第50卷第3期 数学学报中文版 Vol.50, No.3
2007年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series May, 2007

文章编号: 0583-1431(2007)03-0591-10 **文献标识码: A**

一类量子环面李代数的自同构群

郑兆娟 谭绍滨

厦门大学数学科学学院 厦门 361005
E-mail: tans@xmu.edu.cn

摘 要 $\tilde{A}=\mathbb{C}_q[x_1^{\pm 1},x_2^{\pm 1}]$ 为复数域上的非交换环面结合代数, $A=\tilde{A}\setminus\mathbb{C}$, $\mathrm{Der}\,\tilde{A}$ 为 $\tilde{A}$ 的导子李代数. 本文研究李代数 $L_q=\mathrm{Der}\,\tilde{A}\oplus A$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}\,L_q$.

关键词 李代数; 量子环面; 自同构群
MR(2000) 主题分类 08A35
中图分类 O152.5

Automorphism Group for a Class of Lie Algebras over Quantum Torus

Zhao Juan ZHENG Shao Bin TAN

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005*, P. R. China*
E-mail: tans@xmu.edu.cn

Abstract Let $\tilde{A}$=$\mathbb{C}_q[x_1^{\pm 1},x_2^{\pm 1}]$ be the non-commutative torus over the complex field, and $A=\tilde{A}\setminus\mathbb{C}$, $\mathrm{Der}\,\tilde{A}$ be the Lie algebra of Derivations over $\tilde{A}$. In this paper we study the automorphism group Aut L_q for the Lie algebra L_q =Der $\tilde{A}+A$.

Keywords Lie algebra; quantum torus; automorphism group
MR(2000) Subject Classification 08A35
Chinese Library Classification O152.5

1 引言及定理

设 $q\in\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}_q=\mathbb{C}_q[x_1^{\pm 1},x_2^{\pm 1}]$ 为量子环面. 记 $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_q)$ 为 $\mathbb{C}_q$ 上的斜导子李代数 [1]. 记 L_q' 为李代数 $\mathbb{C}_q\oplus\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_q)$ 的导出子代数, $L_q=L_q'+\mathbb{C}d_1+\mathbb{C}d_2$, 其中 d_1,d_2 为 $\mathbb{Z}^2$- 分次李代数 L_q' 的两个度导子. 当 $q=1$ 时, $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_1)$ 有时被称为 Virasoro–like 代数. 文 [2] 得到了 $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_1)+\mathbb{C}d_1+\mathbb{C}d_2$ 的自同构群为 $GL_2(\mathbb{Z})\ltimes(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$. 文 [3] 得到了李代数 L_1' 的自同构群为 $(GL_2(\mathbb{Z})\ltimes(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*))\ltimes\mathbb{C}^2_\infty$, 其中 $\mathbb{C}^2_\infty$ 是 L_1' 中幂零元生成的自同构子群. 而当 $q\neq 1$ 为 p 次本原单位根时, 文 [4] 给出了李代数 $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_{q_1})$ 与 $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_{q_2})$ 同构的充分必要条件, 并由此得到了 $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_q)$ 的自同构群为 $GL_2(\mathbb{Z})\ltimes(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$. 当 $q\neq 0$ 为非单位根, 亦对任意自然数 n, $q^n\neq 1$ 时, 李代数 $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_q)$ 为单李代数, 有时被称为 Virasoro–like 代数的 q 类似 [5]. 文 [6] 得到了李代数 $\mathcal{D}_{\mathrm{skew}}(\mathbb{C}_q)+\mathbb{C}d_1+\mathbb{C}d_2$ 的自同构群为 $GL_2(\mathbb{Z})\ltimes(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*)$. 本文研究当 q 为非单位根时李代数 L_q 的自同构群. 具体地说, 若记 $\Gamma=\mathbb{Z}\mathbf{e}_1\oplus\mathbb{Z}\mathbf{e}_2$, $\Gamma^*=\Gamma\setminus\{\mathbf{0}\}$, 其中 $\mathbf{e}_1=(1,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1)$. 对 $\mathbf{m}=(m_1,m_2)=m_1\mathbf{e}_1+m_2\mathbf{e}_2\in\mathbb{Z}^2$, 记 $x^{\mathbf{m}}=x_1^{m_1}x_2^{m_2}\in\mathbb{C}_q[x_1^{\pm 1},x_2^{\pm 1}]$, 则李代数

收稿日期: 2006-01-26; 接受日期: 2006-06-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10371100)

L_q 可看成由元素 $E(\mathbf{m}), x^{\mathbf{m}}$ 及 $d_1, d_2, \mathbf{m} \in \Gamma^*$张成的线性空间, 其李运算由如下反对称关系给定

$$\begin{aligned}&[E(\mathbf{m}), E(\mathbf{n})] = g(\mathbf{m},\mathbf{n})E(\mathbf{m}+\mathbf{n}), \quad [E(\mathbf{m}), x^{\mathbf{n}}] = g(\mathbf{m},\mathbf{n})x^{\mathbf{m}+\mathbf{n}} = [x^{\mathbf{m}}, x^{\mathbf{n}}],\\ &[d_i, E(\mathbf{m})] = m_iE(\mathbf{m}), \quad [d_i, x^{\mathbf{m}}] = m_ix^{\mathbf{m}}, \quad [d_1, d_2] = 0,\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2) \in \Gamma^*$, $g(\mathbf{m},\mathbf{n}) = q^{m_2n_1} - q^{m_1n_2}$, $i = 1, 2$.

下面叙述本文的主要结果.

定理 设 $q \in \mathbb{C}^*$ 为非单位根, 则李代数 $L_q = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{E(\mathbf{m}), x^{\mathbf{m}}, d_1, d_2 \mid \mathbf{m} \in \Gamma^*\}$ 的自同构群为 $\operatorname{Aut} L_q \cong GL_2(\mathbb{Z}) \ltimes_{\theta_2} (\mathbb{C}^{*4} \rtimes_{\theta_1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

关于量子环面 $\mathbb{C}_q$ 及其导子代数的研究近来受到人们较广泛的关注. 这主要源于量子环面 $\mathbb{C}_q$ 作为扩张仿射李代数 [7] 的坐标代数, 它在扩张仿射李代数的结构与表示理论研究中起着重要作用. 关于量子环面 $\mathbb{C}_q$ 及其导子代数的单性、导子结构、中心扩张及表示理论可参阅文献 [8–20].

2 自同构群

记 $\operatorname{Aut} L_q$ 为李代数 L_q 的自同构群, A, B 为李代数 L_q 的两个子空间, 其中

$$A = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{x^{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m} \in \Gamma^*\}, \quad B = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{E(\mathbf{m}) \mid \mathbf{m} \in \Gamma^*\}.$$

另外记 $L_q(0,0) = \mathbb{C}d_1 \oplus \mathbb{C}d_2$. 则 $L_q = A + B + L_q(0,0)$, 其中 A, B 为李代数 L_q 的李子代数, 并且李代数 L_q 有如下的 $\mathbf{Z}^2$- 分次: $L_q = \bigoplus_{\mathbf{m}\in\Gamma}(L_q)_{\mathbf{m}}$, 其中分次空间为

$$(L_q)_{\mathbf{m}} = \begin{cases} \mathbb{C}E(\mathbf{m}) + \mathbb{C}x^{\mathbf{m}}, & \mathbf{m} \in \Gamma^*, \\ \mathbb{C}d_1 + \mathbb{C}d_2, & \mathbf{m} = 0. \end{cases}$$

设 $\pi_B : L_q \to B$ 为自然投射, 注意到映射 π_B 不是李代数同态. 为了后面论证的方便, 我们约定所有形为 $\sum_{1\le i\le l} \delta_iE(\mathbf{m}_i)$ 和 $\sum_{1\le i\le t} \delta_ix^{\mathbf{m}_i}$ 的求和表达式都已按字典序从小到大排列, 即在 Γ^* 上规定：$\mathbf{m} < \mathbf{n}$ 当且仅当 $m_1 < n_1$, 或 $m_1 = n_1$ 且 $m_2 < n_2$. 另外再引入一个子空间

$$D = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{E(\mathbf{m}) - x^{\mathbf{m}} \mid \mathbf{m} \in \Gamma^*\}.$$

显然 D 和 A 为李代数 L_q 的两个理想.

