第50卷第4期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.50, No.4
2007年7月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jul., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)04-0851-06 **文献标识码: A**

分数次积分算子的双权弱型赋范不等式

李文明

河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050016
E-mail: lwmingg@sina.com

摘 要 证明了若权函数 (u,v) 满足下列 A_p 型条件: 对 $\delta>0$ 及任意的方体 Q, $|Q|^{p\alpha/n}\|u\|_{L(\log L)^{2p-1+\delta},Q}(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{-p'/p}dx)^{p/p'}\leq K<\infty$, 则分数次积分算子 I_α, $0<\alpha<n$, 是从 $L^p(v)$ 到 $L^{p,\infty}(u)$ 的有界算子, $1<p<\infty$.

关键词 分数次积分; 双权; 极大函数
MR(2000) 主题分类 42B20, 42B25
中图分类 O174.3

Two-Weight Weak Type Norm Inequalities for Fractional Integral Operators

Wen Ming LI

College of Mathematics and Information Science, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050016*, P. R. China*
E-mail: lwmingg@sina.com

Abstract We prove that if the weights (u,v) satisfy the following A_p-type condition: for some $\delta>0$ and for all cubes Q, $|Q|^{p\alpha/n}\|u\|_{L(\log L)^{2p-1+\delta},Q}(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{-p'/p}dx)^{p/p'}\leq K<\infty$, then the fractional integral $I_\alpha, 0<\alpha<n$, is bounded from $L^p(v)$ to $L^{p,\infty}(u)$, $1<p<\infty$.

Keywords fractional integral; two-weight; maximal function
MR(2000) Subject Classification 42B20, 42B25
Chinese Library Classification O174.3

1 引言及主要结果

设 α, $0<\alpha<n$, 对 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f, 分数次积分算子 (或 Riesz 位势)I_α 定义为

$$I_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy.$$

对权函数对 (u,v) 及 $1<p\leq q<\infty$, Sawyer [1] 证明了双权弱型 (p,q) 不等式

$$u(\{x\in\mathbb{R}^n:|I_\alpha f(x)|>\lambda\})\leq\frac{C}{\lambda^q}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p v(x)dx\bigg)^{q/p}$$

成立的充要条件是

$$\int_Q[I_\alpha(\chi_Q u)(x)]^{p'}v(x)^{1-p'}dx\leq C\bigg(\int_Q u(x)dx\bigg)^{p'/q'},$$

收稿日期: 2006-03-01; 接受日期: 2006-11-05
基金项目: 河北省自然科学基金资助项目 (A2006000129)

对 $\mathbb{R}^n$ 中的任意方体 Q 成立. Cruz-Uribe 和 Pérez [2] 证明了 A_p 型条件

$$|Q|^{p\alpha/n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)^r dx\right)^{1/r}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{-p'/p}dx\right)^{p/p'} \leq C < \infty, \quad r > 1, \tag{1}$$

对分数次积分算子 I_α 满足双权弱型 (p,p) 不等式是充分的.

本文的目的是减弱 (1) 中关于 u 的条件, 用一个更小的 Orlicz 块代替幂块. 这也回答了 Cruz-Uribe 和 Pérez 的文 [3, 注 1.3] 提出的一个问题.

为叙述本文的主要结果, 先回顾方体上 Luxemburg 范数的概念. 称 $B:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个 Young 函数, 如果 B 是连续凸的增函数, $B(0)=0$ 且当 $t\to\infty$ 时, $B(t)\to\infty$. 对局部可积函数 f 和 Young 函数 B, 定义 f 在方体 Q 上的 Luxemburg 范数为

$$\|f\|_{B,Q} = \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|}\int_Q B\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\}.$$

特别对 Young 函数 $B(t)=t(1+\log^+ t)^{2p-1+\delta}$, $\delta>0$, 它的 Luxemburg 范数表示为

$$\|\cdot\|_{L(\log L)^{2p-1+\delta},Q}.$$

下面是我们的主要结果.

