第50卷第2期 数学学报中文版 Vol.50, No.2
2007年3月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Mar., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)02-0299-12 文献标识码: A

具有低阶项的散度型椭圆方程的解在 Morrey 空间上的局部正则性

王月山 何月香

焦作大学基础科学系 焦作 454003
E-mail: wangys1962@163.com; heyxiang63@163.com

摘 要 本文研究了具有低阶项的散度型椭圆方程 $-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+b_iu_{x_i}-(d_ju)_{x_j}+cu=(f_j)_{x_j}$, a.e. $x\in\Omega$ 的解在 Morrey 空间上的局部正则性, 其中 $a_{ij}\in \mathrm{VMO}\cap L^\infty(\Omega)$, 低阶项系数属于适当的 Morrey 空间.

关键词 椭圆方程; Morrey 空间; 正则性
MR(2000) 主题分类 35R05, 46E35, 42B20
中图分类 O175.24

The Local Regularity of Solutions in Morrey Space to the Elliptic Equation in Divergence Form with Lower Order Terms

Yue Shan WANG Yue Xiang HE

Department of Basic Science, Jiaozuo University, Jiaozuo 454003, P. R. China
E-mail: wangys1962@163.com; heyxiang63@163.com

Abstract The aim of this note is to study the local regularity of solutions in Morrey spaces to the elliptic equation in divergence form $-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+b_iu_{x_i}-(d_ju)_{x_j}+cu=(f_j)_{x_j}$, a.e. $x\in\Omega$. Where $a_{ij}\in \mathrm{VMO}\cap L^\infty(\Omega)$, and the lower order terms belong to suitable Morrey spaces.

Keywords elliptic equation; Morrey space; regularity
MR(2000) Subject Classification 35R05, 46E35, 42B20
Chinese Library Classification O175.24

1 引言及主要结果

半个多世纪以来, 大量文献研究了具有不连续系数的椭圆和抛物方程解的正则性. 一般来说, 对于 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上的一致椭圆算子 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ 解 u 的局部正则性问题可以叙述为 [1]: 如果 $\mathcal{L}u$ 属于 Ω 上的某一个函数类 $\mathbf{P}$, $\Omega'\subset\subset\Omega$, 那么 u 的高阶分布导数 D^mu 是否也属于 Ω'上的函数类$\mathbf{P}$?

在一个有界开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ $(n\geq 3)$ 上考虑具有低阶项的散度型椭圆方程

$$-(a_{ij}u_{x_i})_{x_j}+b_iu_{x_i}-(d_ju)_{x_j}+cu=(f_j)_{x_j},\quad \text{a.e. } x\in\Omega. \tag{1.1}$$

收稿日期: 2004-09-20; 接受日期: 2006-03-01
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10426029); 河南省高等学校青年骨干教师项目 (2004189)

这里不连续系数 a_{ij} 属于 Sarason 函数类 VMO (见文 [2]), 低阶项 b_i, c, d_i 属于适当的 Morrey 空间. 具体地说, 总是对椭圆方程的主系数作如下假设 $\mathbf{H}$:

$$\begin{cases} a_{ij} \in \mathrm{VMO} \cap L^{\infty}(\Omega), \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n; \\ \exists\, \Lambda > 0 : \Lambda^{-1}|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2. \end{cases} \tag{1.2}$$

对低阶项系数作假设 $\mathbf{F}$:

$$b_i, d_i \in L^{\alpha(p), \frac{\alpha(p)\mu}{n}}(\Omega) \quad (\forall\, i = 1,\dots,n), \quad c \in L^{\frac{\alpha(p)}{2}, \frac{\alpha(p)\mu}{2n}}(\Omega), \tag{1.3}$$

其中 $\frac{\alpha(p)\mu}{n} < n$ 且当 $1 < p < n$ 时, $\alpha(p) = n$; 当 $p = n$ 时, $\alpha(p) > n$; 当 $p > n$ 时, $\alpha(p) = p$.

1991 年 Chiarenza, Frasca 和 Longo 把解的导数表示成奇异积分以及奇异积分与 BMO 函数交换子的形式, 再利用奇异积分以及奇异积分交换子在 L^p 上的有界性质得到了具有 VMO 系数的非散度椭圆方程解的局部正则性 [3], 利用这个方法, 人们得到了具有 VMO 系数的非散度型的椭圆方程解在 Morrey 空间上的正则性结果 [4]. 具有不连续系数的非散度椭圆方程解的更多正则性结果可参见文 [5,6]. 当方程 (1.1) 中低阶项系数均为 0 时, 文 [7,8] 分别研究了解在 Morrey 空间上的局部正则性和细正则性. 本文主要研究在假设$\mathbf{H}$和$\mathbf{F}$下方程 (1.1) 的解在 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(\Omega)$ 上的局部正则性, 并给出了方程 (1.1) 解的一阶导数在 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(\Omega)$ 上的一个先验估计.

定义 1.1 我们称 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是方程 (1.1) 的一个弱解, 如果

$$\int_{\Omega} ((a_{i,j}u_{x_i} + f_j + d_j u)\phi_{x_j} + b_i u_{x_i}\phi + cu\phi)dx = 0, \quad \forall\, \phi \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{1.4}$$

定理 1.1 在假设 $\mathbf{H}$和 $\mathbf{F}$下, 如果 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in [L^{p,\lambda}(\Omega)]^n$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是方程 (1.1) 的弱解, 那么 $Du \in L^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 且存在常数 $C = C(n, \lambda, p, \Lambda, M, \mathrm{dist}\,(\Omega', \partial\Omega''))$, 使得

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda}(\Omega')} \le C\left(\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega'')} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(\Omega'')} + \|Du\|_{L^2(\Omega'')}\right), \ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega. \tag{1.5}$$

特别地, 当 $p \ge 2$ 时, 有

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda}(\Omega')} \le C\left(\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega'')} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(\Omega'')}\right). \tag{1.6}$$

2 概念和引理

定义 2.1 称 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数 $f \in \mathrm{BMO}\,(\mathbf{R}^n)$, 如果 $\sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B|dx = \|f\|_* < \infty$. 这里 B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的球, $f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)dx$. 对函数 $f \in \mathrm{BMO}\,(\mathbf{R}^n)$, 记 $\eta(r) = \sup_{\rho \le r} \frac{1}{|B_\rho|}\int_{B_\rho} |f(x) - f_{B_\rho}|dx$. 如果 $\lim_{r\to 0^+}\eta(r) = 0$, 称 $f \in \mathrm{VMO}(\mathbf{R}^n)$.

在定义 2.1 中如果用 $B \cap \Omega$ 和 $B_\rho \cap \Omega$ 分别来替换 B 及 B_ρ, 则我们可以得到 BMO$\,(\Omega)$ 和 VMO(Ω) 的概念.

