文章编号: 0583-1431(2007)02-0363-10 **文献标识码: A**

泛函积分方程的正解与应用

杨志林

青岛理工大学理学院 青岛 266033
E-mail: zhilinyang@qtech.edu.cn

魏耿平

湖南怀化学院数学系 怀化 418008
E-mail: weigengping@yahoo.com.cn

摘 要 运用锥拉伸与压缩不动点定理, 研究一类泛函积分方程的正解. 把所得结果应用于研究常微分方程积分边值问题正解的存在性, 所得结果推广和本质上改进了马如云等作者最近的一些结果.

关键词 泛函积分方程; 正解; 积分边值问题
MR(2000) 主题分类 45G10, 45M20, 34B08, 47H07
中图分类 O715.15

Positive Solutions of a Functional Integral Equation and Applications

Zhi Lin YANG

Department of Mathematics, Qingdao Technological University, Qingdao 266033*, P. R. China*
E-mail: zhilinyang@qtech.edu.cn

Geng Ping WEI

Department of Mathematics, Huaihua College, Huaihua 418008*, P. R. China*
E-mail: weigengping@yahoo.com.cn

Abstract We study the existence of positive solutions for a functional integral equation using a fixed point theorem of expansion and compression type in a cone. Finally the main results are used to establish some existence results for positive solutions of integral boundary value problems for ordinary differential equations. The results presented substantially generalize and improve some recent ones due to Ma et al.

Keywords functional integral equation; positive solution; integral boundary value problem
MR(2000) Subject Classification 45G10, 45M20, 34B08, 47H07
Chinese Library Classification O715.15

0 引言

本文研究如下泛函积分方程的正解的存在性

$$u(t)=\int_0^1 K(t,s)g(s)f(s,u(s))ds+\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau), \tag{1}$$

收稿日期: 2005-07-08; 修改日期: 2006-03-30
基金项目: 山东省教育厅科技计划资助项目 (J06P05)

其中 $K \in C([0,1] \times [0,1],\ \mathbb{R}^+)$ ($\mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$), $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}^+,\ \mathbb{R}^+)$, $g \in C([0,1],\ \mathbb{R}^+)$, $g(t) \not\equiv 0$; $\varphi_i \in C[0,1]$ 满足 $\varphi_i(t) > 0,\ \forall\, t \in (0,1)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$; α_i 在 [0,1] 上单调不减, 在 [0, 1) 上右连续, 在 $t = 1$ 处左连续, 且 $\alpha_i(0) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$; $\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau)$ 表示 Riemann–Stieltjes 积分 $(i = 1,2,\ldots,n)$.

若 $\alpha_i \equiv 0\,(i = 1,2,\ldots,n)$, $g(t) \equiv 1$, 则 (1) 变成 [0,1] 上的 Hammerstein 非线性积分方程

$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)f(s,u(s))ds, \tag{2}$$

从而方程 (1) 可视为方程 (2) 的一个扰动. 众所周知, 方程 (2) 对应于二阶常微分方程 Sturm–Liouville 两点边值问题, 因而已有丰富的研究文献 [1], 最近的结果可见李福义和刘兆理 [2], 刘兆理和李福义 [3]. 另一方面, 一类常微分方程积分边值问题可导出方程 (1) (参见本文第 3 节). 因此研究方程 (1) 是研究积分边值问题 (多点边值问题是其特例) 的基础, 这样的研究工作自然是有意义的. 我们首先研究方程 (1) 的正解的存在性, 然后把所得结果应用于建立一类积分边值问题的正解的存在性, 其中建立的定理将推广和本质改进马如云和 Thompson [4], 马如云 [5, 6], 马如云和王海燕 [7], 张国伟和孙经先 [8] 最近的一些结果. 需要指出的是, 在研究积分边值问题时, 我们并不需要构造新的 Green 函数, 因此本文在方法上不同于已知文献; 另外, 本文中的方法也可用来研究带非线性边界条件的积分边值问题正解的存在性 (参见作者文章 [9]).

