

关于等离子体的电磁波不稳定性*

陸 全 康
(复旦大学物理系)

提 要

本文阐述了由分析色散关系几何性质的方法, 导出速度分布各向异性的等离子体中的电磁波不稳定性严格和普适的判据。具体讨论了温度不均匀性和粒子束流对不稳定性的影响。最后导出了 Weibel 的电磁波增长系数的相对论修正公式。

一、引 言

Weibel^[1] 曾利用非相对论性的玻耳兹曼方程来讨论温度不均匀的等离子体中电磁波的不稳定性, 证明当平行于波传播方向的等离子体温度小于垂直方向的温度时, 对于 $ku_x \ll \omega$ 的电磁波有不稳定性存在。

本文则采用 Penrose^[2] 分析静电波不稳定性的类似方法, 由分析色散关系的几何性质得出电磁波不稳定性的严格和普适判据。具体分析了温度不均匀性和粒子束流对不稳定性的影响。

最后, 导出速度分布各向异性时的相对论性色散关系, 得出 Weibel 电磁波增长系数的相对论修正公式。附带还发现平行于波传播方向的相对论质量效应对色散关系修正项的贡献为垂直方向的一半。

二、电磁波的不稳定性

设电磁波沿 z 方向传播, 其形式 $\sim \exp(ikz - i\omega t)$ 。

当等离子体平衡态的速度分布函数 F_0 是各向同性的函数时, 电磁波色散关系为^[3]

$$\frac{k^2 c^2 - \omega^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{\omega}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_0(u)}{u_x - \omega/k} du \quad \left(\text{Im} \frac{\omega}{k} > 0 \right), \quad (2.1)$$

式中 ω_{pe} 为电子等离子体频率。当只考虑电子振荡时, $F_0(u) = F_{0e}(u)$; 当考虑电子与离子振荡时, $F_0(u) = F_{0e}(u) + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} F_{0i}(u)$; 这里 $F_{0e}(u)$, $F_{0i}(u)$ 各表示平衡态电子, 离子分布函数; ω_{pi} 为离子的等离子体频率。

由(2.1)式可证: 不论 $F_0(u)$ 是什么形式, 不存在不稳定性。

本节讨论 $F_0(\mathbf{u})$ 是各向异性的情况, 且只考虑电子振荡由玻耳兹曼-伏拉索夫方程与麦克斯韦方程得出电磁波色散关系为

* 1962年9月5日收到, 1963年3月12日收到修改稿。

$$\frac{k^2 c^2 - \omega^2}{\omega_{pe}^2} = -1 - \int \frac{u_x^2 \frac{\partial F_0(\mathbf{u})}{\partial u_x}}{u_x - \omega/k} d\mathbf{u} \quad \left(\text{Im} \frac{\omega}{k} > 0 \right). \quad (2.2)$$

一般分布函数可写成

$$F_0(\mathbf{u}) = f_{0x}(u_x) f_{0y}(u_y) f_{0z}(u_z), \quad (2.3)$$

式中 f_{0x} , f_{0y} 与 f_{0z} 均是归一化的。将(2.3)代入(2.2)式,得

$$\frac{k^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{-1 - \int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \int \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - \omega/k} du_x}{c^2 - \omega^2/k^2} \quad \left(\text{Im} \frac{\omega}{k} > 0 \right). \quad (2.4)$$

由于 k^2/ω_{pe}^2 为正实数, (2.4) 式有解的条件为右方能取正实数, 这正是不稳定电磁波存在的条件。我们现在证明: 若令与 $f_{0x}(u_x)$ 极大值对应的 u_x 等于(2.5)式中的参数 x/k , 则当

$$1 + \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x < 0 \quad (2.5)$$

时, 有不稳定的电磁波存在。

Penrose^[2] 在研究静电振荡的不稳定性时分析了函数

$$Z\left(\frac{\omega}{k}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - \omega/k} du_x \quad (2.6)$$

的性质。在 ω/k 平面的实轴上, (2.6) 式成为

$$Z\left(\frac{x}{k}\right) = P \int \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x + \pi i f_{0x}\left(\frac{x}{k}\right), \quad (2.7)$$