定义 2.2 设 $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$. 局部可积函数 f 属于 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}(\Omega)$, 如果

$$\|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega,\, \rho>0} \frac{1}{\rho^\lambda}\int_{B_\rho(x)\cap\Omega} |f(y)|^p dy < \infty.$$

引理 2.1[9] 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集, 如果 $p'\le p$, $\frac{n-\lambda}{p}\le\frac{n-\lambda'}{p'}$, 则 $L^{p,\lambda}(\Omega)$ 连续地嵌入到 $L^{p',\lambda'}(\Omega)$, 记作 $L^{p,\lambda}(\Omega)\hookrightarrow L^{p',\lambda'}(\Omega)$.

引理 2.2[8] 设 $0<\alpha<n$, $1<p<q<\infty$, $0<\lambda<n$, $\lambda+p\alpha<n$. 如果次线性算子 T 是 $L^p(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbf{R}^n)$ 有界的, 且对任 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$, 当 $x\notin \operatorname{supp} f$ 时, $|Tf(x)|\le C\int_{\mathbf{R}^n}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$, 则 T 是 $L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)$ 到 $L^{q,\mu}(\mathbf{R}^n)$ 的有界算子, 其中 $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$, $\mu=\frac{\lambda}{p}q$. 特别地, 当 $\alpha=1$ 时, 若 $1<p<n$, 记 $\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$, 则

$$\|Tf\|_{L^{p^*,\frac{\lambda p^*}{p}}(\mathbf{R}^n)}\le C\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)};\tag{2.1}$$

若 $1<p<\infty$, 记 $\frac{1}{p_*}=\frac{1}{p}+\frac{1}{n}$, 则

$$\|Tf\|_{L^{p,\lambda}(\mathbf{R}^n)}\le C\|f\|_{L^{p_*,\frac{\lambda p_*}{p}}(\mathbf{R}^n)}.\tag{2.2}$$

定义 2.3 设 $k:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. 称 $k(x)$ 是一个 Calderon–Zygmund 核, 如果

(1) $k\in C^\infty(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$;

(2) $k(x)$ 是一个 $-n$ 阶齐次函数;

(3) $\int_\Sigma k(x)dx=0$. 这里 $\Sigma=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|=1\}$.

对 a.e. $x\in\mathbf{R}^n$ 和 $\forall\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, 令

$$\Gamma(x,\xi)=\frac{1}{n(2-n)\omega_n\sqrt{\det(a_{ij})}}\left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right)^{\frac{2-n}{2}}.$$

这里 (A_{ij}) 表示矩阵 (a_{ij}) 的逆矩阵, ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球的测度. 记

$$\Gamma_i(x,\xi)=\frac{\partial\Gamma(x,\xi)}{\partial\xi_i},\quad \Gamma_{ij}(x,\xi)=\frac{\partial^2\Gamma(x,\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j},\quad M=\max_{i,j=1,\dots,n}\max_{|\beta|\le 2n}\left\|\frac{\partial^\beta\Gamma_{ij}(x,\xi)}{\partial\xi^\beta}\right\|_{L^\infty(\Omega\times\Sigma)}.$$

由文 [3] 知, $\Gamma_{ij}(x,\xi)$ 是一个关于变量 ξ 的 Calderon–Zygmund 核. 容易验证 $Tg(x)=\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma_i(x,x-y)g(y)dy$ 满足引理 2.2 的条件 (其中 $\alpha=1$).

引理 2.3[4] B 是一个 $\mathbf{R}^n$ 中的开球, $f\in L^{p,\lambda}(B)$, $1<p<\infty, 0<\lambda<n$, $a\in$ BMO. 设 $k(x,z)$ 是一个 $\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ 中的实可测函数, 使得对 a.e. $x\in B$, $k(x,z)$ 是一个 Calderon–Zygmund 核且 $M<\infty$. 对任意 $\epsilon>0$, 令

$$K_\epsilon f(x)=\int_{|x-y|>\epsilon,x\in B}k(x,x-y)f(y)dy,$$
$$G_\epsilon(a,f)(x)=\int_{|x-y|>\epsilon,x\in B}k(x,x-y)(a(x)-a(y))f(y)dy,$$

那么存在 $Kf, C(a,f)\in L^{p,\lambda}(B)$, 使得 $\lim_{\epsilon\to0}\|K_\epsilon f-Kf\|_{L^{p,\lambda}(B)}=0$, $\lim_{\epsilon\to0}\|C_\epsilon(a,f)-C(a,f)\|_{L^{p,\lambda}(B)}=0$, 并且存在一个常数 C, 使得 $\|Kf\|_{L^{p,\lambda}(B)}\le C\|f\|_{L^{p,\lambda}(B)}$, $\|C(a,f)\|_{L^{p,\lambda}(B)}\le C\|a\|_*\|f\|_{L^{p,\lambda}(B)}$.

引理 2.4[4] 设 $a\in \mathrm{VMO}\cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$, $k(x,z)$ 满足引理 2.3 的条件, 那么对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\rho_0>0$, 使得当 $r\in(0,\rho_0)$ 时, 若 $f\in L^{p,\lambda}(B_r)$ $(1<p<\infty,\ 0<\lambda<n)$, 则

$$\|C(a,f)\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}\le C\epsilon\|f\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}.$$

引理 2.5 设 $n \geq 3$, B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个球, 对 a.e. $x \in B$, $a_{ij}(x)$ 满足 **H**. $Lv(x) = -(a_{ij}(x)v_{x_i})_{x_j}$. 如果 $v \in W_0^{1,p}(B)$ 满足 $L(v) = \operatorname{div} G + g$, 其中 G 和 g 具有紧支集 B, 则对 $\forall x \in B$, 有

$$\begin{aligned} v_{x_i}(x) =& \text{p.v.} \int_B \Gamma_{i,j}(x, x-y)\{(a_{j,h}(x) - a_{j,h}(y))v_{y_h}(y) - G_j(y)\}dy \\ &+ \int_B \Gamma_i(x, x-y)g(y)dy + c_{ih}G_h(x), \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.3}$$

这里 $c_{ih} = \int_{|t|=1} \Gamma_i(x,t)t_h d\sigma_t$.

证明 只需要对 $v \in C_0^\infty(B)$ 来证明, 一般的结果可通过稠密性得到. 固定 $x_0 \in B$, 有

$$\begin{aligned} -(a_{i,j}(x_0)v_{x_i}(x))_{x_j} &= -((a_{i,j}(x_0) - a_{i,j}(x))v_{x_i}(x) - G_i(x))_{x_j} + g(x) \\ &= -(\lambda_j^{x_0}(x))_{x_j} + g(x). \end{aligned}$$

注意到 $\Gamma(x_0, \xi)$ 是算子 $-(a_{ij}(x_0)v_{x_i}(x))_{x_j}$ 的基本解, 所以

$$v(x) = \int_B \Gamma_j(x_0, x-y)\lambda_j^{x_0}(y)dy + \int_B \Gamma(x_0, x-y)g(y)dy,$$

两边对 x_i 求导, 并取 $x_0 = x$ 得 (2.3).