1 预备知识

设 $E = C([0,1],\mathbb{R})$, $||u|| = \max_{t\in[0,1]} |u(t)|$, $P = \{u \in E : u(t) \geq 0,\ \forall\, t \in [0,1]\}$, 则 $(E, ||\cdot||)$ 为实 Banach 空间, P 是它的一个锥. E 的共轭空间为 [10]

$$E^* = \{v : v \text{ 在 } [0,1] \text{ 上具有有界变差, 在 } [0,1) \text{ 上右连续, } v(0) = 0\},$$

E, E^* 之间的对偶为

$$\langle v,u\rangle = \int_0^1 u(\tau)dv(\tau), \quad \forall\, u \in E, \quad v \in E^*,$$

P 的共轭锥为

$$P^* = \{v \in E^* : v \text{ 在 } [0,1] \text{ 上单调不减}\}.$$

注意到方程 (1) 中出现的 $\alpha_i \in P^*$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. 定义

$$(Au)(t) = \int_0^1 K(t,s)g(s)f(s,u(s))ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau), \tag{3}$$

则 $A : P \to P$ 是全连续算子. 称 $u \in E$ 为方程 (1) 的一个正解, 如果 $u \in P\backslash\{0\} \cap C^2[0,1]$ 且 u 是方程 (1) 的一个解. 显然 u 是方程 (1) 的一个正解, 当且仅当 $u \in P\backslash\{0\}$ 是由 (3) 式定义的算子 A 的不动点. 定义

$$(Lu)(t) = \int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)ds, \tag{4}$$

则 $L : E \to E$ 为全连续正线性算子 $(L(P) \subset P)$, L 的共轭算子 $L^* : E^* \to E^*$ 为

$$(L^*v)(t) = \int_0^t ds \int_0^1 K(\tau,s)g(s)dv(\tau).$$

本文恒设以下条件满足:

(H1) 由 (4) 式定义的全连续正线性算子 L 的谱半径 $r(L)>0$, 且存在 $h\in C[0,1]$, $h(t)>0$, $\forall\, t\in(0,1)$, 使得

$$K(t,s)\geq h(t)K(\tau,s),\quad \forall\, t,\tau,\, s\in[0,1]. \tag{5}$$

注 1 在本文定理 1 和定理 2 的证明中, 需要对方程 (1) 的正解做先验估计, 而这又需要用到不等式 (5). 显然, 若 $K\in C[[0,1]\times[0,1],(0,+\infty)]$, 取

$$h(t)\equiv\frac{\min_{0\leq t,s\leq 1}K(t,s)}{\max_{0\leq t,s\leq 1}K(t,s)}\in(0,1],$$

则不等式 (5) 成立. 此外, 对一类二阶常微分方程 Sturm–Liouville 问题的 Green 函数 $K(t,s)$, 存在满足 (H1) 的函数 $h(t)$, 使得不等式 (5) 成立 (见本文第 3 节).

对任意 $\xi>0$, 定义

$$(B_\xi u)(t)=\xi\int_0^1K(t,s)g(s)u(s)ds+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\int_0^1u(\tau)d\alpha_i(\tau). \tag{6}$$

由 $g\in P\backslash\{0\}$ 和 (H1) 知, B_ξ 为全连续正线性算子, 且谱半径 $r(B_\xi)\geq\xi r(L)>0$, 从而由 Krein–Rutman 定理 [11], 存在 $p_\xi\in P\backslash\{0\}$ 和 $q_\xi\in P^*\backslash\{0\}$, 使得

$$B_\xi p_\xi=r(B_\xi)p_\xi,\quad B_\xi^*q_\xi=r(B_\xi)q_\xi,\quad q_\xi(1)=1, \tag{7}$$

其中 $B_\xi^*:E^*\to E^*$ 为 B_ξ 的共轭算子, 定义为

$$(B_\xi^*v)(t)=\xi\int_0^tds\int_0^1K(\tau,s)g(s)dv(\tau)+\sum_{i=1}^n\alpha_i(t)\int_0^1\varphi_i(\tau)dv(\tau). \tag{8}$$

注意到 α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ 在 $[0,1)$ 上右连续, 在 $t=1$ 左连续, 以及 P^* 的定义和 (7) 式, 易知 q_ξ 在 $[0,1)$ 上右连续, 在 $t=1$ 左连续, 且 $\lim_{t\to1^-}q_\xi(t)=1$, $\lim_{t\to0^+}q_\xi(t)=0$. 从而由 $h(t)>0$, $\varphi_i(t)>0$, $\forall\, t\in(0,1)$ 知, Riemann–Stieltjes 积分

$$\int_0^1h(t)dq_\xi(t)>0,\quad \int_0^1\varphi_i(t)dq_\xi(t)>0\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

现定义

$$P_\xi=\left\{u\in P:\int_0^1u(t)dq_\xi(t)\geq\omega_\xi||u||\right\},$$

其中

$$\omega_\xi=\min\left\{\int_0^1h(t)dq_\xi(t),\,\frac{1}{\|\varphi_i\|}\int_0^1\varphi_i(t)dq_\xi(t),\,i=1,2,\ldots,n\right\}>0.$$

容易验证 P_ξ 为 E 的一个锥. 由 ω_ξ 的取法知, $\varphi_i\in P_\xi$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

引理 1 若 (H1) 成立, 则对任何 $\xi>0$, $B_\xi(P)\subset P_\xi$.