式中 P 表示柯西主值。 $Z\left(\frac{\omega}{k}\right)$ 在 ω/k 的上半平面是解析的。 $Z\left(\frac{x}{k}\right)$ 是有界和连续的, 而当 x/k 沿实轴由 $-\infty$ 变向 $+\infty$ 时, 在 Z 平面上映照成一由原点出发而最后回到原点的封闭曲线 $Z(R)$ 。 $Z(\omega/k)$ 将 ω/k 的上半平面映照成封闭曲线 $Z(R)$ 内部的区域。

我们将(2.4)式右方的函数定义为函数 $W(\omega/k)$, 即

$$W\left(\frac{\omega}{k}\right) \equiv \frac{-1 - \left(\int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \right) Z\left(\frac{\omega}{k}\right)}{c^2 - \omega^2/k^2} \equiv \frac{Y\left(\frac{\omega}{k}\right)}{c^2 - \omega^2/k^2} \quad (2.8)$$

其中将分子定义为函数 $Y\left(\frac{\omega}{k}\right)$ 。在 ω/k 平面的实轴上, (2.8) 式成为

$$\begin{aligned} W\left(\frac{x}{k}\right) &\equiv \frac{Y\left(\frac{x}{k}\right)}{c^2 - x^2/k^2} = \frac{-1 - \left(\int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \right) Z\left(\frac{x}{k}\right)}{c^2 - x^2/k^2} = \\ &= \frac{-1 - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \right) P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \right) \pi i f'_{0x}\left(\frac{x}{k}\right)}{c^2 - x^2/k^2}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

先考察函数 $Y(\omega/k)$ 与 $Y(x/k)$ 的性质。由(2.8)式与(2.9)式可见, 因积分 $\int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x$ 等于有限值, 当 $\frac{x}{k}$ 沿实轴由 $-\infty$ 变向 $+\infty$ 时, 此实轴在 Y 平面上映照成

一条封闭曲线 $Y(R)$, $Y\left(\frac{\omega}{k}\right)$ 将 ω/k 的上半平面映照成封闭曲线 $Y(R)$ 内部的区域。既然边界曲线的方向是使区域位于其左方, 因此若要考察封闭曲线 $Y(R)$ 内部的区域是否包含正实轴, 仅需考察曲线 $Y(R)$ 从 Y 平面的实轴之下通向实轴之上时, 即当

$$\operatorname{Im} Y\left(\frac{x}{k}\right) = 0 \quad (- \rightarrow +) \quad (2.10)$$

时, $\operatorname{Re} Y\left(\frac{x}{k}\right)$ 的值是否大于零即可(参阅图 2)。

我们将在下面用映照图形来说明, 函数 $W\left(\frac{\omega}{k}\right)$ 将 ω/k 的上半平面所映照成的区域是否包含正实轴的条件亦即当边界曲线 $W(R)$ 从 W 平面的实轴之下通向实轴之上时, 即

$$\operatorname{Im} W\left(\frac{x}{k}\right) = 0 \quad (- \rightarrow +) \quad (2.11)$$

时, $\operatorname{Re} W\left(\frac{x}{k}\right)$ 的值是否大于零。

由(2.9)式与(2.11)式得

$$\operatorname{Im} W\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{-\left(\int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x\right) \pi f'_{0x}\left(\frac{x}{k}\right)}{c^2 - x^2/k^2} = 0 \quad (- \rightarrow +). \quad (2.12)$$

$x/k = \infty$ 可使上式满足, 但这没有意义。当 $\frac{x}{k} \neq \infty$, 且 $x/k < c$ 时¹⁾, (2.12)式化成

$$-\left(\int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x\right) f'_{0x}\left(\frac{x}{k}\right) = 0 \quad (- \rightarrow +). \quad (2.13)$$

