文章编号: 0583-1431(2007)03-0577-06 **文献标识码: A**

3 阶非单谷 Feigenbaum 映射的拟极限集

王立娟

嘉兴学院数学与信息科学学院 嘉兴 314001
E-mail: wlj@mail.jlu.edu.cn

摘 要 一个从闭区间到自身的连续映射被称为 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射, 如果它是函数方程 $f^3(\lambda x) = \lambda f(x)$ 的解. 本文讨论了 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射的拟极限集及其 Hausdorff 维数. 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射必然产生混沌, 混沌的产生使得拟极限集的存在性问题复杂化. 文中采用分形几何中的知识方法证明了此类映射的拟极限集的存在性, 并相应的对其 Hausdorff 维数作出了估计. 最后给了一个具体的例子, 说明确实存在这样的 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射.

关键词 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射; 拟极限集; Hausdorff 维数
MR(2000) 主题分类 39B52
中图分类 O189.1

Likely Limit Sets of 3-Order Nonsingle–Valley Feigenbaum's Maps

Li Juan WANG

Department of Mathematics and Information Science, Jiaxing University, Jiaxing 314001*, P. R. China*
E-mail: wlj@mail.jlu.edu.cn

Abstract A continuous map from a closed interval into itself is a 3-order Feigenbaum's map if it is a solution of the functional equation $f^3(\lambda x) = \lambda f(x)$. We consider the likely limit sets of 3-order nonsingle-valley Feigenbaum's maps and their Hausdorff dimensions. 3-order nonsingle-valley Feigenbaum's maps must bring about chaos, and chaos also brings about the complication of the problem on the existence of likely limit sets. We testify the existence of the maps' likely limit sets by using the method of fractal geometry, estimate their Hausdorff dimensions. As an application, we give a idiographic example in order to prove the existence of 3-order nonsingle-valley Feigenbaum's maps.

Keywords 3-order nonsingle-valley Feigenbaum's map; likely limit sets; Hausdorff dimension
MR(2000) Subject Classification 39B52
Chinese Library Classification O189.1

1 引言及定义

1978 年, Feigenbaum [1] 首先发现在倍周期分叉传递到混沌的过程中具有惊人的数量普适现

收稿日期: 2005-12-01; 接受日期: 2006-06-06

象 (即所谓的 Feigenbaum 现象), 进而他提出利用重正化群方法来解释这一现象. 迄今, 整个理论完全建立在 Feigenbaum 对某类函数空间的若干几何假设上, 其中一个基本而关键的假设是关于重正化算子存在不动点, 即相应的函数方程

$$\begin{cases} g(x) = -\dfrac{1}{\lambda} g^2(-\lambda x), & (\lambda \in (0,1) \ \text{待定}), \\ g(0) = 1, \quad -1 \le g(x) \le 1, & (x \in [-1,1]) \end{cases}$$

存在解的假设. 二十多年之后, 有关 Feigenbaum 现象的研究倍受世人瞩目. 时至今日, 包括物理、化学、生物、生态以及数学的各个分支在内的众多领域的科学工作者已在这方面取得了丰硕的研究成果, 使我们不仅知道了 Feigenbaum 函数方程存在解、存在什么样的解, 而且清楚了如何具体构作其连续的、可微的乃至光滑的解, 还了解到解的一些动力性态.

为了更好地解释 Feigenbaum 现象, 探索普适机理, Eckmann, Eps-tein 和 Wittwer [2] 在 1984 年考虑了广泛意义下的 Feigenbaum 函数方程

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\lambda} f^p(\lambda x), & (|\lambda| \in (0,1) \ \text{待定}), \\ f(0) = 1, \quad -1 \le f(x) \le 1, & (x \in [-1,1]). \end{cases} \tag{1.1}$$

并指出当 p 充分大时, 上述方程的解近似于二次方程 $f(x) = 1 - 2x^2$.