证明 显然证明 $L(P)\subset P_\xi$ 即可. 事实上, 由 (H1) 和 (7) 式成立, 可知

$$\begin{aligned}\int_0^1(Lu)(\tau)dq_\xi(\tau)&=\int_0^1dq_\xi(\tau)\int_0^1K(\tau,s)g(s)u(s)ds=\int_0^1g(s)u(s)ds\int_0^1K(\tau,s)dq_\xi(\tau)\\&\geq\int_0^1g(s)u(s)ds\int_0^1K(t,s)h(\tau)dq_\xi(\tau)=\int_0^1K(t,s)g(s)u(s)ds\int_0^1h(\tau)dq_\xi(\tau)\\&\geq\omega_\xi(Lu)(t),\quad\forall\, u\in P,\quad t\in[0,1].\end{aligned}$$

因此 $\int_0^1(Lu)(\tau)dq_\xi(\tau)\geq\omega_\xi||Lu||$, $\forall\, u\in P$, 即 $L(P)\subset P_\xi$. 证毕.

注 2 由于

$$\int_0^1K(t,s)g(s)f(s,u(s))ds=(LFu)(t),\quad t\in[0,1],$$

其中 $F: P \to P$ 为连续有界算子,$(Fu)(t) = f(t, u(t))$. 根据引理 1, 由 (3) 式定义的全连续算子 A 满足 $A(P) \subset P_\xi$, 特别地 $A(P_\xi) \subset P_\xi$. 因此我们的工作将主要在 P_ξ 中进行.

以下不动点定理属于 Krasnoselskii 和 Zabreiko, 称为锥拉伸与压缩不动点定理, 在本文的证明中至关重要.

引理 2[12] 设 E 为实 Banach 空间, W 是 E 的一个锥. 设 $A: (\overline{T}_R \backslash T_r) \cap W \to W$ 是全连续算子, 其中 $0 < r < R$, $T_\rho = \{x \in E: ||x|| < \rho\}$. 如果

(1) $Au \not\leq u$, $\forall u \in \partial T_r \cap W$, $Au \not\geq u$, $\forall u \in \partial T_R \cap W$, 或者

(2) $Au \not\geq u$, $\forall u \in \partial T_r \cap W$, $Au \not\leq u$, $\forall u \in \partial T_R \cap W$,

则 A 在 $(T_R \backslash \overline{T}_r) \cap W$ 上至少有一个不动点.

引理 3[13] 设 E 为实 Banach 空间, W 为 E 的全锥 [14] (即 W 为 E 的锥, 且满足 $\overline{W - W} = E$), $B: E \to E$ 为有界正线性算子, $r(B) < 1$. 若 $w \in E$, $w_0 \in E$ 满足 $w \leq Bw + w_0$, 则 $w \leq (I - B)^{-1} w_0$, 此处 $(I - B)^{-1}$ 为 $I - B$ 的逆算子.

2 主要结果

以下是本文中要用到的条件:

(H2) 存在 $\xi_1 > 0$, $C_1 > 0$, 使得

$$f(t, u) \geq \xi_1 u - C_1, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in [0, 1], \tag{9}$$

并且 $r(B_{\xi_1}) > 1$.

(H3) 存在 $\xi_2 > 0$, $r_1 > 0$, 使得

$$f(t, u) \leq \xi_2 u, \quad \forall u \in [0, r_1], \quad t \in [0, 1]. \tag{10}$$

并且 $r(B_{\xi_2}) < 1$.

(H4) 存在 $\xi_3 > 0$, $C_3 > 0$, 使得

$$f(t, u) \leq \xi_1 u - C_3, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad t \in [0, 1], \tag{11}$$

并且 $r(B_{\xi_3}) < 1$.

(H5) 存在 $\xi_4 > 0$, $r_2 > 0$, 使得

$$f(t, u) \geq \xi_4 u, \quad \forall u \in [0, r_2], \quad t \in [0, 1]. \tag{12}$$

并且 $r(B_{\xi_4}) > 1$.

(H6) 存在 $\mu > 0$, 使得 $f(t, u)$ 在 $[0, 1] \times [0, \mu]$ 上为 u 的不减函数, 且满足

$$\int_0^1 K(t, s) g(s) f(s, \mu) ds + \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i(1) \varphi_i(t) < \mu, \quad \forall t \in [0, 1].$$

注 3 在以上条件 (H2)–(H5) 中, 都涉及到由 (6) 式定义的全连续线性算子 B_ξ 的谱半径 $r(B_\xi)$. 这里给出两个条件, 其中一个是 $r(B_\xi) > 1$ 的充分条件, 一个是 $r(B_\xi) < 1$ 的充分条件.