引理 2.1 若 $0 \ne I \subset A \oplus B$ 为 L_q 的理想, 则 $I = A$ 或 $I = D$ 或 $I = A \oplus B$.

证明 由于 A, B 都为单李代数 (见文 [6]), 则当理想 $I \subset A$ 且 $I \ne 0$ 时, 显然 $I = A$. 另外若 $I \not\subseteq A$, 分两种情形来讨论.

情形 1 若在理想 I 中存在一个元素 f, 使得对某个元素 $x^{\mathbf{m}} \in A$ 有 $0 \ne [f, x^{\mathbf{m}}] \in A$ 成立, 则由 A 为单理想得 $A \subset I$, 所以存在 $0 \ne \sum_i \delta_iE(\mathbf{m}_i) \in I$, 其中 $\delta_i \in \mathbb{C}^*$. 又因为 B 为单李代数得 $B \subset I$, 进而 $A \oplus B \subset I$, 所以 $I = A \oplus B$.

情形 2 若对所有的 $f \in I$ 及 $x^{\mathbf{m}} \in A$, 都有 $[f, x^{\mathbf{m}}] = 0$. 任取 $0 \ne f \in I$, 可设

$$f = \sum_{1\le i\le t} \delta_iE(\mathbf{m}_i) + \sum_{1\le j\le t'} \mu_jx^{\mathbf{n}_j},$$

其中 $t, t' \ge 1$ 且所有系数 δ_i 和 μ_j 都不为 0, 则由 $[f, x^{1,0}] = 0$ 及 $[f, x^{0,1}] = 0$ 可得 $t = t'$, $\mathbf{m}_i = \mathbf{n}_i$, $i = 1, \ldots, t$, 且 $(\delta_i + \mu_i)g(\mathbf{m}_i, \mathbf{e_1}) = 0$, $(\delta_i + \mu_i)g(\mathbf{m}_i, \mathbf{e_2}) = 0$. 但是由 $\mathbf{m}_i \in \Gamma^*$ 知 $g(\mathbf{m}_i, e_1) = 0$ 与 $g(\mathbf{m}_i, e_2) = 0$ 不能同时成立, 故 $(\delta_i + \mu_i) = 0$, $i = 1, \ldots, t$, 所以 $f \in D$. 因而 $I = D$. 证毕.

注 1　在文 [3] 所研究的李代数 $A\oplus B$ 中只含有一个非平凡理想 A, 但在本文所讨论的李代数 $A\oplus B$ 含有两个非平凡的理想 A 和 D. 正是由于这一差异, 本文的证明思路不同于文 [3] 中所使用的手法.

引理 2.2　若 $\varphi\in\mathrm{Aut}\,L_q$, 则 $\varphi(A)=A$ 且 $\varphi(D)=D$ 或 $\varphi(A)=D$ 且 $\varphi(D)=A$, $\varphi(B)\subset A\oplus B$, 且对于任意的 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, $\pi_B\varphi(E(\mathbf{m}))\cap B\neq\{0\}$.

证明　对于任意的 $\mathbf{m},\mathbf{n}\in\Gamma^*$ 且 $\mathbf{n}\neq k\mathbf{m}$, 由

$$[\varphi(x^{\mathbf{m}-\mathbf{n}}),\varphi(x^{\mathbf{n}})]=g(\mathbf{m}-\mathbf{n},\mathbf{n})\varphi(x^{\mathbf{m}})$$

及

$$[\varphi(E(\mathbf{m}-\mathbf{n})),\varphi(E(\mathbf{n}))]=g(\mathbf{m}-\mathbf{n},\mathbf{n})\varphi(E(\mathbf{m})),$$

且 $[L_q,L_q]=A\oplus B$, 得到 $\varphi(x^{\mathbf{m}})$ 及 $\varphi(E(\mathbf{m}))$ 不含 $L_q(0,0)$ 中的元素项. 因此 $\varphi(A\oplus B)\subset A\oplus B$. 因为 φ 为 L_q 的自同构, 且 A 和 $A\oplus B$ 是 L_q 的非平凡的理想, 所以 $\varphi(A)$ 和 $\varphi(A\oplus B)$ 为两个包含于 $A\oplus B$ 的 L_q 的非平凡的理想. 由引理 2.1, A, D 和 $A\oplus B$ 为仅有的包含于 $A\oplus B$ 的非平凡的理想, 所以 $\varphi(A)=A$ 或 D, $\varphi(A\oplus B)=A\oplus B$. 且当 $\varphi(A)=A$ 时, $\varphi(D)=D$; 当 $\varphi(A)=D$ 时 $\varphi(D)=A$. 接下来分两种情形证明本引理的最后一部分. 为此反设有 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 使得 $\pi_B\varphi(E(\mathbf{m}))\cap B=\{0\}$, 亦有 $\varphi(E(\mathbf{m}))=\sum_{1\leq i\leq t}a_ix^{\mathbf{m}_i}$, 我们将推出矛盾.

情形 1　当 $\varphi(A)=A$ 且 $\varphi(D)=D$ 时, 则有 $\varphi(E(\mathbf{m})-x^{\mathbf{m}})\in A\cap D=0$, 这与 ϕ 为同构映射矛盾.

情形 2　当 $\varphi(A)=D$ 时, 存在 $x^{\mathbf{n}}\in A$ 且 $\mathbf{n}\neq k\mathbf{m}$, 有

$$\varphi(x^{\mathbf{n}})=\sum_{1\leq j\leq l}b_j(E(\mathbf{n}_j)-x^{\mathbf{n}_j}).$$

但一方面 $\varphi([E(\mathbf{m}),x^{\mathbf{n}}])=g(\mathbf{m},\mathbf{n})\varphi(x^{\mathbf{m}+\mathbf{n}})\neq0$, 而另一方面

$$[\varphi(E(\mathbf{m})),\varphi(x^{\mathbf{n}})]=\left[\sum_{1\leq i\leq t}a_ix^{\mathbf{m}_i},\sum_{1\leq j\leq l}b_j(E(\mathbf{n}_j)-x^{\mathbf{n}_j})\right]=0.$$

因而矛盾. 证毕.

引理 2.3　若 $\varphi\in\mathrm{Aut}\,L_q$, 则 $\varphi(L_q(0,0))=L_q(0,0)$.

