第50卷第3期 数学学报中文版 Vol.50, No.3
2007年5月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series May, 2007

文章编号: 0583-1431(2007)03-0539-08 **文献标识码: A**

非平稳 NA 序列部分和的精确渐近性

赵月旭

杭州电子科技大学应用数学与工程计算研究所 杭州 310018
E-mail: yxzhao@hdu.edu.cn

摘　要 本文探讨了非平稳 NA 序列部分和的精确渐近性. 以前的文献在讨论 NA 序列此类极限性质时都附加有强平稳条件的限制, 这必然会给一些问题的研究带来不便. 周知, 非平稳 NA 序列在许多实际问题中是大量存在的, 所以解除强平稳条件的束缚具有较大的理论和实际意义, 这正是本文的目的之所在, 同时本文也将已有的一些结果包含成为特殊情形.

关键词 非平稳; NA 序列; 部分和; 精确渐近性
MR(2000) 主题分类 60F15, 60G50, 60F05
中图分类 O211.4

Precise Asymptotics for Partial Sums of Nonstationary NA

Yue Xu ZHAO

Institute of Applied Mathematics and Engineering Computation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018*, P.R. China*
E-mail: yxzhao@hdu.edu.cn

Abstract In this paper, we investigate the precise asymptotics for partial sums of nonstationary NA sequences. Many authors added strictly stationary restrictions to NA sequences when they discussed such limit properties, which has inconvenienced the study of some problems. It is well known that nonstationary NA sequences exist in lots of practical situations, therefore it is of great theoretical and practical meaning to remove the strictly stationary restriction, which is just the main purpose of the present work; meanwhile, our results include some known theorems as special cases.

Keywords nonstationary; NA sequences; partial sums; precise asymptotics
MR(2000) Subject Classification 60F15, 60G50, 60F05
Chinese Library Classification O211.4

1 引言

Alam 与 Saxena [1], Joag-Dev 与 Proschan [2] 提出了 NA 随机变量序列的概念, 由于其在多元统计分析, 可靠性理论及渗透理论中有着广泛的应用, 故称其为是一类重要的相依序列并不为过. 近些年来, 关于 NA 序列理论的研究可谓成果累累, 如在中心极限定理, 完全收敛性, 对数律, 收敛速度等诸多方面, 都已取得众多深刻的结果, 至今凡是涉及到 NA 序列极限理论方面的研究依然方兴未艾. 本文将进一步探讨 NA 变量极限性状方面的一些内容, 关于部分和尾概率级数极

收稿日期: 2005-07-21; 接受日期: 2006-06-06
基金项目: 浙江省教育厅科学研究基金资助项目 (20060237, 20050494)

限理论的一般提法是: 设 $\{X_n : n \geq 1\}$ 为随机变量序列, 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $\varphi(x), H(x)$ 为定义在 $(0, \infty)$ 上的正值函数, 级数 $\sum_{n=1}^\infty \varphi(n)P(|S_n| \geq \epsilon H(n))$ 的极限行为和收敛速度如何? 以往的许多研究结果已经表明: 在一定的矩条件下, 上述级数的极限性状与函数 $\varphi(x)$ 和 $H(x)$ 的性质密切相关, 因此寻求函数 $\varphi(x)$ 与 $H(x)$ 之间的关系便成为一个重要的课题, 以上所提问题的一个研究方向是: 当 $\epsilon \to 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^\infty \varphi(n)P(|S_n| \geq \epsilon H(n))$ 的精确收敛速度有多大? 关于这方面的研究通常被称作部分和的精确渐近性.

定义 1.1 称实值随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ $(n \geq 2)$ 为 NA (Negatively Associated) 的, 如果对于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任何两个不相交的非空子集 T_1 和 T_2, 都有

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_i, i \in T_1), f_2(X_j, j \in T_2)) \leq 0,$$

其中 f_1 和 f_2 是任何两个使上述协方差存在的且对每个变元均非降 (或均非升) 的函数; 称随机变量族 $\{X_t : t \in T\}$ 是 NA 族, 如果它的任何有限子族都是 NA 的.

Petrov 曾建立了可适用于 NA 序列的 Borel–Cantelli 引理, 这为研究其完全收敛性提供了可能, 文 [3–6] 也都讨论过 NA 序列的一些极限性质, 由于 NA 序列能实质地包含独立序列, 我们不妨先给出 Heyde [7] 关于独立序列概率级数收敛速度的一个结果:

定理 A 设 $\{X_n : n \geq 1\}$ 为独立同分布随机变量序列, 若 $EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$, 则

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \sum_{n=1}^\infty P(|S_n| \geq \epsilon n) = EX^2. \tag{1.1}$$

在探索概率级数 $\sum_{n=1}^\infty \varphi(n)P(|S_n| \geq \epsilon H(n))$ 中函数 $\varphi(x)$ 和 $H(x)$ 进一步的关系方面, 文 [8] 得到了关于 B- 值强平稳序列较为精细的一个结果