(**P**) 若存在 $\phi \in P \backslash \{0\}$ 和常数 $\lambda > 1$, 使得

$$\xi \int_0^1 K(t, s) g(s) \phi(s) ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \int_0^1 \phi(\tau) d\alpha_i(\tau) \geq \lambda \phi(t)$$

在 $[0, 1]$ 上成立, 则 $r(B_\xi) > 1$.

(**Q**) 若 $\xi \int_0^1 K(t, s) g(s) ds + \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \alpha_i(1) < 1$ 在 $[0, 1]$ 上成立, 则 $r(B_\xi) < 1$.

定理 1 若 (H1)–(H3) 满足, 则方程 (1) 至少有一个正解.

证明 由 (H2) 满足知

$$\begin{aligned}(Au)(t) &\geq \xi_1\int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)ds+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau)-C_2\\ &=(B_{\xi_1}u)(t)-C_2,\quad \forall\, u\in P,\quad t\in[0,1],\end{aligned}$$

其中 $C_2=\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 K(t,s)g(s)ds>0$. 令 $N_1=\{u\in P_{\xi_1}: u\geq Au\}$, 则 N_1 为 P_{ξ_1} 中有界集. 事实上, 若 $u\in P_{\xi_1}$, 则

$$u(t)\geq \xi_1\int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)ds+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau)-C_2,\quad t\in[0,1],$$

两边用 $dq_{\xi_1}(t)$ 相乘, 然后在 [0,1] 上积分, 并注意到 (7) 式, 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(t)dq_{\xi_1}(t) &\geq \xi_1\int_0^1 dq_{\xi_1}(t)\int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)ds+\sum_{i=1}^n\int_0^1\varphi_i(t)dq_{\xi_1}(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau)-C_2\\ &=\int_0^1 u(s)d\left(\xi_1\int_0^s d\tau\int_0^1 K(t,\tau)g(\tau)dq_{\xi_1}(t)\right)\\ &\quad+\sum_{i=1}^n\int_0^1 u(\tau)d\left(\alpha_i(\tau)\int_0^1\varphi_i(t)dq_{\xi_1}(t)\right)-C_2\\ &=\langle B_{\xi_1}^*q_{\xi_1},u\rangle-C_2=r(B_{\xi_1})\langle q_{\xi_1},u\rangle-C_2\\ &=r(B_{\xi_1})\int_0^1 u(t)dq_{\xi_1}(t)-C_2,\end{aligned}\tag{13}$$

从而根据条件 $r(B_{\xi_1})>1$,

$$\int_0^1 u(t)dq_{\xi_1}(t)\leq\frac{C_2}{r(B_{\xi_1})-1},\quad \forall\, u\in N_1.$$

由此得

$$\|u\|\leq\frac{C_2}{\omega_{\xi_1}(r(B_{\xi_1})-1)},\quad \forall\, u\in N_1.$$

即 N_1 是有界集. 取 $R_1>\sup_{u\in N_1}\|u\|$, 我们有

$$u\not\geq Au,\quad \forall\, u\in\partial T_{R_1}\cap P_{\xi_1}.\tag{14}$$

另一方面, 由 (H3) 可知

$$\begin{aligned}(Au)(t) &\leq \xi_2\int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau)\\ &=(B_{\xi_2}u)(t),\quad \forall\, u\in\overline{T}_{r_1}\cap P.\end{aligned}$$

令 $N_2=\{u\in\overline{T}_{r_1}\cap P: u\leq Au\}$, 则对任何 $u\in N_2$, 有 $u\leq B_{\xi_2}u$. 注意到 $r(B_{\xi_2})<1$, 根据引理 3, 我们有 $u=0$, 因此

$$u\not\leq Au,\quad \forall\, u\in\partial T_{r_1}\cap P,$$

从而更有

$$u\not\leq Au,\quad \forall\, u\in\partial T_{r_1}\cap P_{\xi_1}.$$

由上式和 (14) 式, 根据引理 2, A 在 $(T_{R_1}\backslash\overline{T}_{r_1})\cap P_{\xi_1}$ 上至少有一个不动点. 等价地, 方程 (1) 至少有一个正解. 证毕.

定理 2 若 (H1), (H4), (H5) 满足, 则方程 (1) 至少有一个正解.