由于 $\int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x$ 为正, 所以上式化成

$$f'_{0x}\left(\frac{x}{k}\right) = 0 \quad (+ \rightarrow -). \quad (2.14)$$

这表明, 若令与 $f_{0x}(u_x)$ 极大值对应的 u_x 等于 x/k , 可使(2.12)式满足。将此 x/k 值代入 $\operatorname{Re} W(x/k)$, 而当

$$\operatorname{Re} W\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{-1 - \left(\int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x\right) \int \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x}{c^2 - x^2/k^2} > 0 \quad (2.15)$$

时, $W(\omega/k)$ 将 ω/k 的上半平面所映照成的区域包含正实轴。由于 $x/k < c$, (2.15)式可改写成

$$1 + \int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \int \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x < 0. \quad (2.5)$$

这就证明了当满足判据(2.5)与(2.14)式时, (2.4)式的右方可取正实数, 所以(2.4)式有解, 即有不稳定电磁波存在。至此为止, 本节中所讨论的 $F_0(\mathbf{u})$ 均是一般的分布函数。

1) 由(2.14)式可见, x/k 的值由与 $f_{0x}(u_x)$ 极大值对应的 u_x 值确定, 因而不可能大于 c 。

因此这些结论均是普遍的,且是严格的.

作为各向异性的速度分布函数的最简单情况,我们研究非各向等温的等离子体(在外磁场¹⁾中的等离子体,沿磁场方向的温度可与垂直方向的温度不等),其分布函数为

$$f_{0x}(u_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT_{\perp}}} e^{-mu_x^2/2KT_{\perp}}, \quad (2.16a)$$

$$f_{0z}(u_z) = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT_{\parallel}}} e^{-mu_z^2/2KT_{\parallel}}, \quad (2.16b)$$

式中K为玻耳兹曼常数. 因与 $f_{0z}(u_z)$ 的极大值对应的 u_z 等于零,故将 $x/k = 0$ 和(2.16a), (2.16b)代入(2.5)式,得

$$T_{\parallel} < T_{\perp}. \quad (2.17)$$

这表明当垂直于波传播方向的等离子体温度大于沿波传播方向的温度时,自激发的不稳定电磁波即能产生^[4].

对于分布函数(2.16a), (2.16b), 当 x/k 自 $-\infty$ 变向 $+\infty$ 时, $Z(R)$, $Y(R)$ 与 $W(R)$ 的图形如图 1—3 所示.

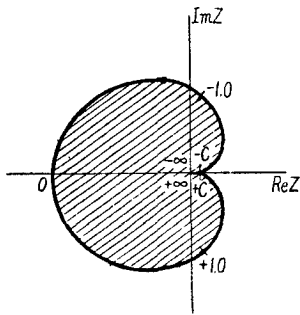


图 1 $Z(R)$ 的图形^[2]. $f_{0z}(u_z)$ 为麦克斯韦分布(2.16b). 在曲线旁所表示的是 x/k 的数值. x/k 的上半平面映照成画斜线的区域

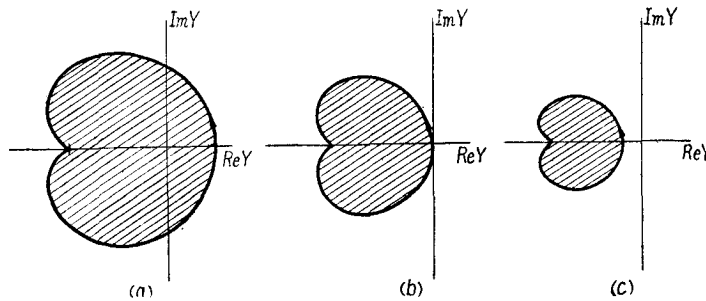


图 2 $Y(R)$ 的图形
(a) $T_{\perp} > T_{\parallel}$; (b) $T_{\perp} = T_{\parallel}$; (c) $T_{\perp} < T_{\parallel}$ ^[2]