为方便研究, 杨路, 张景中 [3] 提出第二类 Feigenbaum 函数方程

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\lambda} f^2(\lambda x), & (\lambda \in (0,1) \ \text{待定}), \\ f(0) = 1, & 0 \le f(x) \le 1, \quad (x \in [0,1]). \end{cases} \tag{1.2}$$

进而, 廖公夫 [4] 又提出如下的方程

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\lambda} f^p(\lambda x), & (\lambda \in (0,1) \ \text{待定}), \\ f(0) = 1, \quad 0 \le f(x) \le 1, & (x \in [0,1]). \end{cases} \tag{1.3}$$

并指出它与方程 (1.1) 所发挥的作用相同, 且这两个方程的解之间有非常直接的联系. 还给出了构造方程 (1.1) 的可微偶单峰解的一可行方法.

动力系统的一个很有趣的主题是它的拟极限集. 拟极限集的概念是在 1985 年由 Milnor [5] 给出的:

定义 1.1 设 M 为光滑紧致流形 (可以带边), $f: M \to M$ 为连续映射.f 的拟极限集 $\Lambda = \Lambda(f)$ 意指 f 在 M 中满足如下条件的最小的不变闭子集：对 Lebesgue 零测集之外的所有的 $x \in M$, $\omega(x,f) \subset \Lambda$. 这里 $\omega(x,f)$ 表示点 x 的 ω- 极限集.

在 Milnor 定义的吸引子意义下, 拟极限集是系统唯一的极大吸引子, 它集中了几乎全部点的渐进性态, 因此研究这类子集很有意义.

1997 年, 廖公夫、黄桂丰和何伯和 [6] 研究了一类无穷多峰 Feigenbaum 映射的拟极限集, 估计了它们的 Hausdorff 维数, 并证明了对于 $0,1$ 之间的任意一个小数 s, 都存在区间上的连续映射, 使其有一个以 s 为 Hausdorff 维数的拟极限集. 由于 $p=2$ 时的 Feigenbaum 映射的单谷扩充连续解只有 2 的方幂周期点, 于是其拓扑熵必为零且不是 Li–Yorke 混沌的. 又李天岩, Yorke 在文 [7] 中指出周期 3 蕴含混沌. 于是我们自然会问, 对 3 阶 Feigenbaum 映射的拟极限集会是怎样的一种状态呢? 本文将给出具体回答.

由于 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射与 3 阶单谷 Feigenbaum 映射限制在非游荡集上是拓扑共轭 [8], 本文只考虑非单谷的情形.

2 主要概念和引理

记 $I=[0,1],C^0(I,I)$ 是 I 到自身的连续映射空间. 设 $J,J'\subset I$, 文中 $J<J'$ 指 $\forall x\in J,\ y\in J'$, 有 $x<y$. 设 $f\in C^0(I,I)$, f^n 表示 f 的 n 次迭代, $O(J,f)=\{J,f(J),\ldots,f^{n-1}(J)\}$ 是 J 在 f 下的轨道.

定义 2.1 设 $f\in C^0(I,I)$, 称 f 是 p 阶非单谷 Feigenbaum 映射, 若 f 是方程 (1.3) 式的解, 且 $f|_{[\lambda,1]}$ 是单谷的 (即存在 $\alpha\in(\lambda,1)$, 使 $f(\alpha)=0$ 且 $f|_{[\lambda,\alpha]}$ 严格递减, $f|_{[\alpha,1]}$ 严格递增), 但 f 本身不是单谷的.

设 (X,d) 为紧致度量空间, 用 $|E|$ 表示 X 的子集 E 的直径, 即

$$|E|=\sup\{d(x,y)\,|\,x,\ y\in E\}.$$

设 $\delta>0$, 称子集族 $\{U_i\}$ 为 E 的 δ- 覆盖, 如果 $E\subset\bigcup_i U_i$, 且对每个 i, $0<|U_i|\le\delta$.

设 $E\subset X$, $0\le s<\infty$. 对 $\delta>0$, 令 $H^s_\delta(E)=\inf\sum_{i=1}^\infty|U_i|^s$, 式中下确界取自 E 的一切可能的可数 δ- 覆盖 $\{U_i\}$.