引理 2.6 在假设 **H** 和 **F** 下, 如果 $u \in H^1(B_r)$ 是方程 (1.1) 的弱解, 则当 $r > 0$ 足够小时, 对任意的 $0 < \rho < 1$, $\|Du\|_{L^2(B_{\rho r})} \leq C\left(\|\mathbf{f}\|_{L^2(B_r)} + \|u\|_{L^2(B_r)}\right)$.

证明 取 $\theta \in C_0^\infty(B_r)$, 当 $x \in B_{\rho r}$ 时, $\theta = 1$. 在定义 1.1 中取 $\phi = \theta^2 u$, 则有

$$\int_{B_r} \left((a_{ij}u_{x_i} + f_j + d_j u)(\theta^2 u)_{x_j} + (b_i u_{x_i} + cu)(\theta^2 u)\right) dx = 0,$$

或

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{B_r} \theta^2 a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx =& -\int_{B_r} (2\theta u f_j \theta_{x_j} + \theta^2 f_j u_{x_j})dx \\ &- \int_{B_r} 2\theta u a_{ij} u_{x_i} \theta_{x_j} dx - \int_{B_r} c\theta^2 u^2 dx - \int_{B_r} (b_i \theta^2 u u_{x_i} dx - d_i \theta^2 u u_{x_i})dx \\ &- 2\int_{B_r} d_j \theta \theta_{x_j} u^2 dx = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6. \end{aligned}$$

由假设 **H**, 我们有 $I_1 = \int_{B_r} \theta^2 a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx \geq \Lambda^{-1} \int_{B_r} \theta^2 |Du|^2 dx$. 由带 τ 的 Cauchy 不等式, 得

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_{B_r} \left(2\theta u f_j \theta_{x_j} + \theta^2 f_j u_{x_j}\right) dx \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{4\tau}\right) \int_{B_r} \theta^2 |\mathbf{f}|^2 dx + \int_{B_r} u^2 |D\theta|^2 dx + \tau \int_{B_r} \theta^2 |Du|^2 dx. \end{aligned}$$

注意到 $a_{ij} \in L^\infty$, 再次利用带 τ 的 Cauchy 不等式

$$I_3 = -\int_{B_r} 2\theta u a_{ij} u_{x_i} \theta_{x_j} dx \leq C\tau \int_{B_r} \theta^2 |Du|^2 dx + \frac{C}{\tau} \int_{B_r} u^2 |D\theta|^2 dx.$$

由假设 **F**, 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式

$$I_4 = -\int_{B_r} c\theta^2 u^2 dx \le Cr^{\frac{\mu}{2}} \|c\|_{L^{\frac{n}{2},\frac{\mu}{2}}(B_r)} \int_{B_r} |D(\theta u)|^2 dx.$$

同样

$$\begin{aligned} I_5 &= -\int_{B_r} b_i\theta^2 u u_{x_i} dx - \int_{B_r} d_i \theta^2 u u_{x_i} dx \\ &\le r^{\mu} \left(\|b\|_{L^{n,\mu}(B_{2r})} + \|d\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\right) \left(\int_{B_r} \theta^2 |Du|^2 dx + \int_{B_r} |D(\theta u)|^2 dx\right), \\ I_6 &= -2\int_{B_r} d_j \theta\theta_{x_j} u^2 dx \le 2r^{\mu} \|d\|_{L^{n,\mu}(B_r)} \left(\frac{1}{4\tau}\int_{B_r} u^2 |D\theta|^2 dx + \tau \int_{B_r} |D(\theta u)|^2 dx\right). \end{aligned}$$

注意到不等式 $|D(\theta u)|^2 \le C(|D\theta|^2 u^2 + \theta^2 |Du|^2)$, 综合 I_i $(i=1,\dots,6)$ 的估计, 并取 r 和 τ 足够小, 可得

$$\int_{B_r} \theta^2 |Du|^2 dx \le C\left(\int_{B_r} \theta^2 |\mathbf{f}|^2 dx + \int_{B_r} u^2 |D\theta|^2 dx\right) \le C\left(\int_{B_r} |\mathbf{f}|^2 dx + \int_{B_r} u^2 dx\right).$$

定义 2.4 称函数 u 属于 Sobolev–Morrey 空间 $W^{1,p,\lambda}(\Omega)$, 如果 $u, Du \in L^{p,\lambda}(\Omega)$, 并定义其范数为 $\|u\|_{W^{1,p,\lambda}(\Omega)} = \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} + \|Du\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$.

下面研究 Sobolev–Morrey 空间的一些性质.

引理 2.7 若 $u \in W^{1,p}(\Omega)$ 且 $Du \in L^{p,\lambda}(\Omega)$, 则 $u \in W^{1,p,\lambda}_{\rm loc}(\Omega)$.

证明 只需要证明对任意 $B_r \subset \Omega$, 有 $u \in L^{p,\lambda}(B_r)$.

当 $p=n$ 时, 对任意 $0<\lambda<n$, 有 $u \in W^{1,n}(B_r) \hookrightarrow L^{n,\lambda}(B_r)$. 事实上, 我们可以选择 s 满足 $1<\frac{n}{s}<2$, $\frac{\lambda}{n} \le 2-\frac{n}{s}$, 则 $u \in W^{1,n}(B_r) \hookrightarrow W^{1,s}(B_r)$. 由 Sobolev 不等式和引理 2.2 知, $u \in L^{s^*}(B_r) \hookrightarrow L^{n,\lambda}(B_r)$.

当 $p>n$ 时, $W^{1,p}(B_r) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(B_r) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(B_r)$.

当 $1<p<n$ 时, 由于 $u \in W^{1,p}(B_r)$, 由 Sobolev 不等式和引理 2.2, 有 $u \in L^{p^*}(B_r) \hookrightarrow L^{p,p}(B_r)$; 若 $u \in L^{p,p}(B_r)$, $2p<n$, 则由 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式知 $u \in L^{p,2p}(B_r)$ 且 $\|u\|_{L^{p,2p}(B_r)} \le C\|u\|_{W^{1,p,p}(B_r)}$; 若 $(k-1)p<\lambda$, $kp<n$, 则重复上述步骤可得 $u \in L^{p,kp}(B_r)$; 若 $(k-1)p<\lambda$, $kp \ge \lambda$, 设 $(k-1)p+\gamma=\lambda$, 则 $0<\gamma\le p$,

$$\begin{aligned} \left(\rho^{-(k-1)p-\gamma}\int_{B_\rho\cap\Omega} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} &\le \rho^{-(k-2)-\frac{\gamma}{p}} \left(\int_{B_\rho\cap\Omega} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\le C\left(\rho^{-(k-2)p-\gamma}\int_{B_\rho\cap\Omega} (|u|^p + |Du|^p)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C\, \|u\|_{W^{1,p,(k-1)p}(\Omega)}, \end{aligned}$$

即 $u \in L^{p,\lambda}(B_r)$, 从而 $u \in W^{1,p,\lambda}(B_r)$.

为进一步研究 Sobolev–Morrey 空间的性质, 先证明下面的引理.

