega}{2Q}$ 时，有无頻移对振幅涨落都沒有影响，这是由于頻移对振幅的影响在 $\frac{\omega T_2}{2Q}$ 数量級以下，在我們的近似中将它忽略了．由(15)式前两个方程解出 $\sum\limits_j \delta r_{3j}$ 代入第三个方程，积分后就得到 $\delta\varphi$ 的解．求得相角涨落的平方平均值

$$\langle(\delta\varphi)^2\rangle=\frac{1}{A^2}\cdot\frac{\omega}{Q}t+\frac{\omega^3T_2^2r_j^2(\omega_0-\Omega)^2}{Q^3A^2T_1^2(\lambda_1-\lambda_2)^2}\left\{\frac{e^{\lambda_1t}-1-\lambda_1t}{\lambda_1^3(\lambda_1+\lambda_2)}-\frac{e^{\lambda_2t}-1-\lambda_2t}{\lambda_2^3(\lambda_1+\lambda_2)}\right\},$$

当 t 足够大时，衰減項可以略掉，代入 $\lambda_{1,2}$ 具体表示式，得到輸出綫寬为

$$\delta\nu=\frac{8\pi\hbar\omega(\Delta\nu')^2}{P}[1+T_2^2(\omega_0-\Omega)^2].\tag{16}$$

此式又与文献[3]有頻移情况的結果一致．同样，也并未用到全部的准靜态条件．一般 $(\omega_0-\Omega)$ 不会比 $\frac{1}{T_2}$ 更大，所以頻移对(1)式无大影响．

三

本节討論 Θ_j 及 Φ_j 对綫寬的貢献．它是由与分子耦合的耗散体系引起的．分子方程是非綫性的，Θ_j, Φ_j 的形式較 Γ 复杂．我們只想估計一下它对綫寬貢献的数量級，为了不致过多陷入无謂的計算，先来簡化 Θ_j, Φ_j 的表示．

在最低級近似下，Θ_j, Φ_j 的形式与单独討論二能級分子耗散問題时是一样的．它已由文献[8]給出：

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_j=\frac{1}{T_2}P_j+i\{K_{3j},P_j\}-i\{K_j,r_{3j}\},\\
&\Phi_j=\frac{1}{T_1}r_{3j}+i\{K_j,P_j^+\}-i\{K_j^+,P_j\},
\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

其中 $\{A,B\}\equiv\frac{1}{2}(AB+BA)$．$K_{3j}$, K_j 的意义同文献[8]，它們的性質是

$$\langle i\{K_{3j},P_j\}\rangle=0,$$

$$\langle i\{K_j,r_{3j}\}\rangle=\frac{1}{T_2}P_j,$$

$$\langle i\{K_j,P_j^+\}\rangle=-\langle i\{K_j^+,P_j\}\rangle=-\frac{1}{2T_1}r_{3j}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}
&\langle K_{3j}\rangle=0,\\
&\langle\{K_{3j}(t_1),K_{3j'}^*(t_2)\}\rangle=\frac{2}{T_2}\delta(t_1-t_2)\delta_{jj'}
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

等. 为了簡单起見,近似取

$$i\{K_j,\ r_{3j}\} \cong \frac{1}{T_2} P_j,$$

$$-i\{K_j,\ P_j^+\} + i\{K_j^+,\ P_j\} \simeq \frac{1}{T_1} r_{3j},$$

則

$$\Theta_j \simeq i\{K_{3j},\ P_j\},\quad \Phi_j \simeq 0.$$

进一步将 Θ_j 經典化,得到

$$\Theta_j = iK_{3j}\langle P_j\rangle.$$

这里 $\langle P_j\rangle$ 取工作点的数值; K_{3j} 就是經典的涨落因子,它有式(18)所写的性質.

描写分子耗散体系所致涨落的方程与方程組(7)是相似的. 区别只在于: 在 $\frac{db_j}{dt}$ 及 $\frac{d\delta\vartheta_j}{dt}$ 方程的右端分别补充了 $\mathrm{Im}\,K_{3j}$ 及 $\mathrm{Re}\,K_{3j}$ 項, 在 $\frac{de}{dt}$ 及 $\frac{d\delta\varphi}{dt}$ 的方程中去掉了有关 Γ 的項.