E 的 s- 维 Hausdorff 外测度定义为

$$H^s(E)=\lim_{\delta\to0^+}H^s_\delta(E).$$

存在实数 r, 满足

$$H^t(E)=\begin{cases}\infty, & 若\ t<\dim_H E,\\ 0, & 若\ t>\dim_H E.\end{cases}$$

这样的实数 r 是唯一确定的, 称为 E 的 Hausdorff 维数, 记为 $\dim\ E$ (参见文献 [9]).

称 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为一压缩映射, 这里 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间. 如果存在 $c<1$, 使对一切 $x,\ y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\le c|x-y|. \tag{2.1}$$

使 (2.1) 式成立的一切 c 的下确界称作 φ 的压缩比.

我们将用到下述引理:

引理 2.1[9] 设 $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m$ 是 R^n 中压缩映射, 那么存在唯一的非空紧致集合 E, 使得 $E=\varphi(E)=\bigcup_{i=1}^m\varphi_i(E)$, 这里 $\varphi=\bigcup_{i=1}^m\varphi_i$ 是 R^n 子集的一个变换. 进一步, 对非空紧致集 $F\subset R^n,\varphi^k(F)$ 收敛于 E (在 Hausdorff 度量下), 当 $k\to+\infty$ 时.

引理 2.2[9] 设$\{\varphi_i\}_1^m$ 是 R 上压缩映射, 满足开集条件, 即有开区间 V, 使得

(1) $\varphi(V)=\bigcup_{i=1}^m\varphi_i(V)\subset V$;

(2) $\varphi_1(V),\varphi_2(V),\ldots,\varphi_m(V)$ 是两两不交的.

而且假设对每个 i, 存在 q_i,r_i, 使得

$$q_i|x-y|\le|\varphi_i(x)-\varphi_i(y)|\le r_i|x-y|,\quad \forall\,x,y\in\overline{V},$$

那么 $s\le\dim{}_H E\le t$, 这里 s 和 t 如下定义: $\sum_{i=1}^m q_i^s=1=\sum_{i=1}^m r_i^t$.

称 $E\subset I$ 是 f 的极小集, 如果 $E\neq\phi$ 且 $\omega(x,f)=E$ 对任意的 $x\in E$. 众所周知, 极小集是 f 的闭的、非空的、不变的子集, 且在 f 下没有闭的、非空的、不变的真子集. 因此, 如果 E 是极小集且 $\omega(x,f)\subset E$, 对几乎所有点 $x\in I$, 那么 $E=\Lambda(f)$.

引理 2.3[10] 设 f 是 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射, 则有下述性质成立.

(1) $f^2(1)=\lambda$, $f^3(\lambda)=\lambda f(1)$.

(2) 记 $[\alpha_0,1]=J_0\subset[\lambda,1]$, $J_1=f(J_0)$, 这里 α_0 满足 $f^2(\alpha_0)=0$ 且 $f(\lambda)>\alpha_0$:

(a) $J_0,J_1\subset(\lambda,1]$ 是两两不交的;

(b) $f|_{J_0}:J_0\to J_1$ 是同胚;

(c) α 是 J_1 的端点, 即 $f(\alpha_0)=\alpha$.

(3) 方程 $f^2(x)=\lambda x$ 在 $(\alpha_0,1]$ 上仅有一解 $x=1$ (这里 λ, α 同定义 2.1).

3 主要结论

定理 3.1 设 f 是 3 阶非单谷 Feigenbaum 映射. 记 $f_1=f|_{[\lambda,\alpha]}$, $f_2=f|_{[\alpha,1]}$. 如果存在正数 $M>2$, 使得 $M\le|f_1'|<+\infty$, $1\le f_2'<+\infty$ (在端点处考虑其左右导数), 那么

(1) f 的拟极限集 $\Lambda(f)=E$ 是 f 的极小集合.