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{\frac{4}{\alpha}} \sum_{n=1}^\infty L(n)L'(n)P(\|S_n\| \geq \epsilon(nL^\alpha(n))^{\frac{1}{2}}) = \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty X^{\frac{4}{\alpha}-1} G_2(x)dx < \infty, \tag{1.2}$$

其中函数 $G_2(x)$ 满足

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \geq 0} |P(\|S_n\| \geq xn^{\frac{1}{2}}) - G_2(x)| = 0.$$

文 [9] 对强平稳 NA 序列得到关于重对数律渐近性的一个结果:

定理 B 设 $a_n = O(1/\log\log n)$. 对任何 $b > -1$, 我们有

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{2b+1} \sum_{n=1}^\infty \frac{(\log\log n)^b}{n \log n} P(|S_n| \geq (\epsilon + a_n)\sigma\sqrt{2n \log\log n}) = \frac{1}{(b+1)\sqrt{\pi}} \Gamma(b + 3/2).$$

最近, 文 [10] 又得到了关于正态吸引场强平稳 NA 序列如下的一个结论

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{\frac{1}{s}} \sum_{n=1}^\infty g'(n)P(|S_n| \geq \epsilon b_n g^s(n)) = E|Z|^{\frac{1}{s}}, \tag{1.3}$$

其中 $Z \sim N(0, \sigma^2)$.

关于精确渐近性理论的研究, 以往的结果都附加有强平稳条件的限制, 而在许多实际问题中所出现的 NA 序列大多都是非平稳的, 所以强平稳条件必然会给一些问题的研究带来障碍, 故解除强平稳条件的束缚具有较大的理论和实际意义. 由此我们产生了解决此类问题的兴趣. 文中将先给出一些适当的条件, 然后给出定理及其证明, 为方便问题的研究, 首先考察非平稳同分布 NA 序列的情形.

未作特殊说明的情况下, 始终记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $S_{m,n} = \sum_{i=1}^n X_{i+m}$, $S_{0,n} = S_n$, C 为正常数, 在不同的地方可以表示不同的值, 即便是出现在同一式中, 也可表示不同的值, 假设正值单调函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, \infty)$ 上有定义, 并且还满足:

(a_1) $\varphi(x)\uparrow\infty$ $(x\to\infty)$ 且具有一阶非负单调导函数;
(a_2) 存在常数 $\delta>0$, 使得 $\limsup_{x\to\infty}\varphi(x)/x^\delta<\infty$.

2 主要结果

定理 2.1 设 $\{X_n: n\geq 1\}$ 为非平稳同分布 NA 序列, $EX_1=0$, $E|X_1|^q<\infty$ $(\exists\, q\geq 2)$ 且
(b_1) 存在 $\sigma>0$, 使得 $\lim_{n\to\infty}ES_n^2/n=\sigma^2$;
(b_2) 存在正整数列 $n_k\uparrow\infty$ $(k\to\infty)$, 对某 $0<\beta\leq 1$, 有 $\sum_{k=1}^\infty(m_k/n_k)^{1+\frac{\beta}{2}}<\infty$, 并使得

$$\lim_{k\to\infty}ES^2_{n_{k-1},m_k}/m_k=\sigma^2>0,$$

其中 $m_k=n_k-n_{k-1}$.

函数 $\varphi(x)$ 满足条件 (a_1), (a_2), 则对任意的 $\nu\geq\frac{1}{q}+\frac{2-q}{2q\delta}>0$, 都有

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{n=1}^\infty\varphi'(n)P(|S_n|\geq\epsilon\sqrt{ES_n^2}\varphi^\nu(n))=E|N|^{\frac{1}{\nu}},\tag{2.1}$$

或等价地成立

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{n=1}^\infty\varphi'(n)P(|S_n|\geq\epsilon\sqrt{n}\sigma\varphi^\nu(n))=E|N|^{\frac{1}{\nu}},\tag{2.2}$$

其中随机变量 N 服从标准正态分布 N(0,1).

注 1 我们对函数 $\varphi(x)$ 附加了条件 (a_1), (a_2) 的限制, 事实上即使在这种情形下, 函数 $\varphi(x)$ 也足以包含我们感兴趣的函数类, 当然这一条件对问题的解决也起到了积极的作用.

注 2 条件 (b_1) 使得 $\lim_{n\to\infty}ES_n^2=\infty$, 这是中心极限定理成立的必备条件, 由文 [11] 知 (b_2) 是 NA 序列中心极限定理成立的一个充分条件, 由此可知本文所探讨的中心极限定理的精确渐近性是有意义的.