定理 1.1 设 $0<\alpha<n$, $1<p<\infty$, (u,v) 是权函数. 若对 $\delta>0$ 及任意方体 Q, 有

$$|Q|^{p\alpha/n}\|u\|_{L(\log L)^{2p-1+\delta},Q}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q v(x)^{-p'/p}dx\right)^{p/p'} \leq K < \infty. \tag{2}$$

则对任意 $\lambda>0$ 及 $f\in L^p(v)$, 有

$$u(\{x\in\mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p v(x)dx. \tag{3}$$

我们需要用到 Orlicz 空间的下列事实, 关于 Orlicz 空间的更多知识参见文 [4]. 称 Young 函数 B 是二倍的, 如果存在 $C>0$, 使得 $B(2t)\leq CB(t)$, $t>0$. 对 Young 函数 B, 其共轭 Young 函数记为 $\overline{B}$, 它们满足 $t\leq B^{-1}(t)\overline{B}^{-1}(t)\leq 2t,\ t>0$. 给定三个 Young 函数 A,B 与 C, 若对任意 $t>0$, $A^{-1}(t)C^{-1}(t)\leq B^{-1}(t)$, O'Neil [5] 得到下列广义 Hölder 不等式: 对任意方体 Q 与任意函数 f,g, 有

$$\|fg\|_{B,Q} \leq 2\|f\|_{A,Q}\|g\|_{C,Q}. \tag{4}$$

特别地, 对 Young 函数 B, 有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)g(x)|dx \leq 2\|f\|_{B,Q}\|g\|_{\overline{B},Q}. \tag{5}$$

设 $1<p<\infty$. 称二倍 Young 函数 B 满足 B_p 条件, 若存在常数 $c>0$, 使得

$$\int_c^\infty \frac{B(t)}{t^p}\frac{dt}{t} \approx \int_c^\infty \left(\frac{t^{p'}}{\overline{B}(t)}\right)^{p-1}\frac{dt}{t} < \infty.$$

引理 1.2[6] 设 B 是二倍 Young 函数, $1<p<\infty$, 则 $B\in B_p$ 的充要条件是 $M_B: L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界.

对 Young 函数 B, 与其相联系的 Orlicz 极大算子定义为

$$M_B f(x) = \sup_{Q\ni x}\|f\|_{B,Q}.$$

二进极大算子 M_B^d 类似定义, 只是其中的上确界是对包含 x 的所有二进方体取.

对 $\alpha, 0\leq\alpha<n$, Young 函数 B, 定义分数次 Orlicz 极大算子

$$M_{B,\alpha}f(x) = \sup_{Q\ni x}|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,Q}.$$

二进分数次 Orlicz 极大算子 $M^d_{B,\alpha}f$ 类似定义. 若 $\alpha=0$, $B(t)=t$, $M_{B,\alpha}$ 就是 Hardy–Littlewood 极大算子 M. 若 $0<\alpha<n$, $B(t)=t$, $M_{B,\alpha}$ 是分数次极大算子 M_α.

本文主要用到 Young 函数 $B(t)=t(1+\log^+t)^\delta$, $\delta>0$. 对这个 Young 函数, f 在方体 Q 上的 Luxemburg 范数表示为 $\|f\|_{L(\log L)^\delta,Q}$, 极大算子记为 $M_{L(\log L)^\delta}f$. 其共轭 Young 函数 $\overline{B}(t)\approx e^{t^{1/\delta}}$, 对应的 Luxemburg 范数及极大算子分别记为 $\|f\|_{\exp L^{1/\delta},Q}$ 与 $M_{\exp L^{1/\delta}}f$.

2 $M_{B,\alpha}$ 的双权强型不等式

为证 $M_{B,\alpha}$ 的双权强型不等式, 需要几个引理.

引理 2.1[6] 设 B 是二倍 Young 函数, f 是非负函数, 使得当 $l(Q)\to\infty$ 时, $\|f\|_{B,Q}\to 0$. 对 $t>0$, 记 $\Omega_t=\{x\in\mathbb{R}^n: M_Bf(x)>t\}$. 若 Ω_t 非空, 则存在一列互不相交的极大二进方体 $\{C_j^t\}$, 使得对每个 j, $t/4^n<\|f\|_{B,C_j^t}\le t/2^n$, $\Omega_t\subset\bigcup_j 3C_j^t$, 以及

$$\{x\in\mathbb{R}^n: M_B^df(x)>t/4^n\}=\bigcup\nolimits_j C_j^t.$$

进而有

$$|\Omega_t|\le C\int_{\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f(x)|>t/2\}}B\left(\frac{|f(x)|}{t}\right)dx. \tag{6}$$

二进方体列 $\{C_j^t\}$ 称为 f 关于 B 在高度 t 的 Calderón–Zygmund 分解.