证明　设

$$\varphi(d_i)=\alpha_id_1+\beta_id_2+\sum_{1\leq i\leq t}\lambda_{\mathbf{r}_i}E(\mathbf{r}_i)+\sum_{1\leq j\leq t'}\lambda'_{\mathbf{s}_j}x^{\mathbf{s}_j},\tag{2.1}$$

其中 $\lambda_{\mathbf{r}_i}\neq0$, $\lambda'_{\mathbf{s}_j}\neq0$ 为常数, 则显然有 $\mathbf{r}_1<(0,0)$ 或 $\mathbf{r}_t>(0,0)$. 而当 $\mathbf{r}_1<(0,0)$ 时, 分两种情形来证明本引理:

情形 1　当 $\varphi(A)=A$ 时, 由引理 2.2 可以选取 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 使得

$$\varphi(E(\mathbf{m}))=\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}E(\mathbf{m}_{i'})+\sum_{1\leq j'\leq l'}\delta'_{\mathbf{n}_{j'}}x^{\mathbf{n}_{j'}},$$

其中 $\delta_{\mathbf{m}_{i'}}\neq0$, $i'=1,\dots,l$, 且存在 $s\in\mathbb{Z}$, $1\leq s\leq l$, 有 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_{i'})=0$, $1\leq i'<s$, $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)\neq0$. 由 $[d_i,E(\mathbf{m})]=m_iE(\mathbf{m})$, 有

$$\begin{aligned}&\left[\alpha_id_1+\beta_id_2+\sum_{1\leq i\leq t}\lambda_{\mathbf{r}_i}E(\mathbf{r}_i)+\sum_{1\leq j\leq t'}\lambda'_{\mathbf{s}_j}x^{\mathbf{s}_j},\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}E(\mathbf{m}_{i'})+\sum_{1\leq j'\leq l'}\delta'_{\mathbf{n}_{j'}}x^{\mathbf{n}_{j'}}\right]\\&=m_i\left(\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}E(\mathbf{m}_{i'})+\sum_{1\leq j'\leq l'}\delta'_{\mathbf{n}_{j'}}x^{\mathbf{n}_{j'}}\right).\end{aligned}\tag{2.2}$$

当 $s=1$ 时, 即 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_1)\neq 0$, 则 $\lambda_{\mathbf{r}_1}\delta_{\mathbf{m}_1}g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_1)E(\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_1)\neq 0$, 且 $\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_1<\mathbf{m}_1$. 这就隐含着 (2.2) 的左边含有单项式 $\lambda_{\mathbf{r}_1}\delta_{\mathbf{m}_1}g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_1)E(\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_1)$, 而 (2.2) 的右边不含此单项式, 矛盾.

当 $s>1$ 时, 即 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)\neq 0$, 有 $\lambda_{\mathbf{r}_1}\delta_{\mathbf{m}_s}g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)E(\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_s)\neq 0$ 且 $\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_s<\mathbf{m}_s$. 由 (2.2) 式得知存在 $i'\in\mathbb{Z}$, $1\leq i'<s$, 使得 $\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_s=\mathbf{m}_{i'}$, 由 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_{i'})=0$ 得 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)=0$, 矛盾.

情形 2 当 $\varphi(A)=D$ 时, 可以选取 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 使得

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}(E(\mathbf{m}_{i'})-x^{\mathbf{m}_{i'}}),$$

其中 $\delta_{\mathbf{m}_{i'}}\neq 0$, $i'=1,\dots,l$, 且存在 $s\in\mathbb{Z}$, $1\leq s\leq l$, 使 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_{i'})=0$, $1\leq i'<s$, $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)\neq 0$. 由 $[d_i,x^{\mathbf{m}}]=m_ix^{\mathbf{m}}$, 有

$$\begin{aligned}&\Big[\alpha_id_1+\beta_id_2+\sum_{1\leq i\leq t}\lambda_{\mathbf{r}_i}E(\mathbf{r}_i)+\sum_{1\leq j\leq t'}\lambda'_{\mathbf{s}_j}x^{\mathbf{s}_j},\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}(E(\mathbf{m}_{i'})-x^{\mathbf{m}_{i'}})\Big]\\&\quad=m_i\Big(\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}(E(\mathbf{m}_{i'})-x^{\mathbf{m}_{i'}})\Big).\end{aligned}\tag{2.3}$$

当 $s=1$ 时, 即 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_1)\neq 0$, 则 $\lambda_{\mathbf{r}_1}\delta_{\mathbf{m}_1}g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_1)E(\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_1)\neq 0$ 且 $\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_1<\mathbf{m}_1$. 这就隐含着 (2.3) 的左边含有单项式 $\lambda_{\mathbf{r}_1}\delta_{\mathbf{m}_1}g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_1)E(\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_1)$, 而 (2.3) 的右边不含此单项式, 产生矛盾.

当 $s>1$ 时, 即 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)\neq 0$, 有 $\lambda_{\mathbf{r}_1}\delta_{\mathbf{m}_s}g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)E(\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_s)\neq 0$ 且 $\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_s<\mathbf{m}_s$. 由 (2.3) 式得存在 $i'\in\mathbb{Z}$, $1\leq i'<s$, 且 $\mathbf{r}_1+\mathbf{m}_s=\mathbf{m}_{i'}$, 由 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_{i'})=0$ 得 $g(\mathbf{r}_1,\mathbf{m}_s)=0$, 矛盾.

综合以上证明知道: 当 $\mathbf{r}_1<(0,0)$ 时, (2.1) 式中的系数 $\lambda_{\mathbf{r}_i}=0$, $i=1,\dots,t$.

同理对 $\mathbf{r}_t>(0,0)$ 的情形可完全类似的证明 (2.1) 式中的系数 $\lambda_{\mathbf{r}_i}=0$, $i=1,\dots,t$. 综上所述得到

$$\varphi(d_i)=\alpha_id_1+\beta_id_2+\sum_{1\leq j\leq t'}\lambda'_{\mathbf{s}_j}x^{\mathbf{s}_j},\tag{2.4}$$

其中 $\lambda'_{\mathbf{s}_j}\neq 0$, $j=1,\dots,t'$. 下面证明系数 $\lambda'_{\mathbf{s}_j}$ 也全为 0. 为此只要讨论 $\mathbf{s}_1<(0,0)$ 与 $\mathbf{s}_{t'}>(0,0)$ 两种情形.

当 $\mathbf{s}_1<(0,0)$ 时, 再分两种情形讨论:

情形 1 当 $\varphi(A)=A$ 时, 可以选取 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 使得

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}x^{\mathbf{m}_{i'}},$$

其中 $\delta_{\mathbf{m}_{i'}}\neq 0$, $i'=1,\dots,l$, 且存在 $s\in\mathbb{Z}$, $1\leq s\leq l$, 使 $g(\mathbf{s}_1,\mathbf{m}_{i'})=0$, $1\leq i'<s$, $g(\mathbf{s}_1,\mathbf{m}_s)\neq 0$. 类似前面的情形 1, 也可得出矛盾.

情形 2 当 $\varphi(A)=D$ 时, 即 $\varphi(D)=A$, 可以选取 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 使得

$$\varphi(E(\mathbf{m})-x^{\mathbf{m}})=\sum_{1\leq i'\leq l}\delta_{\mathbf{m}_{i'}}x^{\mathbf{m}_{i'}},$$

其中 $\delta_{\mathbf{m}_{i'}}\neq 0$, $i'=1,\dots,l$, 且存在 $s\in\mathbb{Z}$, $1\leq s\leq l$, 使 $g(\mathbf{s}_1,\mathbf{m}_{i'})=0$, $1\leq i'<s$, $g(\mathbf{s}_1,\mathbf{m}_s)\neq 0$. 类似前面的情形 2, 也可得出矛盾.

