第50卷第1期 数学学报中文版 Vol.50, No.1
2007年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2007

文章编号: 0583-1431(2007)01-0131-08 **文献标识码: A**

完全非线性抛物型方程解的正则性与 Liouville 性质

邹 雄

中山大学数学与计算科学学院 广州 510275
E-mail: zouxiong@mail.sysu.edu.cn

摘 要 本文证明了: 若完全非线性一致抛物型方程 $u_t - F(D^2u) = 0$ 有 Liouville 性质, 则它的任何 $C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ 粘性解 u 一定属于 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且 u_t 一定属于 $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$.

关键词 完全非线性一致抛物型方程; 正则性; Liouville 性质
MR(2000) 主题分类 35K55
中图分类 O175.2

On the Regularity of Solutions to Fully Nonlinear Parabolic Equations via the Liouville Property

Xiong ZOU

School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, P. R. China
E-mail: zouxiong@mail.sysu.edu.cn

Abstract We show that any $C^{1+1,\,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ viscosity solution u to the fully nonlinear uniformly parabolic equation $u_t - F(D^2u) = 0$ must belong to $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ and u_t must belong to $C^{1+\alpha,\,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$, if the equation has the Liouville property.

Keywords fully nonlinear uniformly parabolic equation; regularity; Liouville property
MR(2000) Subject Classification 35K55
Chinese Library Classification O175.2

0 引言

八十年代初, Evans [1] 和 Krylov [2] 独立地对凸的完全非线性一致椭圆型方程和一致抛物型方程给出了解的 $C^{2,\alpha}$ 内估计. 此后, 对于一般的完全非线性一致椭圆型方程和一致抛物型方程是否有 $C^{2,\alpha}$ 内估计一直是一个公开问题. 目前对于一般的完全非线性一致椭圆型方程和一致抛物型方程都有的最佳估计为 $C^{1,\alpha}$ 和 $W^{2,\delta}$ 估计, 其中 α 和 δ 为正的小常数. 最近, Nadirashvili [3] 发现对于非凸或非凹的完全非线性一致椭圆型方程, 其 $C^{1,1}$ 粘性解未必属于 C^2. 因此研究何种条件下完全非线性一致椭圆型方程的 $C^{1,1}$ 粘性解属于 C^2 是一个许多人感兴趣的问题. Huang

收稿日期: 2005-08-16; 接受日期: 2005-12-20
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10426006)

在文 [4] 中对常系数完全非线性一致椭圆型方程 $F(D^2u)=0$, 证明了若方程有 Liouville 性质, 则它的任何 $C^{1,1}$ 粘性解一定属于 $C^{2,\alpha}$. 本文把他的结果推广到常系数完全非线性一致抛物型方程 $u_t-F(D^2u)=0$, 证明了若方程有 Liouville 性质, 则它的任何 $C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ 粘性解 u 一定属于 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且 u_t 一定属于 $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$, 即本文定理 6. 本文引理 1 的证明思想源于 Yuan 文 [5] 命题 2.3, 比 Huang 文 [4] 引理 1 的证明要简单一些.

1 预备知识及主要结果

设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个区域, $I=(a,b)$ 为 $\mathbb{R}$ 的一个区间. 我们考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的柱形区域 $Q=\Omega\times I$, $X=(x,t)$, $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\}$, $Q_r(X_0)=Q_r(x_0,t_0)=B_r(x_0)\times(t_0-r^2,t_0+r^2)$, $B_r=B_r(0)$, $Q_r=Q_r(0,0)$. 函数 $u(x,t)$ 为定义于 Q 上的实值函数, $D^2u(x,t)$ 表示 u 关于 x 的二阶导数构成的矩阵, $Du(x,t)$ 表示 u 关于 x 的梯度, $u_t(x,t)$ 或 $D_tu(x,t)$ 表示 u 关于 t 的导数. $⨍_Q\cdots dxdt$ 表示 $\frac{1}{|Q|}\int_Q\cdots dxdt$. 我们考虑常系数完全非线性一致抛物型方程

$$u_t-F(D^2u)=0 \tag{1}$$

粘性解的内部正则性.