引理 2.2 设 $\alpha, 0\le\alpha<n$, B 是二倍 Young 函数, f 是非负函数, 使得当 $l(Q)\to\infty$ 时, $|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,Q}\to 0$, 则对 $t>0$, 存在一列互不相交的极大二进方体 $\{C_j^t\}$, 使得对每个 j, $t/4^n<|C_j^t|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,C_j^t}\le t/2^n$, 且

$$\{x\in\mathbb{R}^n: M^d_{B,\alpha}f(x)>t/4^n\}=\bigcup\nolimits_j C_j^t,\quad \{x\in\mathbb{R}^n: M_{B,\alpha}f(x)>t\}\subset\bigcup\nolimits_j 3C_j^t.$$

二进方体列 $\{C_j^t\}$ 称为 f 关于 B 与 α 在高度 t 的 Calderón–Zygmund 分解.

需要指出的是, Liu 和 Lu [7] 对 Young 函数 $B(t)=t(1+\log^+t)$ 证明了引理 2.2 的结论.

证明 对 $t>0$, 设 $\{C_j^t\}$ 为满足 $t/4^n<|C_j^t|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,C_j^t}$ 的互不相交的极大二进方体列. 记 $\widetilde{C}_j^t$ 为包含 C_j^t, 边长为其二倍的二进方体. 则由 $B(t)/t$ 递增以及 C_j^t 的极大性得

$$t/4^n<|C_j^t|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,C_j^t}\le 2^{n-\alpha}|\widetilde{C}_j^t|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,\widetilde{C}_j^t}\le t/2^n.$$

由此易见 $\{x\in\mathbb{R}^n: M^d_{B,\alpha}f(x)>t/4^n\}=\bigcup_j C_j^t$.

对 $x\in\Omega_t=\{y\in\mathbb{R}^n: M_{B,\alpha}f(y)>t\}$, 由定义, 存在包含 x 的方体 R, 使得

$$|R|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,R}>t. \tag{7}$$

设整数 k, 使得 $2^{-(k+1)n}<|R|\le 2^{-kn}$, 则存在至多 2^n 个边长为 2^{-k} 的方体与 R 的内部相交. 易见这些方体中至少有一个, 不妨设 J_1, 满足 $t/2^n<|R|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_{J_1}f\|_{B,R}$. 事实上, 若对每个 $i=1,2,\dots,2^n$, 有 $|R|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_{J_i}f\|_{B,R}\le t/2^n$, 因为 $R\subset\bigcup_{i=1}^{2^n}J_i$, 故

$$|R|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,R}=|R|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_{\bigcup_{i=1}^{2^n}J_i}f\|_{B,R}\le\sum_{i=1}^{2^n}|R|^{\frac{\alpha}{n}}\|\chi_{J_i}f\|_{B,R}\le t,$$

这与 (7) 矛盾. 由于 $|R|\le|J_1|\le 2^n|R|$, 可得 $t/4^n<|J_1|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,J_1}$. 因此对某个 k, $J_1\subset C_k^t$, 进而 $R\subset 3J_1\subset 3C_k^t$. 故 $\Omega_t\subset\bigcup_j 3C_j^t$. 证毕.

引理 2.3 设 $\alpha, 0\le\alpha<n$, B 是二倍 Young 函数, f 是非负函数, 使得当 $l(Q)\to\infty$ 时, $|Q|^{\frac{\alpha}{n}}\|f\|_{B,Q}\to 0$. 固定 $a>2^{n+1}$, 对每个整数 k, 记 $D_k=\{x\in\mathbb{R}^n: M^d_{B,\alpha}f(x)>a^k/4^n\}$, 二进

方体列 $\{Q_j^k\}$ 称为 f 关于 B 与 α 在高度 a^k 的 Calderón–Zygmund 分解. 对任意整数 k,j, 记 $E_j^k = Q_j^k \setminus (Q_j^k \cap D_{k+1})$, 则 $\{E_j^k\}$ 互不相交且满足

$$|Q_j^k \cap D_{k+1}| < 2^n/a|Q_j^k|, \quad |Q_j^k| < \frac{1}{1-2^n/a}|E_j^k|.$$

证明 $\{E_j^k\}$ 互不相交是显然的. 由引理 2.2 得

$$a^k/4^n < |Q_j^k|^{\alpha/n}\|f\|_{B,Q_j^k} \le a^k/2^n. \tag{8}$$

由 Luxemburg 范数的定义及 (8) 式, 得

$$1 < \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} B\left(\frac{4^n}{a^k}|Q_j^k|^{\frac{\alpha}{n}}|f(y)|\right)dy, \quad \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k} B\left(\frac{2^n}{a^k}|Q_j^k|^{\frac{\alpha}{n}}|f(y)|\right)dy \le 1.$$