(2) $s\le\dim_H E\le t$, 其中

$$\sum_{i=0}^{2}\left(\inf_{x\in I}|(f_2^{-i}(\lambda x))'|\right)^s=1=\sum_{i=0}^{2}\left(\sup_{x\in I}|(f_2^{-i}(\lambda x))'|\right)^t,$$

这里 λ,α 如引理 2.3 中所给定.

证明 设 f 是满足定理中条件的映射. 记 $f(1)=\beta$, $J_1=[0,\lambda]$, 由引理 2.3 知 $J_2=f(J_1)=[\alpha_0,1]$, $J_3=f(J_2)=[\alpha,\beta]$, 且 J_1,J_2,J_3 互不相交. 对 $\forall x\in I$ 定义 $\varphi_i:I\to I$, $i=1,2,3$ 如下

$$\varphi_1(x)=\lambda x;\quad \varphi_2(x)=f_2^{-2}(\lambda x);\quad \varphi_3(x)=f_2^{-1}(\lambda x).$$

易见 φ_i 均为压缩映射, 且恰有 $\varphi_1(I)=J_1$, $\varphi_2(I)=J_2$, $\varphi_3(I)=J_3$, 故 $\varphi_i(I)$两两不交. 由引理 2.1 和 2.2, 存在唯一的非空紧致集合 E, 使得

$$E=\varphi(E)=\bigcup_{i=1}^{4}\varphi_i(E),\quad 且\ \ s\le\dim_H E\le t,$$

这里

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\inf_{x\in I}|(\varphi_i(x))'|\right)^s=1=\sum_{i=1}^{3}\left(\sup_{x\in I}|(\varphi_i(x))'|\right)^t,$$

于是经计算得

$$\sum_{i=0}^{2}\left(\inf_{x\in I}|(f_2^{-i}(\lambda x))'|\right)^s=1=\sum_{i=0}^{2}\left(\sup_{x\in I}|(f_2^{-i}(\lambda x))'|\right)^t.$$

下面通过证明 E 是 f 的极小集且吸引几乎所有的点, 得到 $\Lambda(f)=E$,从而完成定理的证明.

首先, 证明 3 个断言. 为方便, 简记 $\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_k}=\varphi_{i_1i_2\cdots i_k}$.

断言 1 对 $\forall x\in I, f\circ\varphi_1(x)=\varphi_2\circ f(x), f\circ\varphi_2(x)=\varphi_3(x), f\circ\varphi_3(x)=\varphi_1(x)$.

证明 记 $\lambda f(x)=f^3(\lambda x)=f_2(f_2(f(\lambda x)))$. 对 $\forall x\in I$, $\varphi_i(x)\in J_i$, $i=1,2,3$, 由 φ_i 定义

$$f\circ\varphi_1(x)=f(\lambda x)=f_2^{-2}(\lambda f(x))=\varphi_2\circ f(x);$$

$$f\circ\varphi_2(x)=f_2\circ\varphi_2(x)=f_2\circ f_2^{-2}(\lambda x)=f_2^{-1}(\lambda x)=\varphi_3(x);$$

$$f\circ\varphi_3(x)=f_2\circ\varphi_3(x)=f_2\circ f_2^{-1}(\lambda x)=\lambda x=\varphi_1(x);$$

断言 2 对 $\forall k>0$, $\varphi^k(I)=\bigcup_{i_1,\ldots,i_k=1}^{3}\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$ 是 f 的不变集, 即 $f(\varphi^k(I))\subset\varphi^k(I)$.

证明 因每个 $\varphi_{i_1i_2\cdots i_k}$ 有形式 $\varphi_{11\cdots1}$ 或 $\varphi_{11\cdots2i_r\cdots i_k}$ 或 $\varphi_{11\cdots3i_r\cdots i_k}$, 由断言 1 重复作用得

$$f\circ\varphi_{11\cdots1}=\varphi_{22\cdots2}\circ f,\quad f\circ\varphi_{11\cdots2i_r\cdots i_k}=\varphi_{22\cdots3i_r\cdots i_k},\quad f\circ\varphi_{11\cdots3i_r\cdots i_k}=\varphi_{22\cdots1i_r\cdots i_k}.$$

因为 $f(I)\subset I$ 有 $f\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)\subset\varphi^k(I)$, 进而

$$f(\varphi^k(I))\subset\bigcup_{i_1,\ldots,i_k=1}^{3}f\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)\subset\varphi^k(I).$$

断言 3 对任意子集 $\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$, $\varphi_{j_1\cdots j_k}(I)$, 存在一正数 $n>0$, 使得 $f^n\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)=\varphi_{j_1\cdots j_k}(I)$.