定义 1[6] 我们称 F 一致椭圆 (方程 (1) 一致抛物), 如果存在两个正常数 $\lambda\le\Lambda$ (称为椭圆常数), 使得任给 $M\in S$,

$$\lambda\|N\|\le F(M+N)-F(M)\le\Lambda\|N\|,\quad\forall\, N\ge 0, \tag{2}$$

其中 $\|M\|=\sup_{|x|=1}|\,Mx\,|$, S 是实对称的 $n\times n$ 矩阵构成的空间, $N\ge 0$ 表示 N 是非负定对称矩阵.

显然, 若 $F\in C^1$ 满足 (2), 则

$$\lambda|\xi|^2\le F_{ij}(M)\xi_i\xi_j\le\Lambda|\xi|^2,\quad\forall\, M\in S,\quad\forall\,\xi\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $F_{ij}(M)=\frac{\partial F(M)}{\partial m_{ij}}$, $M=(m_{ij})$.

定义 2[7] Q 中的连续函数 u 称为方程 (1) 在 Q 中的粘性下解 (粘性上解), 如果下述条件成立:

若 $(x_0,t_0)\in Q$, $\varphi\in C^2(Q)$ 且 $u-\varphi$ 在 (x_0,t_0) 处取局部极大值, 则

$$\varphi_t(x_0,t_0)-F(D^2\varphi(x_0,t_0))\le 0$$

(若 $u-\varphi$ 在 (x_0,t_0) 处取局部极小值, 则 $\varphi_t(x_0,t_0)-F(D^2\varphi(x_0,t_0))\ge 0$).

我们称 u 为方程 (1) 的粘性解, 若 u 既是粘性下解, 又是粘性上解.

设 $0<\lambda\le\Lambda$. 任给 $M\in S$, 定义 (见文献 [6])

$$M^-(M,\lambda,\Lambda)=M^-(M)=\lambda\sum_{e_i>0}e_i+\Lambda\sum_{e_i<0}e_i,$$

$$M^+(M,\lambda,\Lambda)=M^+(M)=\Lambda\sum_{e_i>0}e_i+\lambda\sum_{e_i<0}e_i,$$

其中 $e_i=e_i(M)$ 为 M 的特征值. Q 中的连续函数 u 属于类 $S(\lambda,\Lambda,f)=S(f)$, 若 u 在粘性解意义下在 Q 中满足 $u_t-M^+(D^2u)\le f(x)$ 且 $u_t-M^-(D^2u)\ge f(x)$ (见文献 [7] 第 3.3 节).

设 $0<\alpha<1$, 我们记 (见文献 [8])

$$
\begin{aligned}
&[u]_{\alpha;Q}=\sup_{(x,t)\in Q,\,(y,s)\in Q,\,(x,t)\neq(y,s)}\tfrac{|u(x,t)-u(y,s)|}{(|x-y|^2+|t-s|)^{\frac{\alpha}{2}}},\\
&[u]_{2,\alpha;Q}=[u_t]_{\alpha;Q}+[D^2u]_{\alpha;Q},\quad \|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})}=\|u\|_{L^\infty(Q)}+[u]_{\alpha;Q},\\
&\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})}=\|u\|_{L^\infty(Q)}+\|Du\|_{L^\infty(Q)}+\|u_t\|_{L^\infty(Q)}+\|D^2u\|_{L^\infty(Q)}+[u]_{2,\alpha;Q},\\
&\|u\|_{C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q})}=\|u\|_{L^\infty(Q)}+\|Du\|_{L^\infty(Q)}+\|u_t\|_{L^\infty(Q)}+\|D^2u\|_{L^\infty(Q)}.
\end{aligned}
$$

我们称 $u\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, 如果 u 在 $\overline{Q}$ 上连续, 且有有限的范数 $\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})}$; 我们称 $u\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})$, 如果 u,Du,u_t 和 D^2u 都在 $\overline{Q}$ 上连续, 且有有限的范数 $\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q})}$; 我们称 $u\in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q})$, 如果 u 和 Du 在 $\overline{Q}$ 上连续, u_t 和 D^2u 在 Q 上有界, 且有有限的范数 $\|u\|_{C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q})}$.