如果沒有頻移($\omega_0 = \omega = \Omega$), 相角方程及振幅方程也是可以分开的. 相角方程是

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\vartheta_j}{dt} &= -\frac{1}{T_2}(\delta\vartheta_j - \delta\varphi) + 2\mathrm{Re}\,K_{3j}, \\ \frac{d\delta\varphi}{dt} &= -\frac{\omega}{2Q}\delta\varphi + \frac{\omega}{2QN}\sum_j \delta\vartheta_j. \end{aligned} \tag{20}$$

利用上节所用方法,求得

$$\langle(\delta\varphi)^2\rangle = \frac{\omega^2}{4Q^2NT_2\left(\frac{1}{T_2}+\frac{\omega}{2Q}\right)^2}t. \tag{21}$$

利用条件 $\frac{1}{T_2} \gg \frac{\omega}{2Q}$,則分子耗散体系涨落力引起的輸出綫寬为

$$\delta\nu_{分子} = \frac{\omega^2 T_2}{8\pi Q^2 N}. \tag{21}$$

对紅宝石, $T_2 \simeq 10^{-11}$ 秒, $\frac{\omega}{2Q} \sim 10^8$ 秒$^{-1}$, $N \sim 10^{18}$, 則 $\delta\nu_{分子} \sim 10^{-14}$ 秒$^{-1}$, 比(1)式所給綫寬要小得多,完全可以略去. 同法可以証明由此引起的振幅涨落也是很微小的,可以不計. 可見只要工作分子足够多, 則 $1/N$ 因子保証了个别分子行为的无規性完全可以不考慮. 所以光激射器輸出光束頻率的高度稳定性,不仅因为发光是受激的(前节的 $1/A$),而且由于是集体的(本节的 $1/N$).

当有頻移时,上面的結論沒有定性的变化.

四

現在討論多模腔对涨落及綫寬的影响. 一般光激射器都是多模激发的. 必須在多模工作点附近,綫性化方程組(2),来討論涨落. 但是,用方程組(2)严格求多模的工作点是困难的. 因此必須首先化簡方程組(2),然后再进行綫性化.

首先注意到,虽然有多模激发,但毕竟仍是少数几个模. 对这几个模,可以略去它們

之間通过交叉弛豫系数及工作分子物理量引起的耦合，因为我們并不关心激发模間的相互作用．另外激发模的涨落是比較小的(有 $1/A$ 因子)，所以某激发模对其他激发模涨落的貢献更小(有 $1/A^2$ 因子)．因此，是否略去激发模間的耦合，对討論涨落的綫性化方程影响不大．在討論工作模頻率及功率的相互影响的問題中，这些是不能略去的．这样，对多模腔在討論涨落問題时仍然可以認为只有单模激发．对气体器件，适当調节，实际上可得到只有单模激发的工作状态．

其次，对于許多未被激发的腔模的振子方程，可以略掉它們与分子及与激发模的耦合項．因为，既然未被激发，不考虑它們与激发源(分子及其他強場)的作用，是合理的．也略掉未被激发模間的交叉耦合，这可能使被估計的涨落略偏小些．因此，未被激发模的性質主要由 Γ_λ 項所决定，即处于零点涨落状态是合理的．模間的相互作用不会改变未激发模的这个本質．

現在，代替第二节中单振子方程，用振子方程組

$$\left.\begin{aligned}\frac{da_\lambda^+}{dt} &= i\omega_\lambda a_\lambda^+ - \gamma_\lambda a_\lambda^+ + \frac{1}{2}\sum_j F_{\lambda j}P_j - \sum_{\lambda'\neq\lambda}\gamma_{\lambda\lambda'}a_{\lambda'}^+ + \Gamma_\lambda \quad (\text{激发模}),\\ \frac{da_{\lambda'}^+}{dt} &= i\omega_{\lambda'}a_{\lambda'}^+ - \gamma_{\lambda'}a_{\lambda'}^+ + \Gamma_{\lambda'} \quad (\text{未激发模})\ \lambda\neq\lambda',\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