证明 由 (H4) 知

$$\begin{aligned}(Au)(t) &\le \xi_3\int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)ds+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau)+C_3\int_0^1 K(t,s)g(s)ds\\ &=(B_{\xi_3}u)(t)+C_3u_0(t),\quad \forall\, u\in P,\quad t\in[0,1]\end{aligned}$$

其中 $u_0\in P\backslash\{0\}$, $u_0(t)=\int_0^1 K(t,s)g(s)ds$. 令 $N_3=\{u\in P: u\le Au\}$, 则 N_3 为 P 中有界集. 事实上, 若 $u\in N_3$, 则

$$u\le B_{\xi_3}u+C_3u_0,$$

注意到 $r(B_{\xi_3})<1$, 根据引理 3, 有

$$u\le C_3(I-B_{\xi_3})^{-1}u_0.$$

从而

$$\|u\|\le\|C_3(I-B_{\xi_3})^{-1}u_0\|,\quad \forall\, u\in N_3,$$

即 N_3 为 P 中有界集. 任取 $R_2>\sup_{u\in N_3}||u||$, 我们有

$$u\not\le Au,\quad \forall\, u\in\partial T_{R_2}\cap P. \tag{15}$$

另一方面, 由 (H5) 知

$$\begin{aligned}(Au)(t) &\ge \xi_4\int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau)\\ &=(B_{\xi_4}u)(t),\quad \forall\, u\in\overline{T}_{r_2}\cap P,\quad t\in[0,1].\end{aligned}\tag{16}$$

令 $N_4=\{u\in\overline{T}_{r_2}\cap P_{\xi_4}: u\ge Au\}$, 则 $N_4=\{0\}$. 事实上, 若 $u\in N_4$, 则

$$u(t)\ge\xi_4\int_0^1 K(t,s)g(s)u(s)+\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)\int_0^1 u(\tau)d\alpha_i(\tau),\quad t\in[0,1],$$

两边以 $dq_{\xi_4}(t)$ 相乘, 然后在 [0,1] 上积分, 类似于 (13) 式, 可以得到

$$\int_0^1 u(t)dq_{\xi_4}(t)\ge r(B_{\xi_4})\int_0^1 u(t)dq_{\xi_4}(t),$$

从而根据条件 $r(B_{\xi_4})>1$, $\int_0^1 u(t)dq_{\xi_4}(t)=0$, $u\equiv 0$. 由此得到, $N_4=\{0\}$, 故

$$u\not\ge Au,\quad \forall\, u\in\partial T_{r_2}\cap P_{\xi_4}. \tag{17}$$

再由 (15) 式可知

$$u\not\le Au,\quad \forall\, u\in\partial T_{R_2}\cap P_{\xi_4}.$$

根据引理 2, A 在 $(T_{R_2}\backslash\overline{T}_{r_2})\cap P_{\xi_4}$ 中至少有一个不动点. 从而方程 (1) 至少有一个正解. 证毕.

定理 3 若 (H1), (H2), (H5), (H6) 满足, 则方程 (1) 至少有两个正解.

证明 由 (H2), (H5) 可知存在 $R_1>\mu$, $r_2\in(0,\mu)$, 使得 (14), (17) 式成立 (参看定理 1, 2 的证明). 根据 (H6), 有

$$\begin{aligned}(Au)(t) &\le \int_0^1 K(t,s)g(s)f(s,\mu)ds+\mu\sum_{i=1}^n\alpha_i(1)\varphi_i(t)\\ &<\mu=\|u\|,\quad \forall\, u\in\partial T_\mu\cap P,\quad t\in[0,1],\end{aligned}$$

从而 $\|Au\|<\|u\|$, $\forall\, u\in\partial T_\mu\cap P$. 更进一步, 有

$$u\not\le Au,\quad \forall\, u\in\partial T_\mu\cap P_{\xi_1}, \tag{18}$$

$$u\not\le Au,\quad \forall\, u\in\partial T_\mu\cap P_{\xi_4}. \tag{19}$$

根据 (14), (17) 式和引理 2, A 在 $(T_{R_1}\backslash\overline{T}_\mu)\cap P_{\xi_1}$ 上至少有一个不动点. 同理, A 在 $(T_\mu\backslash\overline{T}_{r_2})\cap P_{\xi_4}$ 上至少有一个不动点, 即方程 (1) 至少有两个正解. 证毕.

3 积分边值问题的正解

本节考虑如下积分边值问题

$$\begin{cases} -(au')'+bu=g(t)f(t,u), \\ \cos\gamma_0 u(0)-\sin\gamma_0 u'(0)=\displaystyle\int_0^1 u(\tau)d\alpha_1(\tau), \\ \cos\gamma_1 u(1)+\sin\gamma_1 u'(1)=\displaystyle\int_0^1 u(\tau)d\alpha_2(\tau), \end{cases} \tag{20}$$