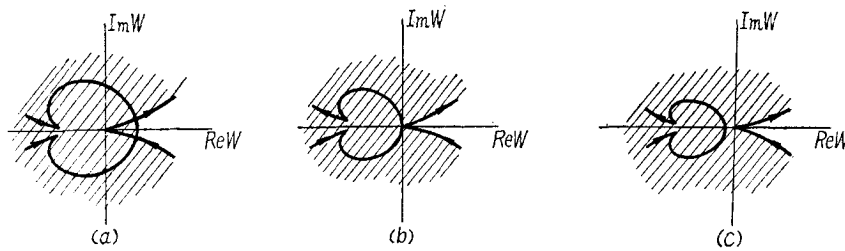


图 3 $W(R)$ 的图形. x/k 的上半平面映照成画斜线的区域
(a) $T_{\perp} > T_{\parallel}$; (b) $T_{\perp} = T_{\parallel}$; (c) $T_{\perp} < T_{\parallel}$

1) 设外磁场沿 x 方向.

2) 当 $x/k = 0$, $\text{Im}Y\left(\frac{x}{k}\right) = 0$, $\text{Re}Y\left(\frac{x}{k}\right) = -1 - \frac{KT_{\perp}}{m} \int \frac{f'_{0z}(u_z)}{u_z} du_z = -1 + T_{\perp}/T_{\parallel}$. 所以 $Y(R)$ 与实轴的

交点: (a) 当 $T_{\perp} > T_{\parallel}$, $\text{Re}Y\left(\frac{x}{k}\right) > 0$; (b) 当 $T_{\perp} = T_{\parallel}$, $\text{Re}Y\left(\frac{x}{k}\right) = 0$; (c) 当 $T_{\perp} < T_{\parallel}$, $\text{Re}Y\left(\frac{x}{k}\right) < 0$.

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x = KT_{\perp}/m$, $Y\left(\frac{x}{k}\right) = -1 - \frac{KT_{\perp}}{m} Z\left(\frac{x}{k}\right)$, 因此容易画出 $Y(R)$ 的图形.

由 $W\left(\frac{x}{k}\right) = Y\left(\frac{x}{k}\right) / (c^2 - x^2/k^2)$, 我们在图 3 中画出与图 2 对应的 $W(R)$ 曲线.

由图 3(a) 所示可知, 波数为 $0 \rightarrow k_{\max}$ 的谐波均是不稳定的. k_{\max} 由下式确定:

$$\frac{k_{\max}^2}{\omega_{pe}^2} = \frac{-1 - \int u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \int \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x}{c^2 - x^2/k^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1 \right). \quad (2.17)$$

图 4 中画出电磁波的稳定与不稳定区域.

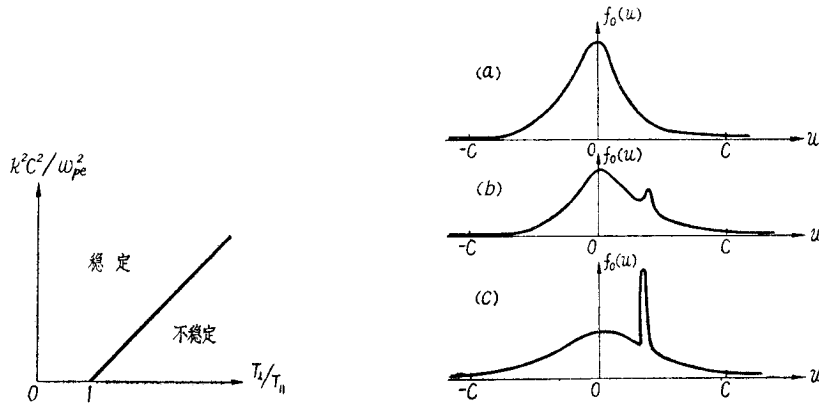


图 4

图 5

图 5(a)–(c) 画出了 $f_{0x}(u_x)$ 为麦克斯韦分布函数情况的图形. 现在进而讨论一般分布函数的情况. 与各种实际物理情况所对应的分布函数曲线的形状与麦克斯韦分布的偏离必在 $u_x = -c \rightarrow +c$ 之间 (参见图 5), 因为实际粒子的速率不可能大于 c . 而当 $|u_x| > c$ 时, 非相对论性近似的分布函数的数值很小, 且是单调缓慢地趋向于零 (当 $u_x \rightarrow \pm \infty$). 因此