其中 $\gamma_{\lambda'}\equiv\gamma_{\lambda'\lambda'}\equiv\dfrac{\omega_{\lambda'}}{2Q_{\lambda'}}$. 未激发模方程可以解出:

$$a_{\lambda'}^+ = e^{i\omega_\lambda t-\gamma_{\lambda'}t}\int_{-\infty}^t e^{-i\omega_{\lambda'}t_1+\gamma_{\lambda'}t_1}\Gamma_{\lambda'}(t_1)\,dt_1. \tag{23}$$

代入激发模方程后，問題就与单模近似时相似，只是涨落項除了 Γ_λ 之外，还有 $\sum\limits_{\lambda'\neq\lambda}\gamma_{\lambda\lambda'}a_{\lambda'}^+$ 項．

經过相似于第二节中的諸步，在 $\dfrac{1}{T_2}\gg\dfrac{\omega_\lambda}{2Q_\lambda}$ 的近似下，振子相角涨落的平方平均值为(对无頻移情况)

$$\langle(\delta\varphi)^2\rangle = \frac{2}{A^2}\sum_{\lambda'}\frac{\gamma_{\lambda\lambda'}^2}{\gamma_{\lambda'}}t\,. \tag{24}$$

所以輸出綫寬为

$$\delta\nu = \frac{8\pi(\Delta\nu')^2\hbar\omega}{P} + \frac{4(\Delta\nu')\hbar\omega}{P}\sum_{\lambda'\neq\lambda}\frac{\gamma_{\lambda\lambda'}^2}{\gamma_{\lambda'}}. \tag{25}$$

由于沒有 $\gamma_{\lambda\lambda'}$ 的具体数据，所以很难准确估計(25)式第二項的大小．下面只粗略地考虑一下它的可能大小．

对(25)式第二項有較大貢献的模必須是 $\gamma_{\lambda\lambda'}$ 相对地大，而 $\gamma_{\lambda'}$ 相对地小．激发模一般是基型 (TEM_{00}) 的某一縱模，所以 $\gamma_{\lambda\lambda'}$ 相对大的模是頻率在激发模頻率附近的一系列基型縱模．因为同属基型，它們在反射面上的場強型式分布是一样的，即与耗散系統的耦合算符是相似的，因而可能具有較大的交叉弛豫系数．又因为基型模的損耗最小，所以有較小的 $\gamma_{\lambda'}$．以气体光激射器为例，如取反射面間距 1 米，相邻模相距約 1.5×10^8 秒$^{-1}$．在与激发模頻率相距約 10^{11}秒$^{-1}$($\ll$工作頻率 10^{14}秒$^{-1}$)的范围內，基型模約有 10^3个．在这个小頻率間隔內，反射系数沒有明显的改变，各模的物理条件是相近的，因而 $\gamma_{\lambda'}\simeq\gamma_\lambda$．如

果再假定 $\gamma_{\lambda\lambda'}\simeq 10^{-1}\gamma_{\lambda}$1)，則(25)式中第二項至少是第一項的 10 倍．所以，在多模腔的条件下，式(1)是不准确的，可能有数量級上的偏差． 当然，由于沒有較准确的 $\gamma_{\lambda\lambda'}$ 数据，这只是一个引起与(1)式有偏差的可能原因．

五

总之，理論分析表明，只要单模近似可以用，泵強离閾値不很近，"短期"的涨落是可以用(1)式計算的．它与 T_1 的关系不大，因为綫寬主要由相角涨落决定，相角的弛豫是由 T_2 及 $\frac{\omega}{2Q}$ 决定的．只要工作能級的寬度大于模的寬度，分子的相角部分的行为就可以認为是准靜态的．一般器件正是这样．

考慮到多模腔的特点，可能对(1)式带来很大的修正．虽然难于准确証实，但是从实驗的迹象来看，傾向于支持这种看法．对微波振蕩器的"短期"涨落的測量[9]，与(1)式的估計相差不到一个数量級，而对光激射器的測量[10,11]値比(1)式估計値約大两个数量級以上．将微波波段与光頻波段的激射器类比，除了諧振腔的性质有本质不同外，其他差别相对地是小的．当然判断这种看法是否正确还須要对多模腔中的弛豫問題做更細致的理論及实驗工作．