因此当 $\mathbf{s}_1<(0,0)$ 时, 得到 (2.4) 式的所有系数 $\lambda'_{\mathbf{s}_j}$ 等于 0, $j=1,\dots,t'$. 同理可证当 $\mathbf{s}_{t'}>(0,0)$ 时, (2.4) 的所有系数 $\lambda'_{\mathbf{s}_j}$ 等于 0. 因此 $\varphi(L_q(0,0))=L_q(0,0)$. 证毕.

引理 2.4 若 $\varphi \in \operatorname{Aut} L_q$, 则对任意 $\mathbf{m} \in \Gamma^*$, 有 $\mathbf{m}' \in \Gamma^*$, 使得 $\varphi(E(\mathbf{m})) \in \mathbb{C}E(\mathbf{m}') + \mathbb{C}x^{\mathbf{m}'}$ 且 $\varphi(x^{\mathbf{m}}) \in \mathbb{C}x^{\mathbf{m}'}$, 或 $\varphi(E(\mathbf{m})) \in \mathbb{C}E(\mathbf{m}') + \mathbb{C}x^{\mathbf{m}'}$ 且 $\varphi(x^{\mathbf{m}}) \in \mathbb{C}(E(\mathbf{m}') - x^{\mathbf{m}'})$.

证明 若 $\varphi(B) \subset B$, 则 $\varphi|_{B\oplus L_q(0,0)}$ 为李子代数 $B \oplus L_q(0,0)$ 的自同构. 因此, 对任意的 $\mathbf{m} \in \Gamma^*$, 若 $\varphi(E(\mathbf{m})) \in B$, 则按照文 [6, 引理 8] 的证明知存在 $\mathbf{m}' \in \Gamma^*$, 使得 $\varphi(E(\mathbf{m}) \in \mathbb{C}E(\mathbf{m}')$. 若 $\varphi(E(\mathbf{m})) \notin B$, 则可设

$$\varphi(E(\mathbf{m})) = \sum_{1\le i\le t} \delta_{\mathbf{m}_i} E(\mathbf{m}_i) + \sum_{1\le j\le t'} \mu_{\mathbf{n}_j} x^{\mathbf{n}_j},$$

其中系数 $\delta_{\mathbf{m}_i} \neq 0$, $\mu_{\mathbf{n}_j} \neq 0$. 选取 $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ 使得

$$[\alpha d_1 + \beta d_2, E(\mathbf{m})] = (\alpha m_1 + \beta m_2)E(\mathbf{m}) = 0,$$

且 $\varphi(\alpha d_1 + \beta d_2) = \alpha_1 d_1 + \beta_1 d_2$, 其中 α_1, $\beta_1 \in \mathbf{C}$. 因为 α_1 与 β_1 不能全为 0, 所以不妨设 $\beta_1 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}&\left[\alpha_1 d_1 + \beta_1 d_2, \sum_{1\le i\le t} \delta_{\mathbf{m}_i} E(\mathbf{m}_i) + \sum_{1\le j\le t'} \mu_{\mathbf{n}_j} x^{\mathbf{n}_j}\right]\\ &\quad= \sum_{1\le i\le t} \delta_{\mathbf{m}_i}(\alpha_1 m_{i1} + \beta_1 m_{i2})E(\mathbf{m}_i) + \sum_{1\le j\le t'} \mu_{\mathbf{n}_j}(\alpha_1 n_{j1} + \beta_1 n_{j2})x^{\mathbf{n}_j}\\ &\quad= \varphi([\alpha d_1 + \beta d_2, E(\mathbf{m})]) = 0.\end{aligned}$$

因此 $\alpha_1 m_{i1} + \beta_1 m_{i2} = 0$, $\alpha_1 n_{j1} + \beta_1 n_{j2} = 0$, 其中 $i = 1,\dots,t$; $j = 1,\dots,t'$. 由此得到

$$\varphi(E(\mathbf{m})) = \sum_{1\le i\le t} \delta_{\mathbf{m}_i} E(\mathbf{m}_i) + \sum_{1\le j\le t'} \mu_{\mathbf{n}_j} x^{\mathbf{n}_j},$$

其中 $\mathbf{m}_i = (m_{i1}, km_{i1})$, $\mathbf{n}_j = (n_{j1}, kn_{j1})$, $k = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

再选取 $\alpha_0 d_1 + \beta_0 d_2 \in L_q(0,0)$, 使得 $[\alpha_0 d_1 + \beta_0 d_2, E(\mathbf{m})] \neq 0$, 且 $\varphi(\alpha_0 d_1 + \beta_0 d_2) = \alpha_2 d_1 + \beta_2 d_2$, 则

$$\begin{aligned}&\left[\alpha_2 d_1 + \beta_2 d_2, \sum_{1\le i\le t} \delta_{\mathbf{m}_i} E(\mathbf{m}_i) + \sum_{1\le j\le t'} \mu_{\mathbf{n}_j} x^{\mathbf{n}_j}\right]\\ &\quad= \sum_{1\le i\le t} \delta_{\mathbf{m}_i}(\alpha_2 m_{i1} + \beta_2 k m_{i1})E(\mathbf{m}_i) + \sum_{1\le j\le t'} \mu_{\mathbf{n}_j}(\alpha_2 n_{j1} + \beta_2 k n_{j1})x^{\mathbf{n}_j},\end{aligned}$$

而

$$\varphi([\alpha_0 d_1 + \beta_0 d_2, E(\mathbf{m})]) = (\alpha_0 m_1 + \beta_0 m_2) \sum_{1\le i\le t} \delta_{\mathbf{m}_i} E(\mathbf{m}_i) + (\alpha_0 m_1 + \beta_0 m_2) \sum_{1\le j\le t'} \mu_{\mathbf{n}_j} x^{\mathbf{n}_j}.$$

比较上面两个等式, 有

$$\begin{aligned}\alpha_2 m_{i1} + \beta_2 k m_{i1} &= \alpha_0 m_1 + \beta_0 m_2 \neq 0, \quad i = 1,\dots,t;\\ \alpha_2 n_{j1} + \beta_2 k n_{j1} &= \alpha_0 m_1 + \beta_0 m_2 \neq 0, \quad j = 1,\dots,t'.\end{aligned}$$

因此 $m_{11}{=}m_{21} = \cdots = m_{t1}{=}n_{11}{=}n_{21} = \cdots = n_{t'1}$. 这就证明了 $\varphi(E(\mathbf{m})) \in \mathbb{C}E(\mathbf{m}') + \mathbb{C}x^{\mathbf{m}'}$.