引理 2.8 设 Ω 是一个开集, $p \in (1,\infty)$, $\lambda \in (0,n)$. 固定 $w \in \Omega$, $\alpha \in [0,n)$, $\beta \in (0,n)$. 对 $g \in L^{p,\lambda}(\Omega)$, 有

$$T'_\alpha g(z) = \int_{\{\xi\in\Omega:\, |\xi-z|\ge 2|w-z|\}} \frac{g(\xi)}{|\xi-z|^{n-\alpha}} d\xi, \quad T''_\beta g(z) = \int_{\{\xi\in\Omega:\, |\xi-z|<2|w-z|\}} \frac{g(\xi)}{|\xi-z|^{n-\beta}} d\xi.$$

若 $\lambda+p\alpha<n$, 则存在常数 c_1, 使得 $|T'_\alpha g(z)|\le c_1\|g\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}|w-z|^{\frac{p\alpha+\lambda-n}{p}}$; 若 $\lambda+p\beta>n$, 则存在常数 c_2, 使得 $|T''_\beta g(z)|\le c_2\|g\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}|w-z|^{\frac{p\beta+\lambda-n}{p}}$.

证明

$$\begin{aligned}|T'_\alpha g(z)|&\le\sum_{k=1}^\infty\int_{\{\xi\in\Omega:2^k|w-z|\le|\xi-z|<2^{k+1}|w-z|\}}\frac{g(\xi)}{|\xi-z|^{n-\alpha}}d\xi\\&\le\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{2^k|w-z|}\right)^{n-\alpha}\int_{\{\xi\in\Omega:|\xi-z|<2^{k+1}|w-z|\}}|g(\xi)|d\xi\\&\le\|g\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{2^k|w-z|}\right)^{n-\alpha}\left(2^{k+1}|w-z|\right)^{n(1-\frac1p)+\frac\lambda p}\\&\le\|g\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}|w-z|^{\frac{p\alpha+\lambda-n}{p}}\sum_{k=1}^\infty(2^{k\frac{p\alpha+\lambda-n}{p}});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|T'_\beta g(z)|&\le\sum_{k=1}^\infty\int_{\{\xi\in\Omega:2^{1-k}|w-z|\le|\xi-z|<2^{2-k}|w-z|\}}\frac{g(\xi)}{|\xi-z|^{n-\beta}}d\xi\\&\le\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{2^{1-k}|w-z|}\right)^{n-\beta}\int_{\{\xi\in\Omega:|\xi-z|<2^{2-k}|w-z|\}}|g(\xi)|d\xi\\&\le\|g\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}\sum_{k=1}^\infty\left(\frac{1}{2^{1-k}|w-z|}\right)^{n-\beta}\left(2^{2-k}|w-z|\right)^{n(1-\frac1p)+\frac\lambda p}\\&\le\|g\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}|w-z|^{\frac{p\beta+\lambda-n}{p}}\sum_{k=1}^\infty(2^{-k\frac{p\beta+\lambda-n}{p}}).\end{aligned}$$

引理 2.9 若 $u\in W^{1,p,\lambda}(\Omega)$ 且 $p+\lambda>n$, 则 $u\in C^{0,\delta}_{\rm loc}(\Omega)$, 其中 $\delta=1-\frac{n-\lambda}{p}$.

证明 取 $B_r\subset\Omega$ 上的截断函数 η, 当 $x\in B_s$ $(0<s<r)$ 时,$\eta(x)=1$. 令 $v(x)=\eta u$, 则由 $u\in W^{1,p,\lambda}(B_r)$ 知 $v\in W^{1,p}_0(B_r)\cap W^{1,p,\lambda}(B_r)$, 且 $\|Dv\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}\le C\|u\|_{W^{1,p,\lambda}(B_r)}$. 下面只需要对 $v\in C^\infty_0(B_r)$ 来证明, 一般情况可以通过稠密性来得到. 记 $L_0v(x)=-\Delta v$, 则对任意的 $x\in B_r$, 有 $v(x)=\int_{B_r}\Gamma_j(x-y)v_{y_j}(y)dy$. 这样对任意的 $w\in B_r$, $w\ne x$,

$$\begin{aligned}|v(x)-v(w)|\le{}&C\int_{B_r}|\Gamma_j(x-y)-\Gamma_j(w-y)|\,|v_{y_j}(y)|dy\\\le{}&C\int_{B_r\cap\{|y-x|\ge2|x-w|\}}|\Gamma_j(x-y)-\Gamma_j(w-y)|\,|v_{y_j}(y)|dy\\&+C\int_{B_r\cap\{|y-x|<2|x-w|\}}|\Gamma_j(x-y)|\,|v_{y_j}(y)|dy\\&+C\int_{B_r\cap\{|y-x|<2|x-w|\}}|\Gamma_j(w-y)|\,|v_{y_j}(y)|dy=I+II+III.\end{aligned}$$

注意到 Γ_{ij} 是一个 $-n$ 阶齐次函数, 并且 $|y-x|\ge2|x-w|$, 所以

$$\begin{aligned}|\Gamma_j(x-y)-\Gamma_j(w-y)|={}&|\Gamma_{ij}((x-y)+(1-\theta)(x-w))|\,|x-w|\\\le{}&\frac{C|x-w|}{|(x-y)+(1-\theta)(x-w)|^n}\le\frac{C|x-w|}{|x-y|^n}.\end{aligned}$$

这里 $0<\theta<1$, 最后一个不等式是因为

$$|(x-y)+(1-\theta)(x-w)|\ge|x-y|-|x-w|\ge\frac12|x-y|.$$

应用引理 2.8 的第一个结论, 有 $I \le C\|Dv\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}|x-w|^{1-\frac{n-\lambda}{p}}$. 注意到 Γ_j 是一个 $-(n-1)$ 阶齐次函数, 应用引理 2.8 的第二个结论, 有

$$II \le \int_{B_r\cap\{|y-x|<2|x-w|\}} \frac{|Dv(y)|}{|x-y|^{n-1}}dy \le C\|Dv\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}|x-w|^{1-\frac{n-\lambda}{p}}.$$

再注意到 $|w-y|<|w-x|+|x-y|<3|x-y|$, 类似于 II 的估计可得

$$\begin{aligned} III &\le C\int_{B_r\cap\{|y-x|<2|x-w|\}} \frac{|Dv(y)|}{|w-y|^{n-1}}dy \le C\int_{B_r\cap\{|y-w|<3|x-w|\}} \frac{|Dv(y)|}{|w-y|^{n-1}}dy \\ &\le C\|Dv\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}|x-w|^{1-\frac{n-\lambda}{p}}. \end{aligned}$$

综合上述估计, 当 $x, w \in B_s$, $x \ne w$ 时, $|u(x)-u(w)| \le C\|u\|_{W^{1,p,\lambda}(\Omega)}|x-w|^{1-\frac{n-\lambda}{p}}$. 这样, 如果 $\Omega' \subset\subset \Omega$, 那么对任意的 x_1, w_1, 总可以用有限多个半径为 s 的球列 B_r^i $(i=1,2,\dots,m)$ 连接起来, 不妨设 $x_1, y_1 \in B_s^1$, $y_1, y_2 \in B_s^2, \dots, y_m$, $w_1 \in B_s^m$, 则在每个球上, 有

$$|u(y_i)-u(y_{i+1})| \le C\|u\|_{W^{1,p,\lambda}(\Omega)}|x_1-w_1|^{1-\frac{n-\lambda}{p}} \quad (i=0,1,\dots,m+1,\ y_0=x_1,\ y_{m+1}=w_1),$$

从而 $|u(x_1)-u(w_1)| \le C\|u\|_{W^{1,p,\lambda}(\Omega)}|x_1-w_1|^{1-\frac{n-\lambda}{p}}$.