$$f'_{0x}(u_x) > 0 \quad (u_x: -\infty \rightarrow -c), \quad (2.18a)$$

$$f'_{0x}(u_x) < 0 \quad (u_x: c \rightarrow \infty). \quad (2.18b)$$

由(2.7)式得

$$\text{Im } Z\left(\frac{x}{k}\right) > 0 \quad \left(\frac{x}{k}: -\infty \rightarrow -c\right), \quad (2.19a)$$

$$\text{Im } Z\left(\frac{x}{k}\right) < 0 \quad \left(\frac{x}{k}: c \rightarrow \infty\right). \quad (2.19b)$$

此时 $\text{Re } Z\left(\frac{x}{k}\right)$ 很小. 这二段曲线的图形如图 6(a) 所示. 与这二段 $Z(R)$ 对应的 $Y(R)$ 与 $W(R)$ 的相应线段如图 6(b), 图 6(c) 所示. 由此可见, W 平面中位于这二段曲线左边的区域不可能包含正实轴.

当 $-c < \frac{x}{k} < c$, $c^2 - \frac{x^2}{k^2} > 0$, 由 $W\left(\frac{x}{k}\right) = Y\left(\frac{x}{k}\right) / (c^2 - x^2/k^2)$ 可见: 曲线 $W(x/k)$

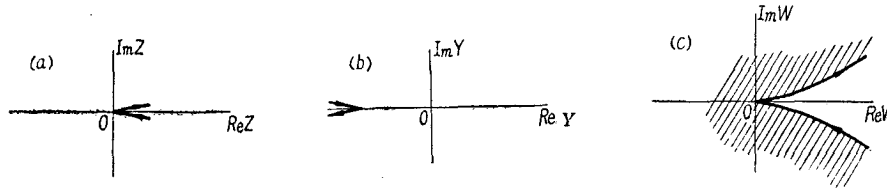


图6 当 $x/k = -\infty \rightarrow -c$, $c \rightarrow \infty$ 时, (a) $Z(R)$; (b) $Y(R)$; (c) $W(R)$ 的图形
斜线表示曲线左方的区域

是由曲线 $Y(x/k)$ 乘一正实数因子 $1/(c^2 - x^2/k^2)$ 而得出的。这表明上面利用 Y 曲线得到的稳定性判据是普遍性的。

最后我们根据判据(2.5)式来考察束流对不稳定性的影响,文献[5]中讨论过类似的问题。设将定向运动的粒子束流注入具有各向同性麦克斯韦分布的等离子体中。首先考虑粒子束流沿 x 方向运动的情况,此时 $f_{0x}(u_x)$ 的形式如图 5(b) [或图 5(c)] 所示, $f_{0x}(u_x)$ 为麦克斯韦分布。这时判据(2.5)式中, $\frac{x}{k} = 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x} du_x = -m/KT, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x > \frac{KT}{m}.$$

因而

$$1 + \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x \int \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x < 1 - \frac{KT}{m} \frac{m}{KT} = 0, \quad (2.20)$$

故有不稳定的电磁波存在。由此可见,束流引起垂直于束流方向传播的电磁波不稳定性。

其次考察束流沿电磁波传播方向的情况,此时(2.5)式左方的函数可化成

$$1 + \frac{KT}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'_{0x}(u_x)}{u_x - x/k} du_x = 1 + \frac{KT}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{0x}(u_x) - f_{0x}\left(\frac{x}{k}\right)}{(u_x - x/k)^2} du_x. \quad (2.21)$$

因而当

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{0x}(u_x) - f_{0x}\left(\frac{x}{k}\right)}{(u_x - x/k)^2} du_x < -\frac{m}{KT} \quad (2.22)$$

时,电磁波不稳定性存在。

当 $f_{0x}(u_x)$ 为麦克斯韦分布的情况,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{0x}(u_x) - f_{0x}(0)}{(u_x - 0)^2} du_x = -\frac{m}{KT}. \quad (2.23)$$