由于 $B((2^n/a)t) \le (2^n/a)B(t)$, $t>0$ 以及 $B(t)$ 递增得

$$\begin{aligned}
\frac{|Q_j^k \cap D_{k+1}|}{|Q_j^k|} &= \sum_i \frac{|Q_j^k \cap Q_i^{k+1}|}{|Q_j^k|} = \sum_{i:Q_i^{k+1}\subset Q_j^k} \frac{|Q_i^{k+1}|}{|Q_j^k|} \\
&< \sum_{i:Q_i^{k+1}\subset Q_j^k} \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_i^{k+1}} B\left(\frac{4^n}{a^{k+1}}|Q_i^{k+1}|^{\frac{\alpha}{n}}|f(y)|\right)dy \\
&< \frac{2^n}{a}\sum_{i:Q_i^{k+1}\subset Q_j^k} \frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_i^{k+1}} B\left(\frac{2^n}{a^k}|Q_j^k|^{\frac{\alpha}{n}}|f(y)|\right)dy \\
&\le \frac{2^n}{a}\frac{1}{|Q_j^k|}\int_{Q_j^k\cap(\cup_i Q_i^{k+1})} B\left(\frac{2^n}{a^k}|Q_j^k|^{\frac{\alpha}{n}}|f(y)|\right)dy \le 2^n/a.
\end{aligned}$$

因此 $|E_j^k|/|Q_j^k| > 1-2^n/a > 0$. 证毕.

定理 2.4 设 $0<\alpha<n$, p, $1<p<\infty$, A, B 与 C 是三个 Young 函数满足 $A^{-1}(t)C^{-1}(t) \le B^{-1}(t)$, $t>0$, 且 $C \in B_p$. 若权函数 (u,v), 使得对任意方体 Q, 有

$$|Q|^{\alpha/n}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)dx\right)^{1/p}\|v^{-1/p}\|_{A,Q} \le K < \infty, \tag{9}$$

则对任意 $f \in L^p(v)$, $\int_{\mathbb{R}^n} M_{B,\alpha}f(x)^p u(x)dx \le C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p v(x)dx$.

证明 由标准的稠密论证方法, 我们不妨设 f 是具紧支集的非负有界函数. 易见 $l(Q)\to\infty$ 时 $|Q|^{\alpha/n}\|f\|_{B,Q} \to 0$.

固定 $a > 2^{n+1}$, 对 $k \in \mathbb{Z}$, 记 $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : a^k < M_{B,\alpha}f(x) \le a^{k+1}\}$, 则由引理 2.2, $\Omega_k \subset \bigcup_j 3Q_j^k$, 其中 $|Q_j^k|^{\alpha/n}\|f\|_{B,Q_j^k} > a^k/4^n$. 因此

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} M_{B,\alpha}f(x)^p u(x)dx &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{\Omega_k} M_{B,\alpha}f(x)^p u(x)dx \le C\sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{kp}u(\Omega_k) \\
&\le C\sum_{j,k} a^{kp}u(3Q_j^k) \le C\sum_{j,k}|Q_j^k|^{p\alpha/n}\|f\|_{B,Q_j^k}^p u(3Q_j^k) \\
&\le C\sum_{j,k} u(3Q_j^k)|Q_j^k|^{p\alpha/n}\|v^{-1/p}\|_{A,Q_j^k}^p\|fv^{1/p}\|_{C,Q_j^k}^p.
\end{aligned}$$

由 (9) 式及引理 2.3, 并注意到 $\{E_j^k\}$ 互不相交得

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} M_{B,\alpha}f(x)^p u(x)dx &\le C\sum_{j,k}|3Q_j^k|^{p\alpha/n}\left(\frac{1}{|3Q_j^k|}\int_{3Q_j^k}u(x)dx\right)\|v^{-1/p}\|_{A,3Q_j^k}^p\|fv^{1/p}\|_{C,Q_j^k}^p|E_j^k| \\
&\le C\sum_{j,k}\int_{E_{j,k}} M_C(fv^{1/p})^p dx \le C\int_{\mathbb{R}^n} f^p v dx.
\end{aligned}$$

最后一个不等式是由于 $C \in B_p$, 利用引理 1.2 得到. 证毕.