注 3 定理将强平稳 NA 序列的结果包含在内, 事实上强平稳序列中的条件

$$\sigma^2=EX_1^2+2\sum_{n=1}^\infty EX_1X_n>0$$

蕴涵了条件 (b_1); 另外由强平稳性, 对任意的正整数 m 和 n, S_n 与 $S_{m,n}$ 具有相同的分布, 由文 [11] 知存在满足条件 (b_2) 的序列 $\{n_k: k\geq 1\}$. 特别地, 取 $q=2$, $\varphi(x)=x$ 或 $\varphi(x)=\ln\ln x$ 时, 本定理分别将独立场合下的 (1.1) 式及 Gut [12] 等建立的对数律的精确渐近性定理所包含, 故本文的结果更为宽泛.

注 4 (1.3) 式显然成为我们定理的特殊情形, 另外值得说明的一点是: 与文 [10] 中的结果相比, 我们不仅解除了强平稳条件的限制, 特别地, 也削弱了对函数 $\varphi(x)$ 的限制.

定理 2.2 设 $\{X_n: n\geq 1\}$ 为非平稳同分布 NA 序列, $EX_1=0$, $EX_1^2<\infty$ 且条件 (b_1), (b_2) 成立, 函数 $\varphi(x)$ 满足条件 (a_1) 且 $x\varphi'(x)$ 为缓变函数, 若 $Ef(g^{-1}(|X_1|))<\infty$, 则对任意的 $\nu\in(0,\frac{1}{2})$, 都有 (2.1) 式和 (2.2) 式成立, 其中 $f(x)=x^2\varphi'(x)$, $g(x)=x^{\frac{1}{2}}\varphi^\nu(x)$, $g^{-1}(x)$ 表示 $g(x)$ 的反函数.

注 5 特别地, 在定理 2.2 的条件下, 取 $\varphi(x)=(\ln\ln x)^2$; 或者取 $\varphi(x)=(\ln x)^{2\beta}(\ln\ln x)^2$, 其中 $\beta\geq 0$, 都有 (2.1) 式和 (2.2) 式成立.

定理 2.3 设 $\{X_n: n\geq 1\}$ 为非平稳同分布 NA 序列, $EX_1=0$ 且满足条件 (b_1), (b_2), 函数 $\varphi(x)$ 是满足条件 (a_1) 的缓变函数且 $\varphi'(x)$ 单调不增, 若 $EX_1^2(\varphi(X_1^2))^{1-2\nu}<\infty$, 则对任意的 $\nu>0$, 都有 (2.1) 式和 (2.2) 式成立.

注 6 此时文 [8] 中的定理 1 成为我们的特款.

注 7 由定理不难得到: 在我们所给的条件之下, 以上概率级数的收敛速度为 $\epsilon^{1/\nu}$, 且当 $\epsilon \to 0$ 时, 对应的极限状态是标准正态随机变量某阶绝对矩的形式. 事实上, 这也是完全收敛性在临界值处的极限行为, 因此这是一个具有兴趣的结果.

3 定理的证明及推论

为证明定理, 先给出下列引理和命题.

引理 3.1[13] 设 $\{X_n : n \ge 1\}$ 为 NA 序列, $EX_n = 0$, $EX_n^2 < \infty$, 则对 $\forall t > 1$, $x > 0$, 都有

$$P(|S_n| \ge x) \le \sum_{i=1}^{n} P\Big(|X_i| \ge \frac{x}{t}\Big) + 2e^t\Big(1 + \frac{x^2}{ntEX_1^2}\Big)^{-t}.$$

引理 3.2 设 $\{a_n : n \ge 1\}$ 是一有界数列且 $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, 若正值双下标组列 $\{\omega_{ni} : 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 满足 $\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni} = \lambda$ $(0 < \lambda < \infty, n \ge 1)$, 且对所有的 $1 \le i \le n$, $\omega_{ni} \downarrow 0$ $(n \to \infty)$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_{ni} a_i = 0.$$

证明 由 Toeplitz 引理 [14], 注意到 $\sum_{i=1}^{n} \omega_{ni}/\lambda = 1$, 故有 $\lambda \sum_{i=1}^{n} (\omega_{ni}/\lambda) a_i \to 0$ $(n \to \infty)$.

命题 3.1 设随机变量 N 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 对 $\forall x \ge 0$, 令 $\Psi(x) = P(|N| > x) = 1 - \Phi(x) + \Phi(-x)$, $x \ge 0$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则对满足条件 (a_1) 的函数 $\varphi(x)$ 和任意的 $0 < a < \infty$, 有

(i) $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \int_a^\infty \varphi'(x)\Psi(\epsilon\varphi^\nu(x))dx = E|N|^{\frac{1}{\nu}}$;

(ii) $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n=1}^\infty \varphi'(n)\Psi(\epsilon\varphi^\nu(n)) = E|N|^{\frac{1}{\nu}}$.