除了文中指明的几处近似及其合理性之外，另一个重要的近似是用 T_1，T_2 描写分子的弛豫．如果工作能級是一致加寬，这样的描写是对的，而对非一致加寬的能級是不对的．紅宝石 R 綫綫寬机构目前还不完全确定． 对于 He-Ne 混合气的工作能級，已証实是非一致加寬的[12]．这时方程組(2)仍然能用，不过 T_2 也是由能級的寿命决定． 这种改变，不影响上面各节的推导，沒有本质的变化． 不过(1)式适用的条件将要求工作能級的寿命要短于腔模的寿命． 在这种意义下綫寬与 T_1 有关，(1)式的正确性要求全部的准靜态条件．

承李蔭远先生指出这一課題并予以关怀，在工作过程中同霍裕平、李鉄城等同志进行过有益的討論，作者对他們深表謝意．

附　　录

将方程組(2)对耗散体系作平均，由(3)式，涨落項沒有了．如果(2)中几个非綫性項的平均可以近似为各别算符平均的乘积(例如 $\langle r_{3j}a^+\rangle\simeq\langle r_{3j}\rangle\langle a^+\rangle$)，則平均后的方程与經典方程相同．并令

$$\langle a^+\rangle = Ae^{i\varphi},\ \langle P_j\rangle = B_je^{i\vartheta_j}, \tag{26}$$

A，φ，B_j 及 ϑ_j 都是实函数，代入方程組(2)，适当化簡可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dB_j}{dt} &= -\frac{1}{T_2}B_j + F_j\langle r_{3j}\rangle A\cos(\vartheta_j-\varphi),\\ B_j\frac{d\vartheta_j}{dt} &= \omega_0 B_j - F_j\langle r_{3j}\rangle A\sin(\vartheta_j-\varphi),\end{aligned}\right|$$

1) $\gamma_{\lambda\lambda'}$ 的估計根据不多，但对于頻差不大的模，$\gamma_{\lambda\lambda'}$ 主要决定于模在的反射面的积分．由于基模在反射面的型式相似，所以基型模之間的交叉耦合是不会太小的．

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\langle r_{3j}\rangle}{dt}&=\frac{1}{T_1}(r_3-\langle r_{3j}\rangle)-F_jAB_j\cos(\vartheta_j-\varphi),\\ \frac{dA}{dt}&=-\frac{\omega}{2Q}A+\frac{1}{2}\sum_j F_jB_j\sin(\vartheta_j-\varphi),\\ A\frac{d\varphi}{dt}&=\omega A+\frac{1}{2}\sum_j F_jB_j\sin(\vartheta_j-\varphi).\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

如果存在諧振解,必須

$$\frac{dB_j}{dt}=\frac{dA}{dt}=\frac{dr_{3j}}{dt}=0,$$

$$\frac{d\vartheta_j}{dt}=\frac{d\varphi}{dt}=\Omega,$$

Ω为工作頻率. 代入(27)解得

$$\Omega-\omega_0=\frac{\omega-\omega_0}{1+T_2\frac{\omega}{2Q}},\tag{28}$$

即工作頻率与 T_1 无关. 又有

$$\frac{\omega}{Q}A^2=\sum_j\frac{1}{T_1}(r_3-\langle r_{3j}\rangle),\tag{29}$$

左端为单位时間振子的耗散，右端为单位时間分子吸收的能量，所以它表示能量平衡条件. 还可以得到

$$B_j^2=\frac{T_2}{T_1}\langle r_{3j}\rangle(r_3-\langle r_{3j}\rangle),\tag{30}$$

由于 $B_j^2>0$ 及 $r_3>0$，所以 $\langle r_{3j}\rangle>0$. 后者表示在稳定工作时每个分子的平均分布都是反轉的. 如果令 $\psi_j=\vartheta_j-\varphi$，则有

$$\cos^2\psi_j=\frac{\left(1+T_2\frac{\omega}{2Q}\right)^2}{\left(1+T_2\frac{\omega}{2Q}\right)^2+T_2^2(\omega_0-\omega)^2}.\tag{31}$$

这表現了稳定工作时各分子的相角都被振子相角同步起来了.