下面证明引理的第二部分, 亦对任意 $\mathbf{m} \in \Gamma^*$, 有 $\varphi(x^{\mathbf{m}}) \in \mathbb{C}x^{\mathbf{m}'}$, 或对任意 $\mathbf{m} \in \Gamma^*$, 有 $\varphi(x^{\mathbf{m}}) \in \mathbb{C}(E(\mathbf{m}') - x^{\mathbf{m}'})$. 由引理 2.2, 分两种情形, 先假设

$$\varphi(x^{\mathbf{m}}) = \sum_{1\le j\le l} \mu_{\mathbf{m}_j}(E(\mathbf{m}_j) - x^{\mathbf{m}_j}),$$

其中 $\mu_{\vec{m}_j} \neq 0, j=1,\dots,l$. 显然存在 $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\backslash\{\mathbf{0}\}$, 使得 $[\alpha d_1+\beta d_2, x^{\mathbf{m}}]=(\alpha m_1+\beta m_2)x^{\mathbf{m}}=0$, 且 $\varphi(\alpha d_1+\beta d_2)=\alpha_1 d_1+\beta_1 d_2$, α_1, $\beta_1\in\mathbb{C}$. 因为 α_1 与 β_1 不能全为 0, 所以不妨设 β_1 不为 0, 则

$$\left[\alpha_1 d_1+\beta_1 d_2, \sum_{1\le j\le l}\mu_{\mathbf{m}_j}(E(\mathbf{m}_j)-x^{\mathbf{m}_j})\right]=\sum_{1\le j\le l}\mu_{\mathbf{m}_j}(\alpha_1 m_{j1}+\beta_1 m_{j2})(E(\mathbf{m}_j)-x^{\mathbf{m}_j})$$
$$=\varphi([\alpha d_1+\beta d_2, x^{\mathbf{m}}])=0.$$

因此 $\alpha_1 m_{j1}+\beta_1 m_{j2}=0$, $j=1,\dots,l$. 因此得到

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=\sum_{1\le j\le l}\mu_{\mathbf{m}_j}(E(\mathbf{m}_j)-x^{\mathbf{m}_j}),$$

其中 $\mathbf{m}_j=(m_{j1},km_{j1})$, $k=-\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

进一步取 $\alpha_0 d_1+\beta_0 d_2\in L_q(0,0)$, 使得 $[\alpha_0 d_1+\beta_0 d_2, x^{\mathbf{m}}]\neq 0$, 并且 $\varphi(\alpha_0 d_1+\beta_0 d_2)=\alpha_2 d_1+\beta_2 d_2$, 则

$$0\neq\left[\alpha_2 d_1+\beta_2 d_2, \sum_{1\le j\le l}\mu_{\mathbf{m}_j}(E(\mathbf{m}_j)-x^{\mathbf{m}_j})\right]=\sum_{1\le j\le l}\mu_{\mathbf{m}_j}(\alpha_2 m_{j1}+\beta_2 k m_{j1})(E(\mathbf{m}_j)-x^{\mathbf{m}_j}),$$

而

$$\varphi([\alpha_0 d_1+\beta_0 d_2, x^{\mathbf{m}}])=(\alpha_0 m_1+\beta_0 m_2)\sum_{1\le j\le l}\mu_{\mathbf{m}_j}(E(\mathbf{m}_j)-x^{\mathbf{m}_j}).$$

因此, $\alpha_2 m_{j1}+\beta_2 k m_{j1}=\alpha_0 m_1+\beta_0 m_2\neq 0$, $j=1,\dots,l$, 所以 $m_{11}=\cdots=m_{l1}$. 这就证明了 $\varphi(x^{\mathbf{m}})\in\mathbb{C}(E(\mathbf{m}'')-x^{\mathbf{m}''})$. 最后因为 $\varphi(E(\mathbf{m})-x^{\mathbf{m}})=\varphi(E(\mathbf{m}))-\varphi(x^{\mathbf{m}})\in A$, 得 $\mathbf{m}''=\mathbf{m}'$.

同理可证明第二种情形时, 亦对任意的 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 设 $\varphi(x^{\mathbf{m}})=\sum_{1\le j\le l}\mu_{\mathbf{m}_j}x^{\mathbf{m}_j}$ 时, 可得 $\varphi(x^{\mathbf{m}})\in\mathbb{C}x^{\mathbf{m}'}$. 证毕.

引理 2.5 设 $\varphi\in\operatorname{Aut}L_q$ 且 $\varphi(d_1)=\alpha_1 d_1+\beta_1 d_2$, $\varphi(d_2)=\alpha_2 d_1+\beta_2 d_2$. 记 $\varepsilon=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, 则对 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 有

(1) 当 $\varphi(A)=D$ 时

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=p_1(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'}),\quad \varphi(E(\mathbf{m}))=p_1(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'})+p_2(\mathbf{m})x^{\mathbf{m}'},$$

(2) 当 $\varphi(A)=A$ 时

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=f_1(\mathbf{m})x^{\mathbf{m}'},\quad \varphi(E(\mathbf{m}))=f_2(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'})+f_1(\mathbf{m})x^{\mathbf{m}'}.$$

在 (1) 和 (2) 中 $p_1(\mathbf{m})$, $p_2(\mathbf{m})$, $f_1(\mathbf{m})$, $f_2(\mathbf{m})\in\mathbf{C}^*$, $\mathbf{m}'=(\frac{-\beta_1 m_2+\beta_2 m_1}{\varepsilon}, \frac{\alpha_1 m_2-\alpha_2 m_1}{\varepsilon})$.

(3) α_1, α_2, β_1, $\beta_2\in\mathbf{Z}$, 且$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=\pm1$.

证明 先证明 (1), 由引理 2.4, 知存在 $\mathbf{m}'\in\Gamma^*$, 使

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=p_1(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'}),\quad \varphi(E(\mathbf{m}))=p_2(\mathbf{m})x^{\mathbf{m}'}+p_3(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'}).$$

又由 $\varphi([d_i,x^{\mathbf{m}}])=[\varphi(d_i),\varphi(x^{\mathbf{m}})]$, $i=1,2$, 得

$$m_i p_1(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'})=p_1(\mathbf{m})(\alpha_i m_1'+\beta_i m_2')(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'}),$$

因此 $m_i=\alpha_i m_1'+\beta_i m_2'$, $i=1,2$, 即

$$m_1'=\frac{-\beta_1 m_2+\beta_2 m_1}{\varepsilon},\quad m_2'=\frac{\alpha_1 m_2-\alpha_2 m_1}{\varepsilon}.$$

进一步, 因为 $\varphi(E(\mathbf{m})-x^{\mathbf{m}})=\varphi(E(\mathbf{m}))-\varphi(x^{\mathbf{m}})\in A$, 得 $p_3(\mathbf{m})=p_1(\mathbf{m})$, 所以

$$\varphi(E(\mathbf{m}))=p_1(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'})+p_2(\mathbf{m})x^{\mathbf{m}'}.$$

(1) 得证.

同理可证 (2) 成立.

最后证明 (3). 首先考虑 $\varphi(A)=D$ 的情形, 此时由 (1) 得

$$\varphi(x^{(1,0)})=p_1(1,0)\Big(E\Big(\frac{\beta_2}{\varepsilon},-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\Big)-x^{(\frac{\beta_2}{\varepsilon},-\frac{\alpha_2}{\varepsilon})}\Big),$$
$$\varphi(x^{(0,1)})=p_1(0,1)\Big(E\Big(-\frac{\beta_1}{\varepsilon},\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\Big)-x^{(-\frac{\beta_1}{\varepsilon},\frac{\alpha_1}{\varepsilon})}\Big),$$

由此知 $\frac{\alpha_i}{\varepsilon}$, $\frac{\beta_i}{\varepsilon}\in\mathbb{Z}$, $i=1,2$, 因而 $\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\frac{\beta_2}{\varepsilon}-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\frac{\beta_1}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\in\mathbb{Z}$, 亦 $\varepsilon=\pm1$, 进而 α_i, $\beta_i\in\mathbb{Z}$, $i=1,2$. 对 $\varphi(A)=A$ 的情形, 可同样得出结论. 证毕.