其中 $a\in C^1([0,1],(0,+\infty))$, $b\in P$, $\gamma_i\in[0,\pi/2](i=0,1)$. f, g, $\alpha_i(i=1,2)$ 与引言中方程 (1) 中相同. 问题 (20) 的未扰动问题是

$$\begin{cases} -(au')'+bu=g(t)f(t,u), \\ \cos\gamma_0 u(0)-\sin\gamma_0 u'(0)=0, \\ \cos\gamma_1 u(1)+\sin\gamma_1 u'(1)=0, \end{cases} \tag{21}$$

文 [2, 3] 在 $g(t)\equiv 1$ 的条件下研究了这个问题, 得到了最优结果. 若 α_i $(i=1,2)$ 为 [0, 1] 上阶梯函数, 则 (20) 成为多点边值问题, 为很多作者所研究 (参见文 [4–8, 15–20] 及其所引文献). 因此, 问题 (20) 包含 Sturm–Lioville 两点边值问题, 三点边值问题和多点边值问题作为特例. 本节恒假设如下条件成立:

(H7) $u(t)\equiv 0$ 是齐次边值问题的唯一 C^2 解:

$$\begin{cases} -(au')'+bu=0, \\ \cos\gamma_0 u(0)-\sin\gamma_0 u'(0)=0, \\ \cos\gamma_1 u(1)+\sin\gamma_1 u'(1)=0. \end{cases} \tag{22}$$

令 $k_1(t)$, $k_2(t)$ 分别是如下初值问题的唯一 C^2 解

$$\begin{cases} -(ak_1')'+bk_1=0, \\ k_1(0)=\sin\gamma_0, \\ k_1'(0)=\cos\gamma_0, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} -(ak_2')'+bk_2=0, \\ k_2(1)=\sin\gamma_1, \\ k_2'(1)=-\cos\gamma_1, \end{cases} \tag{24}$$

则 [21]

$$k_1'(t)\geq 0,\quad k_1(t)>0,\quad \forall\, t\in(0,1],$$

$$k_2'(t)\leq 0,\quad k_2(t)>0,\quad \forall\, t\in[0,1),$$

$$w=a(k_1'k_2-k_1k_2') \text{ 为正常数.}$$

令

$$K(t,s)=\frac{1}{w}\begin{cases} k_1(t)k_2(s), & 0\leq t\leq s\leq 1, \\ k_1(s)k_2(t), & 0\leq s\leq t\leq 1, \end{cases} \tag{25}$$

则 $K\in C([0,1]\times[0,1],\mathbb{R}^+)$, 且

$$K(t,s)\geq h(t)K(\tau,s),\quad \forall\, t,\tau,s\in[0,1],$$

其中

$$h(t)=\frac{1}{M}\min\{k_1(t),k_2(t)\},\quad M=\max\{||k_1||,||k_2||\}^{[21]}.$$

对任何 $\sigma \in C[0,1]$, $u \in C^2[0,1]$ 是边值问题

$$\begin{cases} -(au')' + bu = \sigma, \\ \cos\gamma_0 u(0) - \sin\gamma_0 u'(0) = 0, \\ \cos\gamma_1 u(1) + \sin\gamma_1 u'(1) = 0 \end{cases} \tag{26}$$

的解当且仅当 [21]

$$u(t) = \int_0^1 K(t,s)\sigma(s)ds.$$

令

$$\varphi_1(t) = \frac{k_2(t)}{\cos\gamma_0 k_2(0) - \sin\gamma_0 k_2'(0)}, \quad \varphi_2(t) = \frac{k_1(t)}{\cos\gamma_1 k_1(1) + \sin\gamma_1 k_1'(1)}, \tag{27}$$

则易验证, 对任何 $\sigma \in C[0,1]$, $u_1 \in C^2[0,1]$, $u_2 \in C^2[0,1]$ 为非齐次边值问题

$$\begin{cases} -(au_1')' + bu_1 = \sigma, \\ \cos\gamma_0 u_1(0) - \sin\gamma_0 u_1'(0) = 1, \\ \cos\gamma_1 u_1(1) + \sin\gamma_1 u_1'(1) = 0. \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} -(au_2')' + bu_2 = \sigma, \\ \cos\gamma_0 u_2(0) - \sin\gamma_0 u_2'(0) = 0, \\ \cos\gamma_1 u_2(1) + \sin\gamma_1 u_2'(1) = 1 \end{cases} \tag{29}$$

的解分别等价于

$$u_1(t) = \int_0^1 K(t,s)\sigma(s)ds + \varphi_1(t), \quad u_2(t) = \int_0^1 K(t,s)\sigma(s)ds + \varphi_2(t),$$

从而 $u \in C^2[0,1]$ 为问题 (20) 的解当且仅当 u 满足方程 (1), 其中 $n=2$, $K(t,s)$ 由 (25) 式确定, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ 由 (27) 式确定. 从而根据上节定理 1, 定理 2 和定理 3, 我们有如下结果.