证明 设 $x\in I$, 由断言 1, $f^3\circ\varphi_i(x)=\varphi_i\circ f(x)$, $i=1,2,3$. 因此对 $\forall k>0$,

$$f^{3^k}\circ\varphi_i(x)=\varphi_i\circ f^{3^{k-1}}(x). \tag{3.1}$$

若对每个 $r=1,2,\ldots,k$, 我们有 $i_r=j_r$, 那么由 (3.1) 式, 有

$$f^{3^k}\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)=\varphi_{i_1}\circ f^{3^{k-1}}\circ\varphi_{i_2\cdots i_k}(I)=\cdots=\varphi_{i_1\cdots i_k}\circ f(I)=\varphi_{i_1\cdots i_k}(I).$$

由此可见此断言对这种特殊情形成立. 假设存在某个 $r, 1\le r\le k$, 使得 $i_r\ne j_r$, 且 $i_q=j_q$, 对 $q<r$. 重复应用 (3.1) 式, 得 $f^{3^{r-1}k}\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$, $k=1,2$ 之一有形式 $\varphi_{l_1\cdots l_r l_{r+1}\cdots l_k}(I)$, 这里 $l_q=j_q$ 对 $q=1,2,\ldots,r$. 继续重复此过程, 得到某个 n, $0<n<2(3+3^2+\cdots+3^{k-1})$, 使得 $f^n\circ\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)=\varphi_{j_1\cdots j_k}(I)$.

以下依次证明:

(1) 对几乎所有 $x\in I$, $\omega(x,f)\subset E$.

记 $K=[0,f(\lambda)]$. 对 $\forall x\in K$, 定义 $\psi_1,\psi_2:K\to K$ 如下：$\psi_1=f_1^{-1}$, $\psi_2=f_2^{-1}\circ f_1^{-1}$. 容易验证, ψ_1,ψ_2 为压缩映射. 由引理 2.1 和 2.2 知, 存在唯一的非空紧致集合 F, 使得 $F=\psi_1(F)\cup\psi_2(F)$. 注意到 $\psi_1^{-1}=f_1$, $\psi_2^{-1}=f_1\circ f_2$, 于是 F 是 f 的不变集. 并且有 $F\subset(\lambda,\alpha)\cup(\beta,\alpha_0)$, $\mu(F)=0$ (这里 μ 是指 Lebesgue 测度. 事实上由于 $0<|\psi_1'|<\frac{1}{M}$, $0<|\psi_2'|<\frac{1}{M}$, 根据引理 1.2 计算得, $0\le\dim_H F\le\log_M 2<1$). 接下来由于 $f^{3^k}(\lambda^k x)=\lambda^k f(x)$, 故

$$f^{3^k}(\lambda^k F)=\lambda^k f(F)=\lambda^k F.$$

设 $A=\bigcup_{k=0}^{\infty}O(\lambda^k F,f)$, 因 $f|_{[\lambda^{k+1},\lambda^k\alpha]}, f|_{[\lambda^k\alpha,\lambda^k]}$ 严格单调, 对

$$\forall x\in(\lambda^{k+1},\lambda^k\alpha)\cup(\lambda^k\alpha,\ \ \lambda^k), 0<|f'(x)|<+\infty,$$