证明 对于 (i), 事实上, 当 $0 < p < \infty$ 时, 对任意的随机变量 X, 由熟知的公式, 不难得到

$$E|X|^p = \int_0^\infty P(|X|^p \ge x)dx = p\int_0^\infty x^{p-1}P(|X| \ge x)dx. \tag{3.1}$$

此时对任意的常数 $a \in (0,\infty)$, 令 $y = \epsilon\varphi^\nu(x)$, 由 (3.1) 式可得

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \int_a^\infty \varphi'(x)\Psi(\epsilon\varphi^\nu(x))dx &= \frac{1}{\nu}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon\varphi^\nu(a)}^\infty y^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(y)dy \\ &= \frac{1}{\nu}\int_0^\infty y^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(y)dy = E|N|^{\frac{1}{\nu}}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

下面考察 (ii), 由 (i) 中的函数变换, 我们只需证明

$$\lim_{\epsilon\to 0} \sum_{n=\epsilon\varphi^\nu(1)}^\infty n^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(n) = \int_0^\infty y^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(y)dy. \tag{3.3}$$

当 $y^{\frac{1}{\nu}-1} \downarrow$ 时, 由积分判别法, 结果是平凡的; 当 $y^{\frac{1}{\nu}-1} \uparrow$ 时, 我们有

$$\lim_{y\to\infty} \frac{y^{\frac{1}{\nu}-1}}{(y-1)^{\frac{1}{\nu}-1}} = 1,$$

所以对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\epsilon\varphi^\nu(M) > 0$, 当 $y > \epsilon\varphi^\nu(M)$ 时, 有 $y^{\frac{1}{\nu}-1} \le (1+\delta)(y-1)^{\frac{1}{\nu}-1}$, 故可得

$$\begin{aligned}\sum_{n=\epsilon\varphi^\nu(M)+1}^\infty \int_n^{n+1} y^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(y)dy &\le \sum_{n=\epsilon\varphi^\nu(M)+1}^\infty (n+1)^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(n) \le (1+\delta)\sum_{n=\epsilon\varphi^\nu(M)+1}^\infty n^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(n) \\ &\le (1+\delta)\sum_{n=\epsilon\varphi^\nu(M)}^\infty \int_n^{n+1} y^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(y)dy.\end{aligned}$$

令 $\delta \to 0$, 然后让 $\varepsilon \to 0$, 立得结论.

定理 2.1 的证明 对充分小的 $\theta > 0$, 我们将概率级数分为以下三部分

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\varphi'(n)P(|S_n|\ge\epsilon\sqrt{ES_n^2}\varphi^{\nu}(n))\\&\quad=\Bigg(\sum_{\epsilon^{1/2\nu}\varphi^{1/2}(n)<\theta}+\sum_{\theta\le\epsilon^{1/2\nu}\varphi^{1/2}(n)\le1/\theta}+\sum_{\epsilon^{1/2\nu}\varphi^{1/2}(n)>1/\theta}\Bigg)\varphi'(n)P(|S_n|\ge\epsilon\sqrt{ES_n^2}\varphi^{\nu}(n))\\&\quad\triangleq I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

接下来我们将分别估计 I_1, I_2 和 I_3, 需要说明的一点是: 在以下各步的证明中我们也将对应地考察 (2.1) 式等号右边的部分.

Step 1 对于 I_1, 不难得到

$$\epsilon^{\frac{1}{\nu}}I_1\le\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{\epsilon^{1/2\nu}\varphi^{1/2}(n)<\theta}\varphi'(n)\le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\int_1^{\varphi^{-1}(\theta^2\epsilon^{-1/\nu})}\varphi'(x)dx=C(\theta^2-\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\varphi(1)),\tag{3.4}$$

其中 $\varphi^{-1}(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的反函数. 对 (2.1) 式右边的部分, 注意到命题 3.1 的证明, 易得

$$\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\int_1^{\varphi^{-1}(\theta^2\epsilon^{-1/\nu})}\varphi'(x)\Psi(\epsilon\varphi^{\nu}(x))dx=\frac{1}{\nu}\int_{\epsilon\varphi^{\nu}(1)}^{\theta^{2\nu}}y^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(y)dy.\tag{3.5}$$

先让 $\epsilon\to0$, 再让 $\theta\to0$ 时, (3.4) 式和 (3.5) 式都趋向于零.