由引理 2.5 可知为了确定每一个自同构 φ 的结构, 我们只要确定函数 $p_i(\mathbf{m})$, $f_i(\mathbf{m})$ 的具体表达式, 其中 $i=1,2$. 在以下三个引理中, 对 $\mathbf{m}=(m_1,m_2)$, $\mathbf{n}=(n_1,n_2)\in\Gamma^*$, 记

$$\mathbf{m}'=\Big(\frac{-\beta_1m_2+\beta_2m_1}{\varepsilon},\frac{\alpha_1m_2-\alpha_2m_1}{\varepsilon}\Big),\ \ \mathbf{n}'=\Big(\frac{-\beta_1n_2+\beta_2n_1}{\varepsilon},\frac{\alpha_1n_2-\alpha_2n_1}{\varepsilon}\Big).$$

引理 2.6　$g(\mathbf{m},\mathbf{n})=0$ 当且仅当 $g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')=0$, 而当 $g(\mathbf{m},\mathbf{n})\neq0$ 时, 有

(1) 当 $\varepsilon=1$ 时

$$\frac{g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')}{g(\mathbf{m},\mathbf{n})}=\frac{q^{(\alpha_1m_2-\alpha_2m_1)(-\beta_1n_2+\beta_2n_1)}}{q^{m_2n_1}},\tag{2.5}$$

(2) 当 $\varepsilon=-1$ 时

$$\frac{g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')}{g(\mathbf{m},\mathbf{n})}=-\frac{q^{(\alpha_1m_2-\alpha_2m_1)(-\beta_1n_2+\beta_2n_1)}}{q^{m_1n_2}}.\tag{2.6}$$

证明　因为

$$\begin{aligned}m_2'n_1'-m_1'n_2'&=(\alpha_1m_2-\alpha_2m_1)(-\beta_1n_2+\beta_2n_1)-(-\beta_1m_2+\beta_2m_1)(\alpha_1n_2-\alpha_2n_1)\\&=(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(m_2n_1-m_1n_2)=\varepsilon(m_2n_1-m_1n_2),\end{aligned}$$

由此知 $g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')=0$ 当且仅当 $g(\mathbf{m},\mathbf{n})=0$.

进一步, 当 $g(\mathbf{m},\mathbf{n})\neq0$ 且 $\varepsilon=1$ 时

$$\begin{aligned}\frac{g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')}{g(\mathbf{m},\mathbf{n})}&=\frac{q^{m_2'n_1'}-q^{m_1'n_2'}}{q^{m_2n_1}-q^{m_1n_2}}=\frac{q^{m_2'n_1'}(1-q^{m_1'n_2'-m_2'n_1'})}{q^{m_2n_1}(1-q^{m_1n_2-m_2n_1})}\\&=\frac{q^{(\alpha_1m_2-\alpha_2m_1)(-\beta_1n_2+\beta_2n_1)}(1-q^{m_1n_2-m_2n_1})}{q^{m_2n_1}(1-q^{m_1n_2-m_2n_1})}=\frac{q^{(\alpha_1m_2-\alpha_2m_1)(-\beta_1n_2+\beta_2n_1)}}{q^{m_2n_1}}.\end{aligned}$$

同理可证当 $\varepsilon=-1$ 时, (2.6) 式成立. 证毕.

引理 2.7

$$p_i(\mathbf{m})=\varepsilon^{m_1+m_2-1}q^{\frac{1}{2}(-\alpha_1\beta_1(m_2^2-m_2)-\alpha_2\beta_2(m_1^2-m_1)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-1)m_1m_2)}p_i^{m_1}(\mathbf{e}_1)p_i^{m_2}(\mathbf{e}_2),\tag{2.7}$$
$$f_i(\mathbf{m})=\varepsilon^{m_1+m_2-1}q^{\frac{1}{2}(-\alpha_1\beta_1(m_2^2-m_2)-\alpha_2\beta_2(m_1^2-m_1)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-1)m_1m_2)}f_i^{m_1}(\mathbf{e}_1)f_i^{m_2}(\mathbf{e}_2),\tag{2.8}$$

其中 $i=1,2$.

证明　关于 (2.7) 与 (2.8) 式的证明步骤完全类似. 下面仅对 $p_1(\mathbf{m})$ 的表达式给出详细证明. 此时, 对任意 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 自同构 φ 满足

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=p_1(\mathbf{m})(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'}),\tag{2.9}$$

其中 $\mathbf{m}$ 与 $\mathbf{m}'$ 的关系在引理 2.5 中给出. 当 $g(\mathbf{m},\mathbf{n})\neq 0$ 时, 由 $\varphi([x^{\mathbf{m}},x^{\mathbf{n}}])=[\varphi(x^{\mathbf{m}}),\varphi(x^{\mathbf{n}})]$, 得

$$g(\mathbf{m},\mathbf{n})p_1(\mathbf{m}+\mathbf{n})=g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')p_1(\mathbf{m})p_1(\mathbf{n}). \tag{2.10}$$

将上式中的 $\mathbf{n}$ 换成 $\mathbf{n}+\mathbf{r}$, 得

$$g(\mathbf{m},\mathbf{n}+\mathbf{r})p_1(\mathbf{m}+\mathbf{n}+\mathbf{r})=g(\mathbf{m}',(\mathbf{n}+\mathbf{r})')p_1(\mathbf{m})p_1(\mathbf{n}+\mathbf{r}). \tag{2.11}$$

又由 $\varphi([[x^{\mathbf{m}},x^{\mathbf{n}}],x^{\mathbf{r}}])=[[\varphi(x^{\mathbf{m}}),\varphi(x^{\mathbf{n}})],\varphi(x^{\mathbf{r}})]$, 得

$$g(\mathbf{m},\mathbf{n})g(\mathbf{m}+\mathbf{n},\mathbf{r})p_1(\mathbf{m}+\mathbf{n}+\mathbf{r})=g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')g((\mathbf{m}+\mathbf{n})',\mathbf{r}')p_1(\mathbf{m})p_1(\mathbf{n})p_1(\mathbf{r}). \tag{2.12}$$

当 $g(\mathbf{m},\mathbf{n})g(\mathbf{m},\mathbf{n}+\mathbf{r})g(\mathbf{m}+\mathbf{n},\mathbf{r})\neq 0$ 时, 联立 (2.11), (2.12) 式, 得

$$p_1(\mathbf{n}+\mathbf{r})=\frac{g(\mathbf{m}',\mathbf{n}')g((\mathbf{m}+\mathbf{n})',\mathbf{r}')g(\mathbf{m},\mathbf{n}+\mathbf{r})}{g(\mathbf{m},\mathbf{n})g(\mathbf{m}+\mathbf{n},\mathbf{r})g(\mathbf{m}',(\mathbf{n}+\mathbf{r})')}p_1(\mathbf{n})p_1(\mathbf{r}). \tag{2.13}$$

在上式中取 $\mathbf{r}=(0,k_1)$, $\mathbf{n}=(0,k_2)$, $\mathbf{m}=(1,0)\in\Gamma^*$, 由引理 2.6 及 (2.13) 式得到如下一个递推式

$$p_1(0,k_1+k_2)=\varepsilon q^{-\alpha_1\beta_1k_1k_2}p_1(0,k_1)p_1(0,k_2).$$

进一步, 对任意的 $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, 由此递推式容易得到

$$p_1(0,k)=\varepsilon^{k-1}q^{\frac{-\alpha_1\beta_1k(k-1)}{2}}p_1^k(0,1). \tag{2.14}$$