对于如图 5(b) [或图 5(c)] 所示的分布函数,有两个极大峰。由第一个峰得出 $x/k = 0$, 则比较图 5(a) 与图 5(b) [或图 5(c)] 可见,(2.22)式不能成立。但还需考虑第二个峰所

1) 当 $f_{0x}(u_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi KT}} e^{-mu_x^2/2KT}$ 时, $\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x = KT/m$ 。比较图 5(a) 与图 5(b) [或图 5(c)] 可见,

对于图 5(b) [或图 5(c)] 所示的分布函数,显然有 $\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 f_{0x}(u_x) du_x > KT/m$ 。

得出的 x/k 与 $f_{0x}(x/k)$. 等离子体的密度、温度与粒子束流的密度、速度对积分值均有影响, 在一定条件下出现不稳定性是可能的. 例如当粒子束流密度远大于等离子体密度时 [如图 5(c) 所示的分布], (2.22) 式可以成立.

三、相对论性情况

在等离子体的电磁波中, 电子振荡的贡献是主要的. 当电子温度达到热核温度 (10^7 °C — 10^8 °C) 时, 有必要考虑相对论性修正. 与文献 [3] 类似的步骤, 得出当 $F_0(\mathbf{u})$ 各向异性时, 相对论性等离子体的电磁波色散关系为 [式中 $p = -i\omega$, $\gamma = (1 - u^2/C^2)^{-1/2}$]

$$\begin{aligned} \frac{k^2 C^2 + p^2}{\omega_{pe}^2} = & \int \frac{u_x}{\gamma} \left(1 - \frac{u_x^2}{C^2}\right) \frac{\partial F_0}{\partial u_x} d\mathbf{u} - \int \frac{u_x^2 u_y}{\gamma C^2} \frac{\partial F_0}{\partial u_y} d\mathbf{u} - \int \frac{u_x^2 u_z}{\gamma C^2} \frac{\partial F_0}{\partial u_z} d\mathbf{u} - \\ & - 5p \int \frac{u_x^2}{\gamma(p + ik u_x) C^2} F_0 d\mathbf{u} + ik \left\{ \int \frac{u_x^3}{\gamma(p + ik u_x) C^2} \frac{\partial F_0}{\partial u_x} d\mathbf{u} + \right. \\ & \left. + \int \frac{u_x u_y u_x^2}{\gamma(p + ik u_x) C^2} \frac{\partial F_0}{\partial u_y} d\mathbf{u} - \int \frac{(1 - u_x^2/C^2) u_x^2}{\gamma(p + ik u_x)} \frac{\partial F_0}{\partial u_x} d\mathbf{u} \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

保留到分母为 C^2 项的相对论性麦克斯韦分布的近似式为 [3]

$$A \left(1 + \frac{5}{2} \frac{u^2}{C^2} - \frac{3}{8} \frac{m}{KT} \frac{u^4}{C^2}\right) e^{-mu^3/2KT}, \quad (3.2)$$

式中 A 为归一化常数. 对于温度各向异性的情况 ($T_x = T_y = T_{\perp}$, $T_x = T_{\parallel}$, 而 $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$), 我们将 (3.2) 推广成

$$\begin{aligned} F_0 = & A' \left\{ 1 + \frac{5}{2} \frac{u^2}{C^2} - \frac{3}{8C^2} \left[\frac{m}{KT_{\perp}} (u_x^2 + u_y^2)^2 + \frac{2u_x^2 (u_x^2 + u_y^2)}{K\sqrt{T_{\perp}T_{\parallel}}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{m}{KT_{\parallel}} u_x^4 \right] \right\} e^{-\frac{m(u_x^2 + u_y^2)}{KT_{\perp}}} e^{-\frac{mu_x^2}{KT_{\parallel}}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