对于一般的完全非线性一致椭圆型方程

$$
F(D^2u)=0, \tag{3}
$$

其粘性解最好的正则性是 $C^{1,\alpha}$ 和 $W^{2,\delta}$. 对于一般的完全非线性一致抛物型方程 (1), 其粘性解不仅有 $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}$ 和 $W^{2,1}_\delta$ 正则性, 而且 u_t 在经典意义下存在, $u_t\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$.

定理 1 (见文献 [9] 定理 4.8)　设 F 满足 (2), u 为方程 (1) 在 Q_1 中的粘性解, 则 $u\in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$
\|u\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})}\le C(\|u\|_{L^\infty(Q_1)}+|F(0)|),
$$

其中 $0<\alpha<1$ 和 C 为万有常数 (即仅依赖于 n,λ 和 Λ).

定理 2 (见文献 [9] 定理 4.9 和 [10] 第九章定理 8.3)　设 F 满足 (2), u 为方程 (1) 在 Q_1 中的粘性解, 则 u_t 在经典意义下存在, $u_t\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$
\|u_t\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})}\le C(\|u_t\|_{L^\infty(Q_1)}+|F(0)|),
$$

其中 $0<\alpha<1$ 和 C 为万有常数 (即仅依赖于 n,λ 和 Λ).

定理 3 (见文献 [7] 定理 4.11)　若 Q_1 中的连续函数 $u\in S(\lambda,\Lambda,f)$ 且 $f\in L^{n+1}(Q_1)$, 则 $u\in W^{2,1}_\delta(Q_{1/2})$ 且

$$
\|u\|_{W^{2,1}_\delta(Q_{1/2})}\le C(\|u\|_{L^\infty(Q_1)}+\|f\|_{L^{n+1}(Q_1)}),
$$

其中 δ 和 C 均为正的万有常数 (即仅依赖于 n,λ 和 Λ).

进一步, 若 F 为凸或凹泛函, 则关于方程 (1) 有著名的 Evans–Krylov 定理.

定理 4 (见文献 [9] 定理 4.13)　设 F 满足 (2), u 为方程 (1) 在 Q_1 中的粘性解, F 为凸或凹泛函, 则 $u\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$
\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})}\le C(\|u\|_{L^\infty(Q_1)}+|F(0)|),
$$

其中 $0<\alpha<1$ 和 C 为万有常数 (即仅依赖于 n,λ 和 Λ).

反之, 若 F 不是凸或凹泛函, 完全非线性一致椭圆型方程 $F(D^2u)=0$ 的 $C^{1,1}$ 粘性解未必属于 C^2 (见文献 [3]). 因此研究何种条件下 $F(D^2u)=0$ 的 $C^{1,1}$ 粘性解属于 C^2 是一个许多人感兴趣的问题.

定义 3 (见文献 [4]) 我们称方程 (3) 满足 Liouville 性质, 如果当 $u \in C^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ 为方程 (3) 的整体粘性解且在 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $|D^2u| \le K$ 时, u 必定为二次多项式, 即 $u(x,t) = \frac{1}{2}x^TBx + Cx + D$, 其中 B 为常矩阵, C 为常向量, D 为常数.

定义 4 我们称方程 (1) 满足 Liouville 性质, 如果当 $u \in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}_{\rm loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ 为方程 (1) 的整体粘性解且在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足 $|u_t| + |D^2u| \le K$ 时, u 必定为二次抛物多项式, 即 $u(x,t) = At + \frac{1}{2}x^TBx + Cx + D$, 其中 A, D 为常数, B 为常矩阵, C 为常向量.

由文献 [11] 习题 8.4.6, 热方程 $u_t - \triangle u = 0$ 满足 Liouville 性质.

命题 1 若方程 (1) 满足 Liouville 性质, 则方程 (3) 满足 Liouville 性质.