于是 $\mu(f(\lambda^k F))=0$, 故 $\mu(A)=0$. 令 $B=\bigcup_{i=0}^{\infty}f^{-i}(A)$, 对任意的 $k\ge 0$, $f^{-1}(O(\lambda^k F,f))$ 属于至多可数个单调区间 (这些区间互不相交), 在每个单调区间内 $0<|f'(x)|<+\infty$, 因而 $\mu(f^{-1}(O(\lambda^k F,f)))=0$, 于是 $\mu(f^{-1}(A))=0$, 进而 $\mu(f^{-i}(A))=0$, 故 $\mu(B)=0$. 对 $\forall x\in I-B$, 若 $x\in\varphi(I)$, 则 $f^0(x)\in\varphi(I)$. 若 $x\notin\varphi(I)$, 令 $D=\psi_1(K)\cup\psi_2(K)=[\lambda,\alpha]\cup[\beta,\alpha_0]$, 注意到此时 $x\in D\setminus F$, 由 F 的性质知, 存在 n, 使得

$$x\notin\cup\{\psi_{i_1}\circ\cdots\circ\psi_{i_n}(D):i_j=1,2\},$$

所以 $f^{2n}(x)\notin D$, 即 $f^{2n}(x)\in\varphi(I)$. 因此无论哪种情形, 都存在 $N_1\ge 0$, 使得 $f^{N_1}(x)\in\varphi(I)$. 假设对 $k=p$, 我们已经知道存在 $N_p\ge 0$, 使得 $f^{N_p}(x)\in\varphi^p(I)$. 容易看出 $f^{N_p}(x)$ 属于某个 $\varphi_{i_1\cdots i_p}(I)$. 由断言 3, 有 $l>N_p$ 满足 $f^l(x)\in\varphi_{11\cdots 1}=[0,\lambda^p]$. 显然 $f^l(x)=\lambda^p y\notin B$ 蕴含 $y=\lambda^{-p}f^l\notin A$. 如上所证, 存在 $N_1\ge 0$, 使得 $f^{N_1}(\lambda^{-p}f^l(x))\in\varphi(I)$. 使用 (3.1) 得

$$\begin{aligned}f^{N_1 3^p+l}(x)&=f^{N_1 3^p}(f^l(x))=f^{N_1 3^p}(\lambda^p(\lambda^{-p}f^l(x)))=f^{N_1 3^p}\circ\varphi_{11\cdots 1}(\lambda^{-p}f^l(x))\\&=\varphi_{11\cdots 1}\circ f^{N_1}(\lambda^{-p}f^l(x))\in\varphi_{11\cdots 1}\circ\varphi(I)\in\varphi^{p+1}(I).\end{aligned}$$

由归纳知, 对每个 $k\ge 0$, 存在 $N_k\ge 0$, 使得 $f^{N_k}(x)\in\varphi^k(I)$. 进而由断言 2, 知 $\forall n\ge N_k$, $f^n(x)\in\varphi^k(I)$. 因 $\varphi^k(I)\to E$, 有 $f^n(x)\to E$, 而 E 的紧性蕴涵 E 闭, 得 $\omega(x,f)\subset E$.

(2) E 是 f 的极小集.

容易验证 φ_i 的压缩比小于或等于 λ, 因此 $\varphi_{i_1\cdots i_k}$ 的压缩比小于或等于 λ^k. 从而 diam $\varphi_{i_1\cdots i_k} \to 0$, 当 $k \to \infty$. 对 $i_r \in \{1,2,3\}$ 一致成立. 设 $x \in E$, 对任意 $y \in E$ 和任意开集 V, 有某个 $\varphi_{j_1\cdots j_k}(I) \subset V$. 因 $\varphi(I) \subset I$, 有 $\varphi^{i+1}(I) = \varphi^i \circ \varphi(I) \subset \varphi^i(I)$, $\forall i \geq 0$. 因此不难证明

$$E = \bigcap_{i=0}^{\infty} \varphi^i(I). \tag{3.2}$$

故 $x \in E$ 蕴涵 $x \in \varphi^k(I)$. 从而 x 属于某个 $\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)$. 由断言 3, 存在 $n > 0$, 使得 $f^n(x) \in f^n(\varphi_{i_1\cdots i_k}(I)) = \varphi_{j_1\cdots j_k}(I) \subset V$. 这表明 $y \in \omega(x,f)$, 因此 $E \subset \omega(x,f)$. 因 (3.2) 式和断言 2, 有 $f(E) \subset E$. 此外 E 是闭集, 还有 $\omega(x,f) \subset E$. 故得出 $\omega(x,f) = E$. 再由 x 的任意性知, E 是 f 的极小集. 综合 (1), (2) 知 $E = \Lambda(f)$. 于是由 E 性质知, 定理成立.