Step 2 不妨先来估计 I_3, 在引理 3.1 中取 $x=\epsilon\sqrt{ES_n^2}\varphi^{\nu}(n)$, $m>1$, 其中 m 为待定常数, 此时可得

$$\begin{aligned}&P(|S_n|\ge\epsilon\sqrt{ES_n^2}\varphi^{\nu}(n))\\&\quad\le nP(|X_1|\ge\epsilon\sigma\sqrt{n}\varphi^{\nu}(n)/m)+2e^m\left(1+\frac{(\epsilon\sqrt{ES_n^2}\varphi^{\nu}(n))^2}{nmEX_1^2}\right)^{-m}\triangleq I_{11}+I_{22}.\end{aligned}$$

对于 I_{11}, 注意到由 $\epsilon^{1/2\nu}\varphi^{1/2}(n)>1/\theta$, 易得 $n>\varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu})$, 记 $M(\theta,\epsilon,\nu)=[\varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu})]$, $[\cdot]$ 表示取最大整数, 所以有

$$\begin{aligned}&\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{n>M(\theta,\epsilon,\nu)}\varphi'(n)I_{11}=\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{n>M(\theta,\epsilon,\nu)}n\varphi'(n)P(|X_1|\ge\epsilon\sqrt{n}\sigma\varphi^{\nu}(n)/m)\\&\quad=\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{j>M(\theta,\epsilon,\nu)}\Bigg(\sum_{M(\theta,\epsilon,\nu)<n<j}n\varphi'(n)\Bigg)P(\epsilon\sqrt{j}\sigma\varphi^{\nu}(j)<m|X_1|\le\epsilon\sqrt{j+1}\sigma\varphi^{\nu}(j+1)\Big)\\&\quad\le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{j>M(\theta,\epsilon,\nu)}j\varphi(j)P(\epsilon\sqrt{j}\sigma\varphi^{\nu}(j)<m|X_1|\le\epsilon\sqrt{j+1}\sigma\varphi^{\nu}(j+1))\\&\quad\le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{j>M(\theta,\epsilon,\nu)}j^{1-\frac{q}{2}}\varphi^{1-q\nu}j^{\frac{q}{2}}\varphi^{q\nu}(j)\times P(\epsilon\sqrt{j}\sigma\varphi^{\nu}(j)<m|X_1|\le\epsilon\sqrt{j+1}\sigma\varphi^{\nu}(j+1))\\&\quad\le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\sum_{j>M(\theta,\epsilon,\nu)}\varphi^{\frac{2-q}{2\delta}+1-q\nu}(j)j^{\frac{q}{2}}\varphi^{q\nu}(j)P(j^{q/2}\varphi^{q\nu}(j)<m^q|X_1|^q/(\epsilon\sigma)^q\le(j+1)^{q/2}\varphi^{q\nu}(j+1))\\&\quad\le C\epsilon^{q+\frac{q-2}{2\nu\delta}}\theta^{2q\nu-2-\frac{2-q}{\delta}}E|X_1|^qI(m|X_1|>\epsilon\sqrt{M(\theta,\epsilon,\nu)}\sigma\varphi^{\nu}(M(\theta,\epsilon,\nu))).\end{aligned}\tag{3.6}$$

注意到 $q\ge2$, 所以需 $2q\nu-2-\frac{2-q}{\delta}\ge0$, 即 $\nu\ge\frac{1}{q}+\frac{2-q}{2q\delta}>0$, 另外第三个不等式可由条件 ($\mathrm{a}_2$) 得到, 在处理 $\sum_{M(\theta,\epsilon,\nu)<n<j}n\varphi'(n)\le j\varphi(j)$ 时, 我们使用了如下的结果

$$\int_a^b x\varphi'(x)dx=\int_a^b xd\varphi(x)=b\varphi(b)-a\varphi(a)-\int_a^b\varphi(x)dx\le b\varphi(b),\quad(b>a>0).$$

对于 I_{22}, 注意到 $m\ (>1)$ 的任意性及 ν 的取值, 我们总能做到让 $m\nu > \frac{1}{2}$, 所以不难得到

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n>M(\theta,\epsilon,\nu)} \varphi'(n) I_{22} = \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n>M(\theta,\epsilon,\nu)} \varphi'(n) 2e^m \left(1+\frac{(\epsilon\sqrt{ES_n^2}\varphi^\nu(n))^2}{nmEX_1^2}\right)^{-m} \\
&\quad \le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n>M(\theta,\epsilon,\nu)} \varphi'(n)\left(1+\frac{(\epsilon\varphi^\nu(n))^2}{m}\right)^{-m} \le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n>M(\theta,\epsilon,\nu)} \varphi'(n)(\epsilon\varphi^\nu(n)^2)^{-m} \\
&\quad \le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}-2m} \int_{M(\theta,\epsilon,\nu)}^{\infty} \varphi'(x)\varphi^{-2m\nu}(x)dx \le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}-2m}(\varphi(M(\theta,\epsilon,\nu)))^{-2m\nu+1} \\
&\quad \le C\theta^{4m\nu-2}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

对于 (2.1) 式右边的部分, 我们可写成

$$\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \int_{\varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu})}^{\infty} \varphi'(x)\Psi(\epsilon\varphi^\nu(x))dx = \frac{1}{\nu}\int_{\theta^{-2\nu}}^{\infty} y^{\frac{1}{\nu}-1}\Psi(y)dy, \qquad (3.8)$$

先让 $\epsilon \to 0$, 再令 $\theta \to 0$, 此时 (3.6)–(3.8) 式都是趋向于零的.