证明 设 $u \in C^{1,1}_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ 为方程 (3) 的整体粘性解且在 $\mathbb{R}^n$ 中满足 $|D^2u| \le K$. 任给 $t \in \mathbb{R}$, 令 $v(x,t) = u(x)$, 则 $v_t \equiv 0$. 从而 $v \in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}_{\rm loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ 为方程 (1) 的整体粘性解且在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足 $|v_t| + |D^2v| \le K$. 因方程 (1) 满足 Liouville 性质, 故 v 为二次抛物多项式, 从而 u 为二次多项式. 故方程 (3) 满足 Liouville 性质.

最近 Huang [4] 证明了若完全非线性一致椭圆型方程 $F(D^2u) = 0$ 有 Liouville 性质, 则它的任何 $C^{1,1}$ 粘性解一定属于 $C^{2,\alpha}$.

定理 5 (见文献 [4]) 设 $F \in C^1$ 满足 (2) 和 $F(0) = 0$. 设 $u \in C^{1,1}(\overline{B}_1)$ 为方程 (3) 在 B_1 中的粘性解. 假设方程 (3) 满足 Liouville 性质, 则任给 $0 < \alpha < 1$, $D^2u \in C^\alpha(\overline{B}_{1/2})$ 且

$$[D^2u]_{\alpha;B_{1/2}} \le C,$$

其中 C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \alpha$, $\|u\|_{C^{1,1}(\overline{B}_1)}, F$, 和 DF 的连续模.

本文把定理 5 推广到完全非线性一致抛物型方程 (1), 证明了若完全非线性一致抛物型方程 $u_t - F(D^2u) = 0$ 有 Liouville 性质, 则它的任何 $C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ 粘性解 u 一定属于 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且 u_t 一定属于 $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$, 其中本文引理 1 的证明思想源于 Yuan 文 [5] 命题 2.3, 比文献 [4] 引理 1 的证明要简单一些. 现在陈述本文的主要结果.

定理 6 设 $F \in C^1$ 满足 (2) 和 $F(0) = 0$. 设 $u \in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ 为方程 (1) 在 Q_1 中的粘性解. 假设方程 (1) 满足 Liouville 性质, 则任给 $0 < \alpha < 1$, $Du \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$, $u_t \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$, $D^2u \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$\|Du\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \le C, \quad \|u_t\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \le C, \quad [D^2u]_{\alpha;Q_{1/2}} \le C,$$

其中 C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \alpha$, $\|u\|_{C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)}, F$, 和 DF 的连续模.

注 1 由上面的命题 1, 方程 (1) 满足 Liouville 性质这一条件比方程 (3) 满足 Liouville 性质这一条件要强. 若在定理 5 的假设中把方程 (3) 满足 Liouville 性质这一较弱条件换成方程 (1) 满足 Liouville 性质这一较强条件, 则定理 5 成为定理 6 的直接推论. 事实上, 设 $u \in C^{1,1}(\overline{B}_1)$ 为方程 (3) 在 B_1 中的粘性解. 任给 $t \in \mathbb{R}$, 令 $v(x,t) = u(x)$, 则 $v_t \equiv 0$. 从而 $v \in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ 为方程 (1) 在 Q_1 中的粘性解. 因方程 (1) 满足 Liouville 性质, 由定理 6, 任给 $0 < \alpha < 1$, $D^2v \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$[D^2v]_{\alpha;Q_{1/2}} \le C,$$

其中 C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \alpha$, $\|v\|_{C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)}, F$, 和 DF 的连续模, 故任给 $0 < \alpha < 1$, $D^2u \in C^\alpha(\overline{B}_{1/2})$ 且

$$[D^2u]_{\alpha;B_{1/2}} \le C,$$

其中 C 仅依赖于 n,λ,Λ,α, $\|u\|_{C^{1,1}(\overline{B}_1)}$, F, 和 DF 的连续模.

注 2　由下面的引理 1, 若方程 (1) 有 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$ 内估计, 则方程 (1) 满足 Liouville 性质. 特别当 F 为凸或凹泛函时, 由定理 4 方程 (1) 有 $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}$ 内估计, 从而方程 (1) 满足 Liouville 性质. 在椭圆情形, 保继光和胡云娇 [12] 证明了若完全非线性一致椭圆型方程 $F(D^2u)=0$ 有 $C^{2,\alpha}$ 内估计, 则方程 $F(D^2u)=0$ 满足 Liouville 性质.