3 主要定理的证明

设 $r \in R^+$, $0<\rho<1$. $B_r, B_{\rho r}$ 分别是半径为 $r, \rho r$ 的同心球. $\theta \in C_0^\infty(B_r)$, 且当 $x \in B_{\rho r}$ 时 $\theta(x)=1$. 对 $\forall \phi \in C_0^\infty(B_r)$, 有 $\theta\phi \in C_0^\infty(B_r)$. 如果 u 是方程 (1.1) 在 B_r 上的一个弱解, 则 u 是方程 $L(\theta u) = -(a_{ij}(\theta u)_{x_i})_{x_j} = \operatorname{div} G + g$ 的弱解, 其中

$$G_j = -(a_{ij}\theta_{x_i}u - \theta(f_j+d_ju)), \tag{3.1}$$

$$g = -(a_{ij}\theta_{x_j}u_{x_i} + \theta_{x_j}(f_j+d_ju) + \theta b_iu_{x_i} + c\theta u). \tag{3.2}$$

由于 $u \in W^{1,p}(B_r)$, $\theta \in C_0^\infty(B_r)$, 所以 $\theta u \in W_0^{1,p}(B_r), G$ 和 g 都具有紧支集 B_r. 由引理 2.5, 对任 $x \in B_r$,

$$\begin{aligned} (\theta u)_{x_i}(x) =& \text{p.v.}\int_{B_r} \Gamma_{ij}(x,x-y)\{(a_{jk}(x)-a_{jk}(y))(\theta u)_{y_k}(y) - G_j(y)\}dy \\ &+ \int_{B_r} \Gamma_i(x,x-y)g(y)dy + c_{ih}G_h(x), \quad i=1,\dots,n. \end{aligned}$$

记 $v=\theta u$, 则上式可写成

$$v_{x_i} = \sum_{j,k=1}^n S_{ijk}(v_{x_k}) + h_i. \tag{3.3}$$

这里

$$S_{ijk}(v_{x_k})(x) = \text{p.v.}\int_{B_r} \Gamma_{ij}(x,x-y)\{(a_{j,k}(x)-a_{j,k}(y))v_{y_k}(y)\}dy, \tag{3.4}$$

$$h_i = \text{p.v.}\int_{B_r} \Gamma_{ij}(x,x-y)G_j(y)dy + \int_{B_r} \Gamma_i(x,x-y)g(y)dy + c_{ih}G_h(x). \tag{3.5}$$

先给出如下的 L^p 估计

引理 3.1 设 $1<p<\infty$. 在假设 **H** 和假设 **F** 下, 如果 $u\in W^{1,p}(B_r)$ 是方程 (1.1) 的弱解, $\mathbf{f}\in L^p(B_r)$, 那么对任意的 $0<s<r$, 存在不依赖于 u 和 $\mathbf{f}$ 的常数 C, 使得

$$\|Du\|_{L^p(B_s)}\leq C(\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)}+\|Du\|_{L^2(B_r)}). \tag{3.6}$$

证明 由 (3.3) 式, $\|Dv\|_{L^p(B_r)}\leq C(\sum_{ij}\|a_{ij}\|_*\|Dv\|_{L^p(B_r)}+\|G\|_{L^p(B_r)}+\|g\|_{L^{p_*}(B_r)})$, 由引理 2.4, 选取 r 足够小, 使得 $\sum\|a_{ij}\|_*<1$, 则 $\|Dv\|_{L^p(B_r)}\leq C\left(\|G\|_{L^p(B_r)}+\|g\|_{L^{p_*}(B_r)}\right)$.

当 $1<p<n$ 时, $\|d_j\theta u\|_{L^p(B_r)}\leq C\|d_j\|_{L^n(B_r)}\|\theta u\|_{L^{p^*}(B_r)}\leq C\|d_j\|_{L^n(B_r)}\|Dv\|_{L^p(B_r)}$; 当 $p=n$ 时, 注意到对 $1<q<n$, 有 $W^{1,n}(B_r)\hookrightarrow W^{1,q}(B_r)$. 选取 q 和 $\alpha>n$, 使得 $\frac{1}{q}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{q^*}$, 则 $\|d_j\theta u\|_{L^n(B_r)}\leq C\|d_j\|_{L^\alpha(B_r)}\|\theta u\|_{L^{q^*}(B_r)}\leq C\|d_j\|_{L^\alpha(B_r)}\|Dv\|_{L^p(B_r)}$; 当 $p>n$ 时, 注意到 $W^{1,p}(B_r)\hookrightarrow C^0(B_r)$, 所以

$$\|d_j\theta u\|_{L^p(B_r)}\leq C\|d_j\|_{L^p(B_r)}\max_{x\in B_r}|\theta u|\leq C\|d_j\|_{L^p(B_r)}\|v\|_{W^{1,p}(B_r)}.$$

这样 $\|d_j\theta u\|_{L^p(B_r)}\leq C\|d_j\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}\|v\|_{W^{1,p}(B_r)}$, 于是

$$\|G\|_{L^p(B_r)}\leq C\left(\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)}+\|d_j\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}\|Dv\|_{L^p(B_r)}\right).$$

同样, 我们可以得到

$$\begin{aligned}&\|d_ju\|_{L^{p_*}(B_r)}\leq C\|d_j\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}\|u\|_{L^p(B_r)},\\&\|\theta b_iu_{x_i}\|_{L^{p_*}(B_r)}\leq C\|b_i\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}\|v\|_{W^{1,p}(B_r)},\\&\|c\theta u\|_{L^{p_*}(B_r)}\leq C\|c\|_{L^{\frac{1}{2}\alpha(p)}(B_r)}\|v\|_{W^{1,p}(B_r)}.\end{aligned}$$

又 $\|a_{ij}\theta_{x_j}u_{x_i}\|_{L^{p_*}(B_r)}\leq C\|Du\|_{L^{p_*}(B_r)}$, 于是

$$\begin{aligned}\|g\|_{L^{p_*}(B_r)}\leq{}&C(\|Du\|_{L^{p_*}(B_r)}+\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)})\\&+(\|d_j\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}+\|b_i\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}+\|c\|_{L^{\frac{1}{2}\alpha(p)}(B_r)})\|Dv\|_{L^p(B_r)}).\end{aligned}$$

选择足够小的 r, 使得 $C(\|d_j\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}+\|b_i\|_{L^{\alpha(p)}(B_r)}+\|c\|_{L^{\frac{\alpha(p)}{2}}(B_r)})<1$, 则

$$\|Du\|_{L^p(B_{\rho r})}\leq C(\|Du\|_{L^{p_*}(B_r)}+\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)}).$$

当 $1<p\leq 2$ 时, 注意 $L^2(B_r)\hookrightarrow L^{p_*}(B_r)$, 所以 (3.6) 式是显然的, 下面对 $p>2$ 证明 (3.6) 式. 先假设 $2<p\leq 2^*$, 则 $p_*\leq 2$, 由于 $L^2(B_r)\hookrightarrow L^{p_*}(B_r)$, 这样

$$\|Du\|_{L^p(B_{\rho r})}\leq C(\|Du\|_{L^2(B_r)}+\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)}).$$

特别地, $\|Du\|_{L^{2^*}(B_{\rho r})}\leq C(\|Du\|_{L^2(B_r)}+\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)})$.