3 定理 1.1 的证明

定理 3.1[8] 设 $0 < \alpha < n$, $\varepsilon > 0$, 则对任意权函数 w 及函数 f,

$$w(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| M_\alpha(M_{L(\log L)^\varepsilon} w)(x) dx. \tag{10}$$

引理 3.2 设 $\varepsilon > 0$, f 是支撑于 Q 上的可积函数, 则

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q M_{L(\log L)^\varepsilon} f(x) dx \le C\bigg(1 + \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)^{1+\varepsilon} dx\bigg).$$

证明 对二倍 Young 函数 $B(t) = t(1 + \log^+ t)^\varepsilon$, 易证 $B(ts) \le CB(t)B(s)$, $t > 0$, $s > 0$. 由 (6) 式, 得

$$\begin{aligned}
\int_Q M_{L(\log L)^\varepsilon} f(x) dx &= \int_0^\infty |\{x \in Q : M_{L(\log L)^\varepsilon} f(x) > t\}| dt \\
&= 2 \int_0^\infty |\{x \in Q : M_{L(\log L)^\varepsilon} f(x) > 2t\}| dt \\
&\le 2\bigg(\int_0^1 |Q| dt + \int_1^\infty |\{x \in Q : M_{L(\log L)^\varepsilon} f(x) > 2t\}| dt \bigg) \\
&\le 2|Q| + C \int_1^\infty \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > t\}} \frac{|f(x)|}{t} \bigg(1 + \log^+ \frac{|f(x)|}{t}\bigg)^\varepsilon dt dx \\
&= 2|Q| + C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)^\varepsilon \int_1^{|f(x)|} \frac{1}{t}\bigg(1 + \log^+ \frac{1}{t}\bigg)^\varepsilon dt dx \\
&\le C|Q|\bigg(1 + \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|(1 + \log^+ |f(x)|)^{1+\varepsilon} dx\bigg).
\end{aligned}$$

证毕.

引理 3.3 设 $0 < \alpha < n$, $\varepsilon > 0$, $M_{L(\log L)^\varepsilon} f$ 是可测函数, 则存在不依赖于 f 与 x 的常数 $C > 0$, 使得

$$M_\alpha(M_{L(\log L)^\varepsilon} f)(x) \le C M_{L(\log L)^{1+\varepsilon}, \alpha} f(x). \tag{11}$$

证明 我们利用 [9] 中证明引理 2.3 的方法证明. 该文对 ε 是正整数时证明了 (11) 式. 对任意固定的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和任意包含 x 的方体 Q, 分解 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f\chi_{3Q}$, 则

$$\begin{aligned}
|Q|^{\alpha/n-1}\int_Q M_{L(\log L)^\varepsilon} f(y) dy &\le |Q|^{\alpha/n-1}\int_Q M_{L(\log L)^\varepsilon} f_1(y) dy + |Q|^{\alpha/n-1}\int_Q M_{L(\log L)^\varepsilon} f_2(y) dy \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II}.
\end{aligned}$$

对于 II, 利用文 [9] 中的结果, 对任意 $y \in Q$, 我们有

$$|Q|^{\alpha/n} M_{L(\log L)^\varepsilon} f_2(y) \le |Q|^{\alpha/n} M_{L(\log L)^{[\varepsilon]+1}} f_2(y) \le C \inf_{z \in Q} M_\alpha f(z),$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= |Q|^{-1} \int_Q |Q|^{\alpha/n} M_{L(\log L)^\varepsilon} f_2(y) dy \le C|Q|^{-1} \int_Q \inf_{z \in Q} M_\alpha f(z) dy \\
&\le C M_\alpha f(x) \le C M_{L(\log L)^{1+\varepsilon}, \alpha} f(x).
\end{aligned}$$

为估计I, 只要证对任意支撑于 Q 上的 f,

$$|Q|^{-1} \int_Q M_{L(\log L)^\varepsilon} f(y) dy \le C \|f\|_{L(\log L)^{1+\varepsilon}, Q}. \tag{12}$$

由齐次性我们可设 f 满足 $\|f\|_{L(\log L)^{1+\varepsilon},Q}=1$, 这意味着 $|Q|^{-1}\int_Q|f(y)|(1+\log^+|f(y)|)^{1+\varepsilon}dy\le 1$. 因此, 只要证对任意支撑于 Q 上的 f,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q M_{L(\log L)^\varepsilon}f(y)dy\le C\bigg(1+\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|(1+\log^+|f(y)|)^{1+\varepsilon}dy\bigg).$$