2　定理 6 的证明

我们称局部可积函数 $u\in\mathrm{VMO}(Q)$ 且其 VMO 模为 $\omega_u(R,Q)$, 如果当 $R\to 0$ 时

$$\omega_u(R,Q)=\sup_{X_0\in Q,\,0<r\le R}\fint_{Q_r(X_0)\cap Q}|u(x,t)-u_{X_0,r}|dxdt\longrightarrow 0,$$

其中 $u_{X_0,r}$ 表示 u 在 $Q_r(X_0)\bigcap Q$ 上的积分平均 (见文献 [13]).

引理 1　设 F 满足 (2) 和 $F(0)=0$, 则下述等价

(i) 存在仅依赖于 n,λ,Λ,F, 和 K 的函数 $\omega(R)$ 满足 $\lim_{R\to 0_+}\omega(R)=0$, 使得对于方程 (1) 在 Q_1 中的任何粘性解 $u\in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$, 如果 u 在 Q_1 中满足 $|u_t|+|D^2u|\le K$, 则 $D^2u\in\mathrm{VMO}(Q_{1/2})$, $\omega_{D^2u}(R)\le\omega(R)$, $u_t\in\mathrm{VMO}(Q_{1/2})$, $\omega_{u_t}(R)\le\omega(R)$.

(ii) 方程 $u_t-F(D^2u)=0$ 满足 Liouville 性质.

证明　(i) 蕴涵 (ii). 设 $u\in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{n+1})$ 为 (1) 的整体粘性解且在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足 $|u_t|+|D^2u|\le K$. 考虑

$$v_k(y,s)=\frac{u(ky,k^2s)-u(0,0)-Du(0,0)ky}{k^2},\quad k=1,2,\dots,$$

则 $v_k\in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ 为 (1) 在 Q_1 中的粘性解且在 Q_1 中 $|D_sv_k|+|D^2v_k|\le K$. 由 (i), $D^2v_k\in\mathrm{VMO}(Q_{1/2})$, $\omega_{D^2v_k}(R)\le\omega(R)$, $D_sv_k\in\mathrm{VMO}(Q_{1/2})$, $\omega_{D_sv_k}(R)\le\omega(R)$, 故任给 $\rho>0$, 当 $k\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}\fint_{Q_\rho}|D^2u-(D^2u)_{0,\rho}|&=\fint_{Q_{\rho/k}}|D^2v_k-(D^2v_k)_{0,\rho/k}|\\&\le\omega_{D^2v_k}\Big(\frac{\rho}{k}\Big)\le\omega\Big(\frac{\rho}{k}\Big)\longrightarrow 0;\\\fint_{Q_\rho}|D_tu-(D_tu)_{0,\rho}|&=\fint_{Q_{\rho/k}}|D_tv_k-(D_tv_k)_{0,\rho/k}|\\&\le\omega_{D_tv_k}\Big(\frac{\rho}{k}\Big)\le\omega\Big(\frac{\rho}{k}\Big)\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

故 D^2u 和 u_t 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中为常数, 从而 u 为二次抛物多项式.

(ii) 蕴涵 (i). 设 $Z_K=\{u\in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1): u$ 为方程 (1) 在 Q_1 中的粘性解且 u 在 Q_1 中满足 $|u_t|+|D^2u|\le K\}$. 为证 (i) 成立, 只需证当 $R\to 0$ 时

$$\sup_{u\in Z_K,\,X_0\in Q_{\frac12},\,0<r\le R}\fint_{Q_r(X_0)}\{|D^2u-(D^2u)_{X_0,r}|+|u_t-(u_t)_{X_0,r}|\}\longrightarrow 0.$$

用反证法. 假设上式不成立, 则存在 $\varepsilon_0>0$, $r_k\to 0$, $X_k=(x_k,t_k)\in Q_{1/2}$, 和方程 (1) 在 Q_1 中