定理 4 如果 (H7), (H2), (H3) 满足, 则问题 (20) 至少有一个正解.

定理 5 如果 (H7), (H4), (H5) 满足, 则问题 (20) 至少有一个正解.

定理 6 如果 (H7), (H2), (H5) 满足, 则问题 (20) 至少有两个正解.

注 4 马如云和 Thompson [4] 研究了如下多点特征值问题的正解的存在性 (使用本文中的符号):

$$\begin{cases} -(au')' + bu = \lambda g(t) f(u) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ \cos\gamma_0 u(0) - \sin\gamma_0 a(0) u'(0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), \\ \cos\gamma_1 u(1) + \sin\gamma_1 a(1) u'(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\xi_i), \end{cases} \tag{30}$$

使用的条件是:

(C1) $a \in C^1([0,1], (0,+\infty))$, $b \in C([0,1], (0,+\infty))$.

(C2) $\gamma_i \in [0,\pi/2] (i=0,1)$, $\cos\gamma_0\cos\gamma_1 + \sin(\gamma_0+\gamma_1) > 0$, $\alpha_i, \beta_i \in [0,+\infty)$ $(i=1,\dots,m-2)$.

(C4) $\Delta > 0$, $\rho - \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i n(\xi_i) > 0$, $\rho - \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i l(\xi_i) > 0$,

其中

$$\rho = a(0) \begin{vmatrix} n(0) & l(0) \\ n'(0) & l'(0) \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \rho - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i n(\xi_i) & -\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i l(\xi_i) \\ -\displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i n(\xi_i) & \rho - \displaystyle\sum_{i=1}^{m-2} \beta_i l(\xi_i) \end{vmatrix},$$

而 l, n 分别为如下初值问题的唯一 C^2 解

$$\begin{cases} -(al')'+bl=0, \\ l(0)=\sin\gamma_0, \quad a(0)l'(0)=\cos\gamma_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -(an')'+bn=0, \\ n(1)=\sin\gamma_1, \quad a(1)n'(1)=-\cos\gamma_1. \end{cases}$$

(C5) $g\in P\backslash\{0\}$.

令

$$M=\int_0^1 G(s,s)g(s)ds+A\|\psi|+B\|\phi\|,$$

$$f_0=\lim_{u\to 0^+}f(u)/u, \quad f_\infty=\lim_{u\to+\infty}f(u)/u, \quad \Gamma=\min\left\{\frac{n(1-\sigma)}{n(0)}, \ \frac{l(\sigma)}{l(1)}\right\},$$

其中 $\sigma\in(0,1/2)$ 为这样的常数, 它使得 $g(t)$ 在 $(\sigma,1-\sigma)$ 上不恒为 0. 记

$$G(t,s)=\frac{1}{\rho}\begin{cases} n(t)l(s), & 0\le s\le t\le 1, \\ n(s)l(t), & 0\le t\le s\le 1, \end{cases}$$

$$A=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \rho-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i n(\xi_i) & \alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)g(s)ds \\ -\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i n(\xi_i) & \sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^1 G(\xi_i,s)g(s)ds \end{vmatrix},$$

$$B=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\int_0^1 G(\xi_i,s)g(s)ds & -\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i l(\xi_i) \\ \sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i\int_0^1 G(\xi_i,s)g(s)ds & \rho-\sum\limits_{i=1}^{m-2}\beta_i l(\xi_i) \end{vmatrix}.$$

选取 $\tau_0\in[0,1]$, 使得 $\int_\sigma^{1-\sigma}G(\tau_0,s)g(s)ds=\max_{\tau\in[0,1]}\int_\sigma^{1-\sigma}G(\tau,s)g(s)ds$. 文 [4] 的主要结果是:

定理 A 如果 (C1), (C2), (C4), (C5) 满足, 则只要 λ 满足

$$\frac{1}{\Gamma\int_\sigma^{1-\sigma}G(\tau_0,s)g(s)dsf_\infty}<\lambda<\frac{1}{Mf_0}, \tag{31}$$

问题 (30) 就至少有一个正解.

定理 B 如果 (C1), (C2), (C4), (C5) 满足, 则只要 λ 满足

$$\frac{1}{\Gamma\int_\sigma^{1-\sigma}G(\tau_0,s)g(s)dsf_0}<\lambda<\frac{1}{Mf_\infty}, \tag{32}$$

问题 (30) 就至少有一个正解.