如果假定 F_j 与 j 无关,电磁振子与各分子的耦合都是相同的,略去了模的空間分布,在处理单模問題时是合理的,则 B_j 及$\langle r_{3j}\rangle$也与 j 无关:

$$\langle r_{3j}\rangle=\frac{\omega}{T_2F^2QN}\left(1+\frac{T_2^2(\omega_0-\omega)^2}{\left(1+T_2\frac{\omega}{2Q}\right)^2}\right),\tag{32}$$

N为工作分子数. 由(29)式,因为 $A^2>0$, 所以要求

$$r_3>\langle r_{3j}\rangle,$$

这正是閾条件. 当 $\omega_0=\omega$ 时，回到文献[3]的結果. 关于工作点的稳定性，已有詳細的討論[13,14].

参　考　文　献

[1] Schawlaw, A. L., Townes, C. H., *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1940.
[2] Троицкий, В. С., *Радио и Элек.*, **3** (1958), 1298.
[3] Файн, В. М., Ханин, Я. И., *ЖЭТФ*, **41** (1961), 1498.
[4] Файн, В. М., *УФН*, **79** (1963), 641.
[5] McCumber, D. E., *Phys. Rev.*, **130** (1963), 675.
[6] Троицкий, В. С., *Радио. и Элек.*, **1** (1956), 818.
[7] Senitzky, I. R., *Phys. Rev.*, **119** (1960), 670.
[8] Senitzky, I. R., *Phys. Rev.*, **131** (1963), 2827.
[9] Gorden, J. P., Quantum Electronics, edited by C. H. Townes, Columbia University Press (New York 1960).
[10] Jaseja, T. S., Javan, A., Townes, C. H., *Phys. Rev. Lett.*, **10** (1963), 165.
[11] Yariv, A., Gordon, J. P., *PIEEE*, **51** (1963), 4.
[12] Bennett, W. R., *Phys. Rev.*, **126** (1962), 580.
[13] Kaplan, J. I., *Jour. Appl. Phys.*, **34** (1963), 3411.
[14] 霍裕平，物理学报，**20** (1964), 954.

ON THE LINEWIDTH OF LASERS

Fang Li-zhi　　Luo Yi-zu

(*China University of Science and Technology*)　　(*Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the "short-time" part of the linewidth of a laser beam has been considered with the fundamental equations which describe the behaviours of lasers. This linewidth is described usually by

$$\Delta\nu_s = \frac{8\pi h\nu(\Delta\nu')^2}{P}, \tag{1}$$

here $\Delta\nu'$ is the half-width of the electromagnetic mode of cavity, ν the beam frequency, and P the output power. The main results can be summarized in the following way: (1) The linewidth is raised mainly from the dissipative system coupled to the electromagnetic mode, and the contribution of the dissipative system coupled to the molecules is negligible. (2) In the single-mode approximation formula (1) is correct, only if $\frac{1}{T_2} \gg \frac{1}{2\pi}\Delta\nu'$, $\frac{1}{T_2}$ being the homogeneous linewidth of molecules. (3) If the interactions between the exciting mode and other modes in the multimode cavity are strong, then formula (1) will be generalized to the following:

$$\Delta\nu_s = \frac{8\pi h\nu(\Delta\nu')^2}{P} + \frac{4h\nu(\Delta\nu')}{P}\sum_{\lambda'\neq\lambda}\frac{\gamma_{\lambda\lambda'}^2}{\gamma_{\lambda'}}, \tag{2}$$

here $\gamma_{\lambda\lambda'}$ is the correlative relaxation coefficient and $\gamma_{\lambda'}$ is the half-width of mode λ'. In certain case the second term in formula (2) may be much larger than its first term. Therefore, it is one of reasons for the disagreement between the experimental results about the linewidth and the prediction from formula (1).