的一列粘性解 $\{u_k\} \subset C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$, 满足在 Q_1 中 $|D_t u_k| + |D^2 u_k| \le K$, 且

$$⨍_{Q_{r_k}(X_k)} \{|D^2 u_k(x,t) - (D^2 u_k)_{X_k,r_k}| + |D_t u_k(x,t) - (D_t u_k)_{X_k,r_k}|\} dxdt \ge \varepsilon_0.$$

对 $(y,s) \in \overline{Q}_{\frac{1}{2r_k}}$, 令

$$v_k(y,s) = \frac{u_k(x_k + r_k y, t_k + r_k^2 s) - u_k(x_k,t_k) - Du_k(x_k,t_k) r_k y}{r_k^2},$$

则 v_k 满足方程 (1) 且

$$\|v_k\|_{C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_R)} \le C(K,R).$$

故存在子列, 仍记为 $\{v_k\}$ 和 $v_R \in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_R)$, 使得当 $k \to \infty$ 时, v_k 在 $C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_R)$ 中趋向于 v_R, 且 $|D_t v_R| + |D^2 v_R| \le K$. 因为粘性解的一致收敛极限仍为粘性解, 故 v_R 为方程 (1) 在 Q_R 中的粘性解. 由文献 [9] 定理 4.6, $v_k - v_R$ 在 Q_R 中属于类 $S(0)$. 由定理 3 中的 $W_\delta^{2,1}$ 估计, 当 $k \to \infty$ 时

$$\|D^2 v_k - D^2 v_R\|_{L^\delta(Q_{R/2})} \le C\|v_k - v_R\|_{L^\infty(Q_R)} \to 0,$$
$$\|D_t v_k - D_t v_R\|_{L^\delta(Q_{R/2})} \le C\|v_k - v_R\|_{L^\infty(Q_R)} \to 0.$$

因 $|D_t v_k| + |D^2 v_k| \le K$ 且 $|D_t v_R| + |D^2 v_R| \le K$, 故任给 $p \ge 1$, 当 $k \to \infty$ 时

$$\|D^2 v_k - D^2 v_R\|_{L^p(Q_{R/2})} \to 0, \quad \|D_t v_k - D_t v_R\|_{L^p(Q_{R/2})} \to 0.$$

由对角线法则, 存在另一子列, 仍记为 $\{v_k\}$ 和 $v \in C_{\text{loc}}^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\mathbb{R}^{n+1})$, 使得当 $k \to \infty$ 时 v_k 在 $W_{p,\text{loc}}^{2,1}(\mathbb{R}^{n+1})$ 中趋向于 v, v 为方程 (1) 的整体粘性解, 且在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中满足 $|v_t| + |D^2 v| \le K$. 由 (ii), 方程 (1) 满足 Liouville 性质, 故 v 为二次抛物多项式. 因此

$$\begin{aligned} 0 &= ⨍_{Q_1} \{|D^2 v - (D^2 v)_{0,1}| + |D_t v - (D_t v)_{0,1}|\} \\ &= \lim_{k\to\infty} ⨍_{Q_1} \{|D^2 v_k - (D^2 v_k)_{0,1}| + |D_t v_k - (D_t v_k)_{0,1}|\} \\ &= \lim_{k\to\infty} ⨍_{Q_{r_k}(X_k)} \{|D^2 u_k - (D^2 u_k)_{X_k,r_k}| + |D_t u_k - (D_t u_k)_{X_k,r_k}|\} \ge \varepsilon_0. \end{aligned}$$

矛盾.

引理 2 设 $F \in C^1$ 满足 (2) 和 $F(0) = 0$. 设 $u \in C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)$ 为方程 (1) 在 Q_1 中的粘性解且 $D^2 u \in \text{VMO}(Q_1)$, 则任给 $0 < \alpha < 1$, $Du \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$, $u_t \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$, $D^2 u \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$\|Du\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \le C, \quad \|u_t\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \le C, \quad [D^2 u]_{\alpha;Q_{1/2}} \le C,$$

其中 C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \alpha$, $\|u\|_{C^{1+1,\frac{1+1}{2}}(\overline{Q}_1)}$, $D^2 u$ 的 VMO 模和 DF 的连续模.