Step 3 要完成定理的证明, 由命题 3.1, 只需在区间 $\Pi \triangleq [\varphi^{-1}(\theta^2\epsilon^{-1/\nu}), \varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu})]$ 上, 证明下式

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n\in\Pi} \varphi'(n)|P(|S_n| \ge \epsilon\sqrt{n}\sigma\varphi^\nu(n)) - \Psi(\epsilon\varphi^\nu(n))| = 0. \qquad (3.9)$$

在条件 (b_1), (b_2) 下, 对同分布 NA 序列有 $S_n/\sqrt{ES_n^2} \xrightarrow{D} N(0,1)$, 记 $\Delta_n = \sup_x |P(|S_n|/\sqrt{ES_n^2} \ge x) - \Psi(x)|$, 由于 $\Psi(x)$ 是 R 上的连续函数, 所以 $\lim_{n\to\infty}\Delta_n = 0$, 此时可得

$$\begin{aligned}
&\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n\in\Pi} \varphi'(n)|P(|S_n| \ge \epsilon\sqrt{n}\sigma\varphi^\nu(n)) - \Psi(\epsilon\varphi^\nu(n))| \\
&\quad \le \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n\in\Xi} \varphi'(n)|P(|S_n| \ge \epsilon\sqrt{n}\sigma\varphi^\nu(n)) - \Psi(\epsilon\varphi^\nu(n))| \\
&\quad \le \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n\in\Xi} \varphi'(n)\Delta_n \le C\epsilon^{\frac{1}{\nu}}\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu}))\frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu}))}\sum_{n\in\Xi}\varphi'(n)\Delta_n \\
&\quad \le C\theta^{-2}\frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu}))}\sum_{n\in\Xi}\varphi'(n)\Delta_n \to 0, \quad \epsilon \to 0. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

由引理 3.2, 不难得到

$$\frac{1}{\varphi(\varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu}))}\sum_{n\in\Xi}\varphi'(n)\Delta_n \to 0, \quad \epsilon \to 0,$$

其中 $\Pi \subseteq \Xi \triangleq [1, \varphi^{-1}(\theta^{-2}\epsilon^{-1/\nu})]$, 综上定理 2.1 得证. 由定理 2.1, 我们立刻得到下面的推论:

推论 3.1 设 $\{X_n : n \ge 1\}$ 为非平稳同分布 NA 序列, $EX_1 = 0$, $EX_1^2 < \infty$ 且满足条件 (b_1), (b_2), 函数 $\varphi(x)$ 是满足条件 (a_1) 的缓变函数, 则对任意的 $\nu > 0$, 都有 (2.1) 式和 (2.2) 式成立.

证明 由定理 2.1 中的 step 2, 再根据缓变函数如下的性质 (p2) 即得.

注 8 设 $L(x)$ 为缓变函数, 文 [15] 关于 $L(x)$ 几个简单性质:

(p1) 对任意的 $a > 0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{L(x+a)}{L(x)} = 1$;

(p2) 对任意的 $\delta > 0$, $\lim_{x\to\infty} x^\delta L(x) = \infty; \lim_{x\to\infty} x^{-\delta}L(x) = 0$;

(p3) 当 $k \to \infty$, $\sup_{2^k \le x \le 2^{k+1}} \frac{L(x)}{L(2^k)} \to 1$.

推论 3.2 设非平稳同分布 NA 序列 $\{X_n : n \geq 1\}$ 满足推论 3.1 的条件且 $EX_1^2 = 1$, 取 $\varphi(n) = \ln^{\frac{1}{2\nu}} n$, 则对任意的 $\nu > 0$, 有

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{\frac{1}{2\nu}-1}(n)}{n} P(|S_n| \geq \epsilon n^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} n) = \frac{1}{2\nu} E|N|^{\frac{1}{\nu}}.$$

注 9 特别地, 取 $\nu = \frac{1}{2}$, 推论 3.2 包含了独立场合下文 [16, 定理 3].