定理 3.2 对任意 $0 < s < 1$, 存在 3 阶非单谷的 F- 映射 f, 使得 $\dim_H \Lambda(f) = s$.

证明 对给定的 s, $0 < s < 1$, 令 $\lambda = e^{-\frac{\ln 3}{s}}$. 因为 $\frac{\ln 3}{s} > \ln 3$, 蕴含 $e^{\frac{\ln 3}{s}} > 3$, 进而 $\lambda < \frac{1}{3}$. 于是对上述 s, 一定存在某个 $m > 2$, 使得 $\lambda = e^{-\frac{\ln 3}{s}} < \frac{m-2}{3m-2} < \frac{1}{3}$.

接下来再令

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \quad \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda, \quad \alpha_0 = 1 - \lambda,$$

则有 $0 < \lambda < \alpha < \beta < \alpha_0 < 1$. 现定义 $f_0 : [\lambda, 1] \to [0,1]$ 如下

$$f_0(x) = \begin{cases} -mx + m\alpha, & x \in [\lambda, \alpha], \\ x - \alpha, & x \in [\alpha, \beta], \\ x + \alpha - \alpha_0, & x \in [\beta, 1]. \end{cases}$$

于是有 $f(\lambda) > \alpha_0$, $f_0(\alpha) = 0$, $f_0(\beta) = \lambda$, $f_0(\alpha_0) = \alpha$, $f_0(1) = \beta$. 因此 f_0 可唯一的扩张成为 3 阶非单谷 F- 映射 f. 经计算可知

当 $x \in [\lambda, \alpha]$ 时, $f'(x) = -m < -2$; 当 $x \in [\alpha, \beta]$ 时, $f'(x) = 1$; 当 $x \in [\beta, 1]$ 时, $f'(x) = 1$.

按定理 3.1 计算得 $\dim_H \Lambda(f) = s$.

致谢 作者衷心感谢导师廖公夫教授对本文的悉心指导.

参 考 文 献

[1] Feigenbaum M. J., Quantitative universality for a class of nonlinear transformation, *J. Stat. Phys.*, 1978, **19**: 25–52.

[2] Eckmann J. P., Epstein H., Wittwer P., Fixed points of Feigenbaum's type for the equation $f^p(\lambda x) \equiv \lambda f(x)$, *Comm. Math. Phys.*, 1984, **93**: 495–516.

[3] Yang L., Zhang J.Z., The second type of Feigenbaum's functional equations, *Scientia Sinica A*, 1986, **29**: 1252–1263; *Chinese Issue*, 1985, **12**: 1061–1069 (in Chinese).

[4] Liao G. F., On the Feigenbaum's functional equation $f^p(\lambda x) = \lambda f(x)$, *Chin, Ann. Math.*, 1994, **15B**: 81–88.

[5] Milnor J., On the concept of attractor, *Comm. Math. Phys.*, 1985, **99**: 177–195.

[6] Liao G. F., Huang G. F., He B. H., Likely limit Sets of Feigenbaum's maps and their Hausdorrf dimension, *Northeast Math. J.*, 1997, **13**(3): 349–356.

[7] Li T. Y., Yorke J. A., Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, 1975, **82**: 985–992.

[8] Wang L. J., Liao G. F., Topological conjugacy on 3-order feigenbaum's maps, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(4): 955-960.

[9] Falconer K. J., The geometry of fractal sets, New York: Cambridge Univ. Press, 1985.

[10] Zhang A. H., Wang L. J., Song W., Nonsingle-Valley continuous solution of p-order feigenbaum's functional equation, *Northeast Math. J.*, 2003, **4**: 351–356.