证明 设 $0 < h < \frac{1}{4}$, $|e| = 1$, $\triangle_{he} u(x,t) = [u(x+he,t) - u(x,t)]/h$,

$$a_{ij}(x,t) = \int_0^1 F_{ij}(\theta D^2 u(x+he,t) + (1-\theta) D^2 u(x,t)) d\theta. \tag{4}$$

因 u 为方程 (1) 在 Q_1 中的解, 故在 $Q_{3/4}$ 中

$$D_t(\triangle_{he}u(x,t)) - a_{ij}(x,t)D_{ij}(\triangle_{he}u(x,t)) = 0. \tag{5}$$

令 $u_h(x,t) = u(x+he,t)$,

$$c_{ij} = \int_0^1 F_{ij}(\theta(D^2u_h)_{X_0,r} + (1-\theta)(D^2u)_{X_0,r})d\theta. \tag{6}$$

不失一般性, 不妨设 DF 的连续模 $\eta(R)$ 为凹函数. 由 Jensen 不等式, 任给 $X_0 \in Q_{\frac{3}{4}}$,

$$\begin{aligned}
&⨍_{Q_r(X_0)} |a_{ij}(x,t) - c_{ij}|dxdt \\
\le &⨍_{Q_r(X_0)} \int_0^1 \eta(|\theta(D^2u_h - (D^2u_h)_{X_0,r}) + (1-\theta)(D^2u - (D^2u)_{X_0,r})|)d\theta dxdt \\
\le &\int_0^1 ⨍_{Q_r(X_0)} \eta(|\theta(D^2u_h - (D^2u_h)_{X_0,r}) + (1-\theta)(D^2u - (D^2u)_{X_0,r})|)dxdtd\theta \\
\le &\int_0^1 \eta\left(\theta ⨍_{Q_r(X_0)} |D^2u_h - (D^2u_h)_{X_0,r}|dxdt + (1-\theta)⨍_{Q_r(X_0)} |D^2u - (D^2u)_{X_0,r}|dxdt\right)d\theta \\
\le &\eta(\omega_{D^2u}(r)) \to 0,
\end{aligned}$$

当 $r \to 0$ 时, 故 $a_{ij} \in \mathrm{VMO}(Q_{3/4})$. 由 (2), 方程 (5) 为一致抛物型方程. 由 L^p 估计 (见文献 [13] 定理 4.1), 任给 $p > 1$,

$$\| \triangle_{he}\, u\|_{W_p^{2,1}(Q_{1/2})} \le C\| \triangle_{he}\, u\|_{L^\infty(Q_{3/4})} \le C\|Du\|_{L^\infty(Q_1)}.$$

由 Sobolev 嵌入定理 (见文 [10] 第二章定理 3.4) 可知, 任给 $0 < \alpha < 1, \triangle_{he}u \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$\| \triangle_{he}\, u\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \le C\| \triangle_{he}\, u\|_{W_p^{2,1}(Q_{1/2})} \le C\|Du\|_{L^\infty(Q_1)},$$

从而 $Du \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且 $\|Du\|_{C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \le C\|Du\|_{L^\infty(Q_1)}$, 其中 C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \alpha$, D^2u 的 VMO 模和 DF 的连续模, 故任给 $0 < \alpha < 1$, $D^2u \in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且 $[D^2u]_{\alpha;Q_{1/2}} \le C\|Du\|_{L^\infty(Q_1)}$, 其中 C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \alpha, D^2u$ 的 VMO 模和 DF 的连续模.