定理 2.2 的证明 事实上我们只需证明定理 2.1 中的 step 2 部分, 继续使用定理 2.1 中的一些记号, 注意到 $f(x), g(x)$ 的定义, 可得

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n > M(\theta,\epsilon,\nu)} \varphi'(n) I_{11} &= \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n > M(\theta,\epsilon,\nu)} n\varphi'(n) P(|X_1| \geq \epsilon \sqrt{n} \sigma \varphi^{\nu}(n)/m) \\
&= \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{j > M(\theta,\epsilon,\nu)} \bigg(\sum_{M(\theta,\epsilon,\nu) < n < j} n\varphi'(n) \bigg) P(\epsilon \sqrt{j} \sigma \varphi^{\nu}(j) < m|X_1| \leq \epsilon \sqrt{j+1} \sigma \varphi^{\nu}(j+1)) \\
&\leq C\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{j > M(\theta,\epsilon,\nu)} j^2 \varphi'(j) P(\epsilon \sqrt{j} \sigma \varphi^{\nu}(j) < m|X_1| \leq \epsilon \sqrt{j+1} \sigma \varphi^{\nu}(j+1)) \\
&\leq C\epsilon^{\frac{1}{\nu}} E f(g^{-1}((\epsilon\sigma)^{-1} m|X_1|)) I(m|X_1| > \epsilon \sqrt{j} \sigma \varphi^{\nu}(j)) \\
&\leq C\epsilon^{\frac{1}{\nu}-2(1+\beta)} E f(g^{-1}(|X_1|)) I(m|X_1| > \epsilon \sqrt{M(\theta,\epsilon,\nu)} \sigma \varphi^{\nu}(M(\theta,\epsilon,\nu))).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

对于 (3.11) 式, 事实上由 $x^{\frac{1}{2}} \varphi^{\nu}(x) \uparrow \infty$ $(x \to \infty)$, 可得 $\frac{x^{\frac{1}{2}}}{g(x)} \downarrow 0$, 进一步有 $\frac{g^{-1}(x)}{x^2} \downarrow$, 所以我们不难得到 $g^{-1}(C\epsilon^{-1}x) \leq C^2\epsilon^{-2} g^{-1}(x)$, 注意到 $x\varphi'(x)$ 为缓变函数, 由性质 (p2), 对任意的 $\beta > 0$, 有 $x^{-\beta} x\varphi'(x) = x^{-(1+\beta)} f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$, 所以可得

$$f(C^2\epsilon^{-2}x) \leq C(C^2\epsilon^{-2})^{1+\beta} f(x).$$

再由 β 的任意性, 只要我们选取适当的 β, 就能保证 $\frac{1}{\nu} - 2(1+\beta) > 0$.

定理 2.3 的证明 类似于定理 2.2 的证明, 我们只需估计定理 2.1 中的 step 2 部分.

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n > M(\theta,\epsilon,\nu)} \varphi'(n) I_{11} &= \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{n > M(\theta,\epsilon,\nu)} n\varphi'(n) P(|X_1| \geq \epsilon \sqrt{n} \sigma \varphi^{\nu}(n)/m) \\
&= \epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{j > M(\theta,\epsilon,\nu)} \bigg(\sum_{M(\theta,\epsilon,\nu) < n < j} n\varphi'(n)) P(\omega_j < |X_1| \leq \omega_{j+1} \bigg) \\
&\leq C\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{j > M(\theta,\epsilon,\nu)} j\varphi(j) P(\omega_j < |X_1| \leq \omega_{j+1}) \\
&\leq C\epsilon^{\frac{1}{\nu}} \sum_{j > M(\theta,\epsilon,\nu)} j\varphi^{2\nu}(j) \varphi^{1-2\nu}(j) P(\omega_j < |X_1| \leq \omega_{j+1}) \\
&\leq Cm^2 \epsilon^{\frac{1}{\nu}-2} \sum_{j > M(\theta,\epsilon,\nu)} \omega_j^2 (\varphi(\epsilon^{-2}\omega_j^2))^{1-2\nu} P(\omega_j < |X_1| \leq \omega_{j+1}) \\
&\leq C\epsilon^{\frac{1}{\nu}-2\beta(1-2\nu)-2} EX_1^2 (\varphi(X_1^2))^{1-2\nu} I(|X_1| > (\epsilon\sigma/m) \sqrt{M(\theta,\epsilon,\nu)} \varphi^{\nu}(M(\theta,\epsilon,\nu))),
\end{aligned}$$

其中 $\omega_j = (\epsilon\sigma/m)\sqrt{j}\varphi^{\nu}(j)$, 注意到 $\varphi(x)$ 为缓变函数, 由性质 (p2), 对任意的 $\beta > 0$, 我们有 $x^{-\beta}\varphi(x) \downarrow 0$, 进一步有 $(\epsilon^{-2}x)^{-\beta}\varphi(\epsilon^{-2}x) \leq x^{-\beta}\varphi(x)$, 所以对任意的 $\nu > 0$, 可选择适当的 $\beta (> 0)$, 使得 $\frac{1}{\nu} - 2\beta(1-2\nu) - 2 \geq 0$, 定理证毕.

推论 3.3 设 $\{X_n : n \geq 1\}$ 为非平稳同分布 NA 序列, $EX_1 = 0$ 且满足条件 (b_1) 与 (b_2), $\varphi(x) = \ln^2 x$, 若 $EX_1^2 \ln(1+|X_1|) < \infty$, 则对任意的 $\nu > 0$, 都有 (2.1) 式和 (2.2) 式成立.