另外, 在 (2.13) 式中取 $\mathbf{r}=(k_2,0)$, $\mathbf{n}=(k_1,0)$, $\mathbf{m}=(0,1)\in\Gamma^*$. 同理可得到

$$p_1(k,0)=\varepsilon^{k-1}q^{\frac{-\alpha_2\beta_2k(k-1)}{2}}p_1^k(1,0). \tag{2.15}$$

最后, 由等式 (2.10), 得 $p_1(\mathbf{n}+\mathbf{r})=\frac{g(\mathbf{r}',\mathbf{n}')}{g(\mathbf{r},\mathbf{n})}p_1(\mathbf{r})p_1(\mathbf{n})$. 当 $\varepsilon=-1$ 时在本式中取 $\mathbf{r}=(0,m_2)$, $\mathbf{n}=(m_1,0)\in\Gamma^*$, 而当 $\varepsilon=1$ 时在上式中取 $\mathbf{r}=(m_1,0)$, $\mathbf{n}=(0,m_2)$. 并由引理 2.6 及等式 (2.14), (2.15) 式, 得

$$p_1(\mathbf{m})=\varepsilon^{m_1+m_2-1}q^{\frac{1}{2}(-\alpha_1\beta_1(m_2^2-m_2)-\alpha_2\beta_2(m_1^2-m_1)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-1)m_1m_2)}p_1^{m_1}(1,0)p_1^{m_2}(0,1).$$

引理证毕.

引理 2.8 设 $\varphi\in\operatorname{Aut}L_q$, 且 $\varphi(d_1)=\alpha_1d_1+\beta_1d_2$, $\varphi(d_2)=\alpha_2d_1+\beta_2d_2$, 则对任意 $\mathbf{m}\in\Gamma^*$, 如下结论成立:

(1) 当 $\varphi(A)=D$ 时, 有

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=\varepsilon q^{\tau}u^{m_1}v^{m_2}(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'}),\quad \varphi(E(\mathbf{m}))=\varepsilon q^{\tau}u^{m_1}v^{m_2}E(\mathbf{m}')+\varepsilon q^{\tau}(a^{m_1}b^{m_2}-u^{m_1}v^{m_2})x^{\mathbf{m}'}.$$

(2) 当 $\varphi(A)=A$ 时, 有

$$\varphi(x^{\mathbf{m}})=\varepsilon q^{\tau}a'^{m_1}b'^{m_2}x^{\mathbf{m}'},\quad \varphi(E(\mathbf{m}))=\varepsilon q^{\tau}u'^{m_1}v'^{m_2}E(\mathbf{m}')+\varepsilon q^{\tau}(a'^{m_1}b'^{m_2}-u'^{m_1}v'^{m_2})x^{\mathbf{m}'}.$$

在上面的等式中

$$\tau=\frac{1}{2}(-\alpha_1\beta_1m_2^2-\alpha_2\beta_2m_1^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-1)m_1m_2),$$
$$\mathbf{m}'=\Big(\frac{-\beta_1m_2+\beta_2m_1}{\varepsilon},\frac{\alpha_1m_2-\alpha_2m_1}{\varepsilon}\Big).$$

证明 在等式 (2.7), (2.8) 中分别令

$$u=\varepsilon q^{\frac{\alpha_2\beta_2}{2}}p_1(\mathbf{e}_1),\quad v=\varepsilon q^{\frac{\alpha_1\beta_1}{2}}p_1(\mathbf{e}_2),\quad a=\varepsilon q^{\frac{\alpha_2\beta_2}{2}}p_2(\mathbf{e}_1),\quad b=\varepsilon q^{\frac{\alpha_1\beta_1}{2}}p_2(\mathbf{e}_2),$$
$$a'=\varepsilon q^{\frac{\alpha_2\beta_2}{2}}f_1(\mathbf{e}_1),\quad b'=\varepsilon q^{\frac{\alpha_1\beta_1}{2}}f_1(\mathbf{e}_2),\quad u'=\varepsilon q^{\frac{\alpha_2\beta_2}{2}}f_2(\mathbf{e}_1),\quad v'=\varepsilon q^{\frac{\alpha_1\beta_1}{2}}f_2(\mathbf{e}_2).$$

再将 $p_i(\mathbf{m})$, $f_i(\mathbf{m})$, $i=1,2$, 的表达式分别代入引理 2.5 的等式中, 本引理便得证. 证毕.

在刻画自同构群 $\mathrm{Aut}\,L_q$ 的结构之前, 先简单回顾一下群的半直积定义. 设 N,F 为两个抽象乘法群, θ 为从群 F 到群 $\mathrm{Aut}\,(N)$ 的群同态, 则 N 和 F 关于 θ 的半直积为 $F\ltimes_\theta N=\{(x,a)\,|\,x\in F,\,a\in N\}$, 群 $F\ltimes_\theta N$ 的乘法运算为

$$(x,a)(y,b)=(xy,[\theta(y^{-1})(a)]b). \tag{2.16}$$

群 $F\ltimes_\theta N$ 的单位元为 (e,e), 而 (x,a) 的逆元为 $(x^{-1},\theta(x)(a^{-1}))$. 上面的半直积也有如下的等价定义: $N\rtimes_\theta F=\{(a,x)\,|\,a\in N,\,x\in F\}$, 此时群 $N\rtimes_\theta F$ 的乘法运算为

$$(a,x)(b,y)=(a[\theta(x)(b)],xy). \tag{2.17}$$

群 $N\rtimes_\theta F$ 的单位元为 (e,e), 而 (a,x) 的逆元为 $(\theta(x^{-1})(a^{-1}),x^{-1})$. 以上的 N 与 F 的两个半直积定义是等价的. 事实上, 定义

$$\sigma:(x,a)\mapsto(\theta(x)(a),x)$$

给出了从群 $F\ltimes_\theta N$ 到群 $N\rtimes_\theta F$ 的同构映射.

设 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\pm1\}$, $\mathbb{C}^{*4}=\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$, 及 $GL_2(\mathbb{Z})$ 为 $\mathbb{Z}$ 上的行列式等于 ±1 的 2 阶矩阵全体. 下面由这三个群利用半直积构造一个与自同构群 $\mathrm{Aut}\,L_q$ 同构的群 Ω.

首先定义从 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}^{*4})$ 的映射 θ_1:

$$\theta_1(1)((u,v,a,b))=(u,v,a,b),\ \ \theta_1(-1)((u,v,a,b))=(a,b,u,v).$$

对任意 $u,v,a,b\in\mathbb{C}^*$, 则可验证 θ_1 为一个群同态映射, 因而可定义群的半直积 $\mathbb{C}^{*4}\rtimes_{\theta_1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. 进一步定义从 $GL_2(\mathbb{Z})$ 到$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}^{*4}\rtimes_{\theta_1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的映射 θ_2:

$$\theta_2(M)((u,v,a,b,z))=(u^{a_{11}}v^{a_{12}},u^{a_{21}}v^{a_{22}},a^{a_{11}}b^{a_{12}},a^{a_{21}}b^{a_{22}},z),$$