式中

$$A' = \frac{\frac{m}{2\pi KT_{\perp}} \left(\frac{m}{2\pi KT_{\parallel}}\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{2KT_{\perp}}{mC^2} + \frac{11}{8} \frac{KT_{\parallel}}{mC^2} - \frac{3K\sqrt{T_{\perp}T_{\parallel}}}{2mC^2}\right)}.$$

将 (3.3) 代入 (3.1), 略去分母大于 C^2 的项, 则得出考虑一级相对论修正的色散关系. 我们只考虑 $|ku_x| < |p|$ 的电磁波

$$\frac{1}{p + ik u_x} = \frac{1}{p} - \frac{iku_x}{p^2} - \frac{k^2 u_x^2}{p^3} + \dots \quad (3.4)$$

当展开式 (3.4) 中只取第一项, 由色散关系得出

$$\omega^2 - k^2 C^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 - \frac{2KT_{\perp}}{mC^2} - \frac{KT_{\parallel}}{2mC^2}\right). \quad (3.5)$$

当温度各向同性, 则就归结到文献 [3] 的结果:

$$\omega^2 - k^2 C^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 - \frac{5KT}{2mC^2}\right), \quad (3.6)$$

式中 $T = T_{\parallel} = T_{\perp}$. 但由现在的分析得出结论: 垂直于波传播方向的相对论质量效应对

色散关系的修正为 $\frac{KT_{\perp}}{mC^2}$ (每一自由度), 而平行于波传播方向的修正则为 $\frac{1}{2} \frac{KT_{\parallel}}{mC^2}$, 即为前者的一半.

若展开式(3.4)中取三项, 则由色散关系化得

$$\omega^4 - \omega^2[k^2C^2 + \omega_{pe}^2(1 - \alpha)] - k^2 \frac{KT_{\perp}}{m} \omega_{pe}^2(1 - \beta) = 0, \quad (3.7)$$

式中

$$\alpha \equiv \frac{2KT_{\perp}}{mC^2} + \frac{KT_{\parallel}}{2mC^2}, \quad (3.8a)$$

$$\beta \equiv \frac{KT_{\perp}}{mC^2} + \frac{3K\sqrt{T_{\perp}T_{\parallel}}}{2mC^2} - \frac{KT_{\parallel}}{mC^2}. \quad (3.8b)$$

若略去分母为 C^2 的项, 则(3.7)式化成

$$\omega^4 - \omega^2[k^2C^2 + \omega_{pe}^2] - k^2 \frac{KT_{\perp}}{m} \omega_{pe}^2 = 0. \quad (3.9)$$

这正是 Weibel 得出的非相对论结果(文献[1], (9)式). 用与 Weibel 相类似的步骤, 可得不稳定电磁波增长系数的一级相对论修正公式

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{[k^2C^2 + \omega_{pe}^2(1 - \alpha)]^2 + 4k^2 \frac{KT_{\perp}}{m} \omega_{pe}^2(1 - \beta)} - [k^2C^2 + \omega_{pe}^2(1 - \alpha)] \right\}^{1/2}. \quad (3.10)$$

作者谨向导师卢鹤绂教授表示衷心的感谢, 并向徐正惠、陆正言同志表示谢意.

参 考 文 献

- [1] Weibel, E. S., *Phys. Rev. Letters*, **2** (1959), 83.
- [2] Penrose, O., *Phys. Fluids*, **3** (1960), 258.
- [3] 例如见 Силин, В. П., Рухадзе, А. А., *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред*, §11—§13 (1961).
- [4] Сагдеев, Р. З. и Шафранов, В. Д., *ЖЭТФ*, **39** (1960), 181.
- [5] Степанов, К. Н., *ЖТФ*, **31** (1961), 167, 176.

ON ELECTROMAGNETIC INSTABILITIES OF PLASMA

LOH CHYUAN-KONG

(Department of Physics, Fudan University)

ABSTRACT

In this paper, a strict and general instability criterion is obtained by analysing the geometric properties of the dispersion relation of electromagnetic waves in plasma with anisotropic velocity distribution. The criterion is applied to the cases of anisotropic temperature and current-carrying plasma. Finally, the relativistic correction of Weibel's formula is obtained.