证明 由定理 2.3 不难得证.

4 非同分布情形的结果

证明方法与同分布情形类似, 所以我们将不加证明地给出下列结果, 首先给出一个条件:

(c_1) 对任意的 $\epsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{n}EX_k^2I(|X_k|\ge\epsilon\sigma_n)=0,$$

且存在正整数列 $n_k\uparrow\infty$, 满足 $(n_k-n_{k-1})/n_k\to 0$, $k\to\infty$, 并使得 $\lim_{k\to\infty}ES^2_{n_{k-1},n_k-n_{k-1}}/n_k-n_{k-1}=\sigma^2>0$, 其中 $\sigma_n^2=\mathrm{Var}\ S_n$.

定理 4.1 设 $\{X_n : n\ge 1\}$ 为非平稳非同分布 NA 序列, $EX_n=0, \sup_{n\in N}E|X_n|^q<\infty$ $(\exists q\ge 2)$ 且条件 (b_1), (c_1) 成立, 函数 $\varphi(x)$ 满足条件 (a_1), (a_2), 则对任意的 $\nu\ge\frac{1}{q}+\frac{2-q}{2q\delta}>0$, 都有 (2.1) 式和 (2.2) 式成立.

定理 4.2 设 $\{X_n : n\ge 1\}$ 为非平稳非同分布 NA 序列, $EX_n=0$, $\sup_{n\in N}EX_n^2<\infty$ 且条件 (b_1), (c_1) 成立, 函数 $\varphi(x)$ 满足条件 (a_1) 且 $x\varphi'(x)$ 为缓变函数, 若 $\sup_{n\in N}Ef(g^{-1}(|X_n|))<\infty$, 则对任意的 $\nu\in(0,\frac{1}{2})$, 都有 (2.1) 式和 (2.2) 式成立, 其中 $f(x)=x^2\varphi'(x)$, $g(x)=x^{\frac{1}{2}}\varphi^{\nu}(x)$.

注 10 (c_1) 是一般 NA 序列中心极限定理成立的一个充分条件, 参见文 [17].

致谢 作者对审稿老师所提出的宝贵意见和建议表示衷心地感谢!

参 考 文 献

[1] Alam K., Saxena K. M. L., Positive dependence in multivariate distributions, *Comm. Statist.*, 1981, **A10**: 1183–1196.
[2] Joag-Dev K., Proschan F., Negatively associated of random variables with application, *Ann. Statist.*, 1983, **11**(1): 286–295.
[3] Matula P., A note on the almost sure convergence of sums of neatively dependent random variables, *Statist. Probab. Lett.*, 1992, **15**: 209–213.
[4] Roussas G. G., Asymptotic nomality of random fields of positively and negatively associated processes, *J. Multiv. Anal.*, 1994, **15**: 209–213.
[5] Su C., Qin Y. S., Two limit theorems of NA random variables, *Chinese Science Bulletin*, 1997, **42**(3): 243–246 (in Chinese).
[6] Shao Q. M., Su C., The law of the iterated logarithm for negatively associated random variables, *Stochastic Process. Appl.*, 1999, **83**: 139–148.
[7] Heyde C. C., A supplement to the strong law of large numbers, *J. Appl. Probab.*, 1975, **12**: 173–175.
[8] Wang Y. B., On asymptotic for class of small parameters sequences of B-value dependent random variables, *Acta Math. Appl. Sinica*, 1995, **18**(3): 344–352 (in Chinese).
[9] Zhang L. X., Some limit results on the law of the iterated logarithm of NA sequences, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2004, **47**(3): 541–552.
[10] Cheng F. Y., Wang Y. B., Precise asymptotics of partial sums for IID and NA sequences, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2004, **47**(5): 965–972.
[11] Su C., Chi X., Some results on CLT for nonstationary NA sequences, *Acta math. Appl. Sinica*, 1998, **21**(1): 9–21 (in Chinese).
[12] Gut A., Spătaru A., Precise asymptotics in the law of the itreated logarithm, *Ann. Probab.*, 2000, **28(4)**: 1870–1883.
[13] Su C., Zhao L. C., Wang Y. B., Moment inequalities and weak convergence for negatively associated sequences, *Science in China, Ser. A*, 1996, **26**(12): 1091–1099.
[14] Petrov V. V., Almost sure convergence, New York: Academic Press, 1974.
[15] Lu C. R., Lin Z. Y., Limit theory of mixing and dependent random variables, Beijing: Science Press, 1997 (in Chinese).
[16] Gut A., Spătaru A., Precise asymptotics in the Baum-Katz and Davis laws of large numbers, *J. Math. Anal. Appl.*, 2000, **248**: 233–246.
[17] Zhang L. X., Central limit theorems for asymptotically negatively associated random fields, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2000, **16**(4): 691–710.