不难看出, 问题 (30) 等价于

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)g(s)f(u(s))ds+\frac{n(t)}{\rho}\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i u(\xi_i)+\frac{l(t)}{\rho}\sum_{i=1}^{m-2}\beta_i u(\xi_i),$$

从而问题 (30) 是问题 (20) 的特例. 事实上, 由 (C2) 可以推出本文 (H7), 即问题 (30) 的未扰动齐次线性边值问题没有非零 C^2 解. 由 (C1), (C4), (C5) 和条件 (31) 式可以推出本文 (H2) 和 (H3) (取 $\lambda=1$). 类似地, 由 (C1), (C4), (C5) 和条件 (32) 式可以推出本文 (H4) 和 (H5) (取 $\lambda=1$). 因而定理 A 和定理 B 可以分别由本文定理 4 和定理 5 推出. 因此本文定理 4 和定理 5 本质推广和改进了定理 A 和定理 B, 且本文不需要构造新的 Green 函数, 方法要简洁得多.

注 5 张国伟和孙经先在文 [8] 中主要研究了如下多点边值问题的正解的存在性

$$\begin{cases} \varphi''(x)+h(x)f(\varphi(x))=0, \quad 0<x<1, \\ \varphi(0)=0, \quad \varphi(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_i\varphi(\xi_i), \end{cases} \tag{33}$$

其中

$$h\in C[(0,1),\,\mathbb{R}^+]\cap L(0,1),\quad f\in C(\mathbb{R}^+,\,\mathbb{R}^+),\quad 0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{m-2}<1,\quad a_i\in\mathbb{R}^+,\ \sum_{i=1}^{m-2}a_i<1.$$

由于 $h(x)$ 允许在 $x=0$ 和 $x=1$ 处奇异, 因而问题 (33) 和本文考虑的问题 (20) 略有不同. 但是经过适当修改, 本文的方法完全可以用来讨论二阶奇异积分边值问题 (20) 的正解的存在性, 其中 $g\in C[(0,1),\mathbb{R}^+]\cap L(0,1)$, $\int_0^1 g(t)dt>0$, 其余条件不变. 这样我们的结果将包含在文 [8] 中的主要结果作为特例.

致谢 对审稿人的有益建议深表谢意.

参 考 文 献

[1] Guo D., Sun J., Nonlinear integral equations, Jinan: Shandong Press of Science and Technology, 1987 (in Chinese).
[2] Li F., Liu Z., Multiple positive solutions of some nonlinear operators and applications, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1998, **41**(1): 97–102.
[3] Liu Z., Li F., Multiple positive solutions of nonliear two-point boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 1996, **203**: 610–625.
[4] Ma R., Thompson B., Positive solutions for m-point eigenvalue problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **292**: 24–37.
[5] Ma R., Nonlocal problems for nonlinear ordinary differential equations, Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese).
[6] Ma R., Existence of positive solutions for a nonlinear m-point boundary value problem, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2003, **46**(4): 785–794.
[7] Ma R., Wang H., Positive solutions of three-point boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **279**: 1216–1227.
[8] Zhang G., Sun J., Positive solutions of m-point boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **291**: 406–418.
[9] Yang Z., Positive solutions of a second-order integral boundary value problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **203**: 751–765.
[10] Xia D., Wu Z., Yan S., Shu W., Theory of real variable functions and functional analysis, Beijing: Higher education press, 1979 (in Chinese).
[11] Krein K. G., Rutman M. A., Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space, Transl. AMS 10, 1962, 199–325.
[12] Krasnoselski M. A., Zabreiko P. P., Geometrical methods of nonlinear analysis, Springer, 1984.
[13] Yang Z., Sun J., Asymptotic bifurcation point of nonlinear operators, *Journal of Systems Sciences and Mathematical Sciences*, 2000, **20**: 47–54 (in Chinese).
[14] Deimling K., Nonlinear functional analysis, Springer, 1985.
[15] II'in V. A., Moiseev E. I., Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm–Liouville operator, *Differential Equations*, 1987, **23**(8): 979–987.
[16] Ma R., Thompson B., Global behaviour of positive solutions of nonlinear three-point boundary value problems, *Nonlinear Analysis TMA*, 2005, **60**: 685–701.
[17] Infante G., Eigenvalues of some non-local boundary boundary-value problems, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 2003, **46**: 75–86.
[18] Feng W., Webb J. R. L., Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth, *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **212**: 467–480.
[19] Feng W., On an m-point nonlinear boundary value problem, *Nonlinear Analysis TMA*, 1997, **30**: 5369–5374.
[20] Webb J. R. L., Optimal constants in a nonlocal boundary value problem, *Nonlinear Analysis TMA*, 2005, **63**: 672–685.
[21] Guo D., Sun J., Liu Z., Functional analyis methods in the theory of nonlinear ordinary differential equations, Jinan: Shandong Press of Science and Technology, 1995 (in Chinese).