而这正是引理 3.2 的结论. 最后对 $3Q$ 使用 (12) 式, 得

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&\le C|3Q|^{\alpha/n-1}\int_{3Q}M_{L(\log L)^\varepsilon}f_1(y)dy\\&\le C|3Q|^{\alpha/n}\|f\|_{L(\log L)^{1+\varepsilon},3Q}\le CM_{L(\log L)^{1+\varepsilon},\alpha}f(x).\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.1 的证明 固定 $p,\ 1<p<\infty,\ \delta>0$. 记 $B(t)=t\log(1+t)^{1+\varepsilon}$, 其中 $0<\varepsilon<\delta/p$. Let $\eta=\delta-p\varepsilon$, 则

$$B^{-1}(t)\approx\frac{t}{\log(1+t)^{1+\varepsilon}}=\frac{t^{1/p}}{\log(1+t)^{1+\varepsilon+(p-1+\eta)/p}}\times t^{1/p'}\log(1+t)^{(p-1+\eta)/p}=A^{-1}(t)C^{-1}(t),$$

其中 $A(t)\approx t^p\log(1+t)^{(2+\varepsilon)p-1+\eta}=t^p\log(1+t)^{2p-1+\delta}$, $C(t)\approx t^{p'}\log(1+t)^{-1-(p'-1)\eta}$. 易证 $C\in B_{p'}$. 因此由定理 2.4, $M_{B,\alpha}:L^{p'}(u^{-p'/p})\to L^{p'}(v^{-p'/p})$ 有界, 只要

$$|Q|^{\alpha/n}\bigg(\frac{1}{|Q|}\int_Q v^{-p'/p}dx\bigg)^{1/p'}\|u^{1/p}\|_{A,Q}\le K<\infty.$$

这等价于条件 (2), 因为 $\|u^{1/p}\|_{A,Q}\approx\|u\|^{1/p}_{L(\log L)^{2p-1+\delta}}$.

由标准的逼近证明, 我们可设 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 并具紧支集.

对 $\lambda>0$, $\Omega_\lambda=\{x\in\mathbb{R}^n:|I_\alpha f(x)|>\lambda\}$ 有界, 故 $u(\Omega_\lambda)<\infty$. 由对偶性, 存在非负函数 $G\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, $\|G\|_{p'}=1$, 使得 $u(\Omega_\lambda)^{1/p}=\|u^{1/p}\chi_{\Omega_\lambda}\|_p=\int_{\Omega_\lambda}u^{1/p}Gdx$. 由定理 3.1 及与引理 3.3,

$$\begin{aligned}u(\Omega_\lambda)^{1/p}&\le\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|M_{B,\alpha}(u^{1/p}G)dx\le C\bigg(\frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pvdx\bigg)^{1/p}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}M_{B,\alpha}(u^{1/p}G)^{p'}v^{-p'/p}dx\bigg)^{1/p'}\\&\le C\bigg(\frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pvdx\bigg)^{1/p}\bigg(\int_{\mathbb{R}^n}G^{p'}dx\bigg)^{1/p'}\le C\bigg(\frac{1}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pvdx\bigg)^{1/p}.\end{aligned}$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Sawyer E., A two weight weak type inequality for fractional integrals, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 1984, **281**(1): 339–345.

[2] Cruz-Uribe D., Pérez C., Two-weight, weak-type norm inequalities for fractional integral, Calderon–Zygmund operators and commutators, *Indiana Math. J.*, 2000, **49**(2): 697–721.

[3] Cruz-Uribe D., Pérez, C., Sharp Two-weight, weak-type norm inequalities for singular integral operators, *Math. Res. Lett.*, 1999, **6**(3): 417–427.

[4] Bennett C., Sharppley R., Interpolation of operators, Boston: Academic Press, 1988.

[5] O'Neil R., Fractional integration in Orlicz spaces, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 1963, **115**(1): 300–328.

[6] Pérez, C., On sufficient conditions for the boundedness of the Hardy–Littlewood maximal operator between weighted L^p-spaces with different weights, *Proc. London Math. Soc.*, 1995, **71**(3): 135–157.

[7] Liu Z. G., Lu S. Z., Two-weight weak-type norm inequalities for the commutators of fractional integrals, *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2004, **48**(3): 397–409.

[8] Carro M. J., Pérez C., Soria F., Soria,J., Maximal functions and the control of weighted inequalities for the fractional integral operator, *Indiana Math. J.*, 2005, **54**(3): 627–644.

[9] Ding Y., Lu S. Z., Zhang P., Weak estimates for commutators of fractional integral operators, *Science in China, Ser. A*, 2001, **44**(7): 877–888.