其中 $M=(a_{ij})_{2\times2}\in GL_2(\mathbb{Z})$, $u,v,a,b\in\mathbb{C}^*$, $z\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, 则不难验证 θ_2 为从群 $GL_2(\mathbb{Z})$ 到群$\mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}^{*4}\rtimes_{\theta_1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 的群同态映射. 因而可定义群的半直积 $GL_2(\mathbb{Z})\ltimes_{\theta_2}(\mathbb{C}^{*4}\rtimes_{\theta_1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. 最后由群同态 θ_1 与群同态 θ_2 的定义, 及半直积乘法的定义 (2.16), (2.17), 可给出群 $\Omega:=GL_2(\mathbb{Z})\ltimes_{\theta_2}(\mathbb{C}^{*4}\rtimes_{\theta_1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 中乘法运算的具体形式

$$\begin{aligned}&(N,u_1,v_1,a_1,b_1,z_1)\cdot(M,u,v,a,b,z)\\&\quad=\big(NM,\rho_{z_1}(u,a)u_1^{\frac{a_{22}}{|M|}}v_1^{-\frac{a_{12}}{|M|}},\rho_{z_1}(v,b)u_1^{-\frac{a_{21}}{|M|}}v_1^{\frac{a_{11}}{|M|}},\rho_{z_1}(a,u)a_1^{\frac{a_{22}}{|M|}}b_1^{-\frac{a_{12}}{|M|}},\rho_{z_1}(b,v)a_1^{-\frac{a_{21}}{|M|}}b_1^{\frac{a_{11}}{|M|}},z_1z\big),\end{aligned}$$

其中 $M=(a_{ij})_{2\times2}$, $\rho_{z_1}(s,t)=\frac{(1+z_1)}{2}s+\frac{(1-z_1)}{2}t$, $M,N\in GL_2(\mathbb{Z})$, $u_1,u,v_1,v,a_1,a,\,b_1,b\in\mathbb{C}^*$, $z_1,z\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

定理 2.9 $\mathrm{Aut}\ L_q\cong GL_2(\mathbb{Z})\ltimes_{\theta_2}(\mathbb{C}^{*4}\rtimes_{\theta_1}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

证明 由引理 2.8, 定义一个映射 $\psi:\Omega\longrightarrow\mathrm{Aut}\,L_q$, 使对任意的 $(M,u,v,a,b,c)\in\Omega$, $M=(a_{ij})_{2\times2}$, 有

$$\begin{aligned}&\psi(M,u,v,a,b,c)(d_1)=a_{11}d_1+a_{21}d_2,\\&\psi(M,u,v,a,b,c)(d_2)=a_{12}d_1+a_{22}d_2,\\&\psi(M,u,v,a,b,c)(E(\mathbf{m}))=\varepsilon q^\tau u^{m_1}v^{m_2}E(\mathbf{m}')+\varepsilon q^\tau(a^{m_1}b^{m_2}-u^{m_1}v^{m_2})x^{\mathbf{m}'},\\&\psi(M,u,v,a,b,c)(x^{\mathbf{m}})=\varepsilon q^\tau\Big(\frac{(1+c)}{2}a^{m_1}b^{m_2}x^{\mathbf{m}'}+\frac{(1-c)}{2}u^{m_1}v^{m_2}(E(\mathbf{m}')-x^{\mathbf{m}'})\Big),\end{aligned}$$

其中

$$\tau = \frac{1}{2}(-a_{11}a_{21}m_2^2 - a_{12}a_{22}m_1^2 + (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12} - 1)m_1m_2),$$
$$\varepsilon = |M|, \quad \mathbf{m} = (m_1, m_2), \quad \mathbf{m}' = \Big(\frac{-a_{21}m_2 + a_{22}m_1}{\varepsilon}, \frac{a_{11}m_2 - a_{12}m_1}{\varepsilon}\Big).$$

直接验证可知 ψ 是双射, 且满足

$$\psi((N,u,v,a,b,z)(M,u_1,v_1,a_1,b_1,z_1)) = \psi(N,u,v,a,b,z)\psi(M,u_1,v_1,a_1,b_1,z_1),$$

从而 ψ 是一个群同构, 故

$$\mathrm{Aut}\, L_q \cong GL_2(\mathbb{Z}) \ltimes_{\theta_2} (\mathbb{C}^{*4} \rtimes_{\theta_1} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

证毕.

参 考 文 献

[1] Berman S., Gao Y., Krylyuk Y., Quantum tori and the structure of elliptic quasi-simple Lie algebras, *J. Funct. Anal.,* 1996, **135**: 339–389.

[2] Jiang C., Meng D., The automorphism group of the Der ivation algebra of the virasoro–like algebra, *Adv. in Math.,* 1998, **27**: 175–183 (in Chinese).

[3] Xue M., Lin W., Tan S., Central extension and Der ivations and automorphism group for Lie Algebras arising from 2-dimensional Torus, *Journal of Lie Theory,* 2006, **16**(1): 139–153.

[4] Chen Y., Xue M., Lin W., Tan S., Structure and automorphism group of a class of Derivation Lie algebras over quantum torus, *Chinese Annals of Mathematics*, 2005, **26A**(6): 1–12.

[5] Kirkman E., Procesi C., Small L., A q-analog for the virasoro algebra, *Comm. Algebra,* 1994, **22**: 3755–3774.

[6] Jiang C., Meng D., The Derivation algebra of the associative algebra $C_q[X, Y, X^{-1}, Y^{-1}]$, *Comm. Algebra,* 1998, **26**: 1723–1736.

[7] Allison B., Azam S., Berman S., Gao Y., Pianzola A., Extended affine Lie algebras and their root systems, *Memoirs of Amer. Math. Soc.*, 1997, **126**: 1–122.

[8] Dokovic D., Zhao K., Derivations, isomorphisms, and second cohomology of generalized Witt algebras, *Trans. of Amer. Math. Soc.*, 1998, **350**: 643–664.

[9] Gao Y., Representations of extended affine Lie algebras coordinized by certain quantum tori, *Compositio Math.*, 2000, **123**: 1–25.

[10] Lin W., Tan S., Central extensions and Derivations of the Lie algebras of skew Derivations for the quantum torus, *Comm. Algebra*, 2005, **33**: 3919–3938.

[11] Lin W., Tan S., Representations of the Lie algebra of Der ivations for quantum torus, *J. Algebra*, 2004, **275**: 250–274.

[12] Lin W., Tan S., Nonzero level Harish–Chandra modules over the Virasoro–like algebra, *J. Pure and Appl. Algebra*, 2006, **204** : 90–105.

[13] Lin W., Tan S., The representations of the skew Derivation Lie algebra for quantum torus, *Adv. Math.*, 2005, **34**: 477–487 (in Chinese).

[14] McConnell J. C., Pettit J. J., Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras, *J. London Math. Soc.*, 1988, **38**: 47–55.

[15] Rao S. E., Zhao K., Highest weight irreducible representations of rank 2 quantum tori, *Math. Res. Lett.*, 2004, **11**: 615–628.

[16] Su Y., Zhu L., Derivation algebras of centerless perfect Lie algebras are complete, *J. Algebra*, 2005, **285**: 508–515.

[17] Su Y., Zhu L., Representations of the Derivation algebra of the localization of the quantum plane at $q = -1$, *Comm. Algebra*, 2005, **33**: 4375–4382.

[18] Su Y., Zhao K., Isomorphism classes and automorphism groups of algebras of Weyl type, *Science in China, Ser, A*, 2002, **45A**: 953–963.

[19] Zhao K., The q-Virasoro–like algebra, *J. Algebra*, 1997, **188**: 506–512.

[20] Zhang H., Zhao K., Representations of the Virasoro–like algebra and its q-analog, *Comm. Algebra*, 1996, **24**: 4361–4372.