定义 $2^{**}=\frac{n2^*}{n-2^*}$, 则 $2^*<p\leq 2^{**}$ 且 $2<p_*\leq 2^*$ (如果 $2^*\geq n$, 则 $2^{**}=\infty$ 而且 $2^*<p<\infty$). 重复上面的估计, 并将 $\|Du\|_{L^{2^*}(B_{\rho r})}$ 代入

$$\begin{aligned}\|Du\|_{L^p(B_{\rho^2 r})}&\leq C(\|Du\|_{L^{2^*}(B_{\rho r})}+\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)})\\&\leq C(\|Du\|_{L^2(B_r)}+\|u\|_{L^p(B_r)}+\|\mathbf{f}\|_{L^p(B_r)}).\end{aligned}$$

将这个过程进行下去, 直到 $2^{**\cdots*} \geq n$ 为止即.

定理 1.1 的证明 先证明

$$u \in W^{1,p}(B_r) \Rightarrow u \in L^{p,\lambda'}(B_r), \quad \lambda' = \min\{\lambda, p\}. \tag{3.7}$$

当 $1 < p < n$ 时, 由于 $u \in W^{1,p}(B_r)$, 由 Sobolev 不等式和引理 2.1, 有 $u \in L^{p^*}(B_r) \hookrightarrow L^{p,p}(B_r)$; 当 $p = n$ 时, 对任意 $0 < \lambda < n$, 有 $u \in W^{1,n}(B_r) \hookrightarrow L^{n,\lambda}(B_r)$. 事实上, 我们可以选择 s, 满足 $\frac{n}{2} < s < n, \lambda \leq (2 - \frac{n}{s})n$, 则 $u \in W^{1,n}(B_r) \hookrightarrow W^{1,s}(B_r)$. 由 Sobolev 定理和引理 2.1, $u \in L^{s^*}(B_r) \hookrightarrow L^{n,\lambda}(B_r)$; 当 $p > n$ 时, $u \in W^{1,p}(B_r) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(B_r) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(B_r)$.

再证明 $G_j \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$, 其中 $\lambda_1 = \min\{\lambda', \frac{p\mu}{n}\} = \min\{\lambda, \frac{p\mu}{n}\}$. 由于 $f_j \in L^{p,\lambda}(B_r)$, 以及 $u \in L^{p,\lambda'}(B_r)$, 所以 $-(a_{ij}\theta_{x_i}u - \theta f_j) \in L^{p,\lambda'}(B_r)$. 下面只需要考察 $\theta d_j u$.

当 $1 < p < n$ 时, 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式

$$\begin{aligned}\left(\rho^{-\frac{p\mu}{n}} \int_{B_\rho(x)\cap B_r} |d_j\theta u|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\rho^{-\mu} \int_{B_\rho(x)\cap B_r} |d_j|^n dy\right)^{\frac{1}{n}} \|\theta u\|_{L^{p^*}(B_r)} \\ &\leq C\left(\sup_{x\in B_r,\rho>0} \rho^{-\mu} \int_{B_\rho(x)\cap B_r} |d_j|^n dy\right)^{\frac{1}{n}} \|D(\theta u)\|_{L^p(B_r)} \\ &\leq C\|d_j\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|u\|_{W^{1,p}(B_r)};\end{aligned}$$

当 $p = n$ 时, 注意到对 $1 < q < n$, 有 $W^{1,n}(B_r) \hookrightarrow W^{1,q}(B_r)$. 选取 q 和 $\alpha > n$, 使得 $\frac{1}{q} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{q^*}$, 则

$$\begin{aligned}\left(\rho^{-\mu} \int_{B_\rho(x)\cap B_r} |d_j\theta u|^n dy\right)^{\frac{1}{n}} &\leq \left(\rho^{-\frac{\alpha\mu}{n}} \int_{B_\rho(x)\cap B_r} |d_j|^\alpha dy\right)^{\frac{1}{\alpha}} \|\theta u\|_{L^{q^*}(B_r)} \\ &\leq C\|d_j\|_{L^{\alpha,\frac{\alpha\mu}{n}}(B_r)}\|u\|_{W^{1,q}(B_r)} \leq C\|d_j\|_{L^{\alpha,\frac{\alpha\mu}{n}}(B_r)}\|u\|_{W^{1,p}(B_r)};\end{aligned}$$

当 $p > n$ 时, 注意到 $W^{1,p}(B_r) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(B_r) \hookrightarrow C^0(B_r)$, 所以

$$\begin{aligned}\left(\rho^{-\frac{p\mu}{n}} \int_{B_\rho(x)\cap B_r} |d_j\theta u|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\rho^{-\frac{p\mu}{n}} \int_{B_\rho(x)\cap B_r} |d_j|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \max_{x\in B_r} |\theta u| \\ &\leq C\|d_j\|_{L^{p,\frac{p\mu}{n}}(B_r)}\|u\|_{W^{1,p}(B_r)}.\end{aligned}$$

综合上述知

$$\|\theta d_j u\|_{L^{p,\frac{p\mu}{n}}(B_r)} \leq C\|d_j\|_{L^{\alpha(p),\frac{\alpha(p)\mu}{n}}(B_r)}\|u\|_{W^{1,p}(B_r)}. \tag{3.8}$$

这样, $G_j = -(a_{ij}\theta_{x_i}u - \theta(f_j + d_j u)) \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$, 且

$$\|G\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)} \leq C(\|u\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^p(B_r)}). \tag{3.9}$$

由 $G_j \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$ 及引理 2.3,

$$\text{p.v.} \int_{B_r} \Gamma_{ij}(x, x-y)G_j(y)dy \in L^{p,\lambda_1}(B_r).$$

所以要证明 $h_i \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$, 只需要证明 $\int_{B_r} \Gamma_i(x, x-y)g(y)dy \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$ 即可. 为简便起见, 在下面的证明中假设 $1 < p < n$, 对 $p \geq n$ 情况可类似于 (3.8) 式的讨论. 记 $Tg(x) = \int_{B_r} \Gamma_i(x, x-y)g(y)dy$. 由引理 2.1 和 $u \in W^{1,p}(B_r)$ 知, $u_{x_i} \in L^p(B_r) \hookrightarrow L^{p_*,p_*}(B_r) \hookrightarrow L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)$, 所以

$$\|a_{ij}\theta_{x_i}u_{x_i}\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)} \leq C\|Du\|_{L^p(B_r)}. \tag{3.10}$$

由 Hölder 不等式

$$\|\theta_{x_i}d_ju\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)} \leq C\|d_j\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|u\|_{L^p(B_r)}, \tag{3.11}$$

$$\|\theta b_iu_{x_i}\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)} \leq C\|b_i\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|u\|_{W^{1,p}(B_r)}, \tag{3.12}$$

$$\|c\theta u\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)} \leq C\|c\|_{L^{\frac{n}{2},\frac{\mu}{2}}(B_r)}\|u\|_{W^{1,p}(B_r)}. \tag{3.13}$$

又

$$\|\theta_{x_i}f_j\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \leq C\|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}. \tag{3.14}$$

综合 (3.10)–(3.14) 式可知 $g \in L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)$, 且

$$\|g\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)} \leq C(\|u\|_{L^p(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^p(B_r)}). \tag{3.15}$$

当 $\lambda \leq \frac{p\mu}{n}$ 时, 由于 $L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r) \hookrightarrow L^{p_*,\frac{p_*\lambda}{p}}(B_r)$, 所以 $g \in L^{p_*,\frac{p_*\lambda}{p}}(B_r)$, 从而由引理 2.2 知 $Tg \in L^{p,\lambda}(B_r)$ 且 $\|Tg\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \leq C\|g\|_{L^{p_*,\lambda\frac{p_*}{p}}} \leq C\|g\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}}$; 当 $\lambda > \frac{\mu p}{n}$ 时, 由引理 2.1 知 $\|Tg\|_{L^{p,\frac{p\mu}{n}}(B_r)} \leq C\|g\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)}$, 所以 $Tg \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$, 且 $\|Tg\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)} \leq C\|g\|_{L^{p_*,\frac{p_*\mu}{n}}(B_r)}$, 从而 $h_i \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$.

定义映射: $\widetilde{\mathbf{T}} : \left[L^{p,\lambda_1}(B_r)\right]^n \to \left[L^{p,\lambda_1}(B_r)\right]^n$, 这里

$$\widetilde{\mathbf{T}}\mathbf{w} = ((\widetilde{\mathrm{T}}\mathbf{w})_i)_{i=1,\dots,n} = \left(\sum_{j,k=1}^{n} S_{ijk}(w_k) + h_i\right)_{i=1,\dots,n}, \tag{3.16}$$

$$S_{ijk}(w_k)(x) = \text{p.v.}\int_{B_r} \Gamma_{ij}(x, x-y)\{(a_{j,k}(x) - a_{j,k}(y))w_k(y)\}dy.$$

固定 r 足够小, 使得 $\sum_{jk}\|S_{ijk}\| < 1$, 所以算子 $\widetilde{\mathbf{T}}$ 是一个 $\left[L^{p,\lambda_1}(B_r)\right]^n$ 上的压缩映射, 从而 $\widetilde{\mathbf{T}}$ 有唯一的不动点 $(w_i)_{i=1,\dots,n}$. 由 (3.3) 式, $(v_{x_i})_{i=1,\dots,n}$ 也是 $[L^p(B_r)]^n$ 中的不动点, 由不动点的唯一性知 $(v_{x_i})_{i=1,\dots,n} = (w_i)_{i=1,\dots,n} \in [L^{p,\lambda_1}(B_r)]^n$. 对 (3.3) 式两边取 $L^{p,\lambda_1}(B_r)$, 由 (3.9), (3.15) 式以及引理 3.1, 得

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda_1}(B_{\rho r})} \leq C(\|u\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^2(B_r)}). \tag{3.17}$$

如果 $\lambda_1 = \lambda$, 那么 $u, u_{x_i} \in L^{p,\lambda}_{\text{loc}}(\Omega)$ 且 (1.5) 式成立, 再利用引理 2.6, 2.1 可得 (1.6) 式. 下面假设 $\lambda_1 = \frac{\mu p}{n} < \lambda$, 这时 $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_{x_i} \in L^{p,\lambda_1}_{\text{loc}}(\Omega)$. 令 $\lambda_2 = \min\{\frac{2\mu p}{n} = 2\lambda_1, \lambda\}$.

当 $p + \lambda_1 < n$ 时, 由引理 2.7 知 $u \in W^{1,p,\lambda_1}(B_r)$, 利用 Sobolev 不等式

$$\begin{aligned}\left(\rho^{-(p+\lambda_1)}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|u|^pdy\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \rho^{-\frac{\lambda_1}{p}}\left(\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|u|^{p^*}dy\right)^{\frac{1}{p^*}}\\ &\leq C\rho^{-\frac{\lambda_1}{p}}\left(\int_{B_\rho(x)\cap B_r}(|u|^p + |Du|^p)dy\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\|u\|_{W^{1,p,\lambda_1}(B_r)},\end{aligned}$$

所以

$$\|a_{ij}\theta_{x_i}u\|_{L^{p,p+\lambda_1}(B_r)} \le C\|u\|_{W^{1,p,\lambda_1}(B_r)}. \tag{3.18}$$

注意到 $2\lambda_1 < p+\lambda_1 < n$, 类似于 (3.8) 式, 利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式

$$\begin{aligned}\left(\rho^{-2\lambda_1}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|d_j\theta u|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} &\le \rho^{-\frac{2\mu}{n}}\left(\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|d_j|^n dy\right)^{\frac{1}{n}}\|\theta u\|_{L^{p^*}(B_r)}\\ &\le C\left(\sup_{x\in B_r,\rho>0}\rho^{-\mu}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|d_j|^n dy\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sup_{x\in B_r,\rho>0}\rho^{-\lambda_1}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|D(\theta u)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le C\|d_j\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|Dv\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)},\end{aligned}$$

即

$$\|d_j\theta u\|_{L^{p,2\lambda_1}(B_r)} \le C\|d_j\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|Dv\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}. \tag{3.19}$$

由 (3.18) 和 (3.19) 式知 $G_j \in L^{p,2\lambda_1}(B_r)$.

当 $p+\lambda_1 > n$ 时, 由引理 2.9 知 $u \in C^{0,\delta}(B_r) \hookrightarrow L^{p,\lambda}(B_r)$. 如果这时 $2\lambda_1 < n$, 由 (3.18) 式知 $G_j \in L^{p,2\lambda_2}(B_r)$; 如果 $2\lambda_1 \ge n$, 由于 $\lambda_1 < \lambda$, 故可设 $\lambda = \lambda_1 + \gamma$, 显然 $\gamma < \lambda_1$. 注意到 $Dv \in L^{p,\lambda_1}(B_r) \hookrightarrow L^{p,\gamma}(B_r)$,

$$\begin{aligned}\left(\rho^{-(\lambda_1+\gamma)}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|d_j\theta u|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} &\le \left(\rho^{-\mu}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|d_j|^n dy\right)^{\frac{1}{n}}\rho^{-\frac{\gamma}{p}}\|\theta u\|_{L^{p^*}(B_r)}\\ &\le C\left(\sup_{x\in B_r,\rho>0}\rho^{-\mu}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|d_j|^n dy\right)^{\frac{1}{n}}\rho^{-\frac{\gamma}{p}}\|D(\theta u)\|_{L^p(B_r)}\\ &\le C\|d_j\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|Dv\|_{L^{p,\gamma}(B_r)} \le C\|d_j\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|Dv\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}.\end{aligned}$$

这样, 当 $p+\lambda_1 > n$ 时, $G_j \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$;

当 $p+\lambda_1 = n$ 时, 取 $\lambda_1' = \lambda_1 - \epsilon$, 这时类似于 (3.18), (3.19) 式的估计, $G_j \in L^{p,2\lambda_1'}(B_r)$.

综合上述, $G_j \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$ 且

$$\|G\|_{L^{p,\lambda_2}(B_r)} \le C\left(\|u\|_{L^{p,\lambda_2}(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}\right). \tag{3.20}$$

下面证明 $h_i \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$, 只需要证明 $\int_{B_r}\Gamma_i(x,x-y)g_j(y)dy \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$. 注意到假设 $u_{x_i} \in L^{p,\lambda_1}(B_r) \hookrightarrow L^{p_*,\frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)$, 所以

$$\|a_{ij}\theta_{x_i}u_{x_i}\|_{L^{p_*,\frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)} \le C\|Du\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}. \tag{3.21}$$

又 $L^{p,\lambda}(B_r) \hookrightarrow L^{p,\lambda_1}(B_r) \hookrightarrow L^{p_*,\frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)$, 所以

$$\|\theta_{x_i}f_i\|_{L^{p_*,\frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)} \le C\|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}. \tag{3.22}$$

利用 Hölder 不等式, 可得

$$\|\theta_{x_i}d_j u\|_{L^{p_*,\frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)} \le C\|d_j\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|u\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}, \tag{3.23}$$

$$\|\theta b_i u_{x_i}\|_{L^{p_*,\frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)} \le C\|b_i\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|u\|_{W^{1,p,\lambda_1}(B_r)}. \tag{3.24}$$

由 (3.21)–(3.24) 式可知 $g \in L^{p_*, \frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)$ 且

$$\|g\|_{L^{p_*, \frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)} \leq (\|u\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)} + \|f\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}). \tag{3.25}$$

当 $\lambda \leq \frac{2\mu p}{n}$ 时, 由于 $L^{p_*, \frac{2\mu p_*}{n}}(B_r) \hookrightarrow L^{p_*, \frac{\lambda p_*}{p}}(B_r)$, 所以 $g \in L^{p_*, \frac{\lambda p_*}{p}}(B_r)$, 从而由引理 2.2 知 $Tg \in L^{p,\lambda}(B_r)$ 且 $\|Tg\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \leq C\|g\|_{L^{p_*, \frac{\lambda p_*}{p}}(B_r)} \leq C\|g\|_{L^{p_*, \frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)}$. 当 $\lambda > \frac{2\mu p}{n}$ 时, 有

$$\|Tg\|_{L^{p, \frac{2p\mu}{n}}(B_r)} \leq C\|g\|_{L^{p_*, \frac{2\mu p_*}{n}}(B_r)},$$

所以 $Tg \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$, 从而 $h_i \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$, 这里 $\lambda_2 = \min\left\{\lambda, \frac{2\mu p}{n}\right\}$. 同 (3.16) 式作映射 $\widetilde{\mathbf{T}}$, 并作相似的讨论可知 $\{v_{x_i}\}_{i=1,\dots,n} = \{w_i\}_{i=1,\dots,n} \in [L^{p,\lambda_2}(B_r)]^n$, 并且由 (3.20) 和 (3.25) 式知

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda_2}(B_{\rho r})} \leq C(\|u\|_{L^{p,\lambda_2}(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}). \tag{3.26}$$

如果 $\lambda_2 = \lambda$, 那么 $v_{x_i} \in L^{p,\lambda}(B_r)$, $\forall i = 1, \dots, n$, 所以 $u_{x_i} \in L^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$; 如果 $\lambda_2 < \lambda$ (这时 $\lambda_2 = \frac{2\mu p}{n}$), 由于 $v_{x_i} \in L^{p,\lambda}(B_r)$, 所以 $u_{x_i} \in L^{p,\lambda_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 重复上述步骤有限次, 假设 k 次时 $\lambda_k = \lambda$, 这时 $u_{x_i} \in L^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 并且

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda}(B_{\rho r})} \leq C(\|u\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^{p,\lambda_{k-1}}(B_r)}). \tag{3.27}$$

我们把 $\|Du\|_{L^{p,\lambda_{k-1}}(B_r)}, \|Du\|_{L^{p,\lambda_{k-2}}(B_r)}, \dots, \|Du\|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}$ 依次代入上式, 则

$$\|Du\|_{L^{p,\lambda}(B_{\rho r})} \leq C(\|u\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^{p}(B_r)}). \tag{3.28}$$

由引理 3.1, $\|Du\|_{L^{p,\lambda}(B_{\rho r})} \leq C(\|u\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \|Du\|_{L^2(B_r)})$. 这样, 如果开集 $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset \Omega$, 那么存在常数 $C = C(n, \lambda, p, \Lambda, M, \mathrm{dist}\,(\Omega', \partial\Omega''))$, 使得 (1.5) 式成立. 再由引理 2.6 和引理 2.1 得到 (1.6) 式.

致谢 第一作者感谢苗长兴研究员的精心指导, 感谢审稿人提出宝贵的修改意见.

参 考 文 献

[1] Palagachev D. K., Softova L. G., Singular integral operators, Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDE's, *Potential Analysis*, 2004, **20**: 237–263.
[2] Sarason D., On function of vanishing mean oscillation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1975, **207**: 391–405.
[3] Chiarenza F., Frasca M., Longo P., Interior $W^{2,p}$estimates for non-divergence elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ricerche Mat.*, 1991, **40**(1): 149–168.
[4] Di Fazio G., Ragusa M. A., Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to non-divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients, *J. Funct. Anal.*, 1993, **112**: 241–256.
[5] Wang Y. S., Local $W^{2,p}$ regularity for some elliptic equations in non-divergence form, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2006, **49**(3): 709–720.
[6] Fan D. S., Lu S. Z., Yang D. C., Regularity in Morrey spaces of strong solutions to non-divergence elliptic equations with VMO coefficients, *J. Georgian Math.*, 1998, **5**(5): 425–440.
[7] Ragusa M. A., Regularity of solutions of divergence form elliptic equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2000, **128**(2): 533–540.
[8] Wang Y. S., Fine regularity of solutions in Morrey spaces for the elliptic equation in divergence form, *Chinese Annals of Mathematics, Ser, A*, 2006, **27**(4): 551–560.
[9] Chiarenza F., Frasca M., Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, *Rend. Mat. Appl.*, 1987, **7**: 273–279.