类似地, 设 $0 < h < \frac{1}{4}$, $\triangle_h u(x,t) = [u(x,t+h) - u(x,t)]/h$,

$$b_{ij}(x,t) = \int_0^1 F_{ij}(\theta D^2u(x,t+h) + (1-\theta)D^2u(x,t))d\theta. \tag{7}$$

因 u 为方程 (1) 在 Q_1 中的解. 故在 $Q_{3/4}$ 中

$$D_t(\triangle_h u(x,t)) - b_{ij}(x,t)D_{ij}(\triangle_h u(x,t)) = 0. \tag{8}$$

令 $v(x,t) = u(x,t+h)$,

$$d_{ij} = \int_0^1 F_{ij}(\theta(D^2v)_{X_0,r} + (1-\theta)(D^2u)_{X_0,r})d\theta. \tag{9}$$

任给 $X_0 \in Q_{\frac{3}{4}}$,

$$
\begin{aligned}
&⨍_{Q_r(X_0)} |b_{ij}(x,t) - d_{ij}| dxdt \\
\leq & ⨍_{Q_r(X_0)} \int_0^1 \eta(|\theta(D^2 v - (D^2 v)_{X_0,r}) + (1-\theta)(D^2 u - (D^2 u)_{X_0,r})|) d\theta dxdt \\
\leq & \int_0^1 ⨍_{Q_r(X_0)} \eta(|\theta(D^2 v - (D^2 v)_{X_0,r}) + (1-\theta)(D^2 u - (D^2 u)_{X_0,r})|) dxdtd\theta \\
\leq & \int_0^1 \eta\left(\theta ⨍_{Q_r(X_0)} |D^2 v - (D^2 v)_{X_0,r}| dxdt + (1-\theta) ⨍_{Q_r(X_0)} |D^2 u - (D^2 u)_{X_0,r}| dxdt\right) d\theta \\
\leq & \eta(\omega_{D^2 u}(r)) \to 0,
\end{aligned}
$$

当 $r \to 0$ 时. 故 $b_{ij} \in \mathrm{VMO}(Q_{3/4})$. 由 (2), 方程 (8) 为一致抛物型方程. 由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理可知, 任给 $0 < \alpha < 1, \triangle_h u \in C^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$
\| \triangle_h u \|_{C^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \leq C \| \triangle_h u \|_{W_p^{2,1}(Q_{1/2})} \leq C \| \triangle_h u \|_{L^\infty(Q_{3/4})} \leq C \| u_t \|_{L^\infty(Q_1)}.
$$

从而 $u_t \in C^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})$ 且

$$
\| u_t \|_{C^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q}_{1/2})} \leq C \| u_t \|_{L^\infty(Q_1)},
$$

其中 C 仅依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \alpha, D^2 u$ 的 VMO 模和 DF 的连续模.

由引理 1 和引理 2 可得定理 6 成立.

致谢 感谢北京大学数学科学学院陈亚浙教授和周蜀林教授同作者的有益讨论.

参 考 文 献

[1] Evans L. C., Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1982, **35**: 333–363.

[2] Krylov N. V., Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations, *Math. USSR Izv.*, 1983, **20**: 459–492.

[3] Nadirashvili N., Nonclassical solutions to fully nonlinear elliptic equations, preprint.

[4] Huang Q., On the regularity of solutions to fully nonlinear elliptic equations via the Liouville property, *Proc. AMS*, 2002, **130**: 1955–1959.

[5] Yuan Y., A priori estimates for solutions of fully nonlinear special Lagrangian equations, *Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non lineaire*, 2001, **18**: 261–270.

[6] Caffarelli L. A., Cabré X., Fully nonlinear elliptic equations, Providence: Amer. Math. Soc., 1995.

[7] Wang L., On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1992, **45**: 27–76.

[8] Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N., Linear and quasilinear parabolic equations, Providence: Amer. Math. Soc., 1968.

[9] Wang L., On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1992, **45**: 141–178.

[10] Chen Y., Second order parabolic partial differential equations, Beijing: Peking University Press, 2003 (in Chinese).

[11] Krylov N. V., Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces, Graduate Studies in Mathematics, Vol.12, Providence: Amer. Math. Soc., 1996.

[12] Bao J., Hu Y., Liouville theorem of fully nonlinear elliptic equations, *Journal of Beijing Normal University* (*Natural Science*), 2002, **38**: 313–315 (in Chinese).

[13] Branmanti M., Cerutti M. C., $W_p^{1,2}$ solvability for the Cauchy–Dirichlet problem for parabolic equations with VMO coefficients, *Comm. PDE*, 1993, **18**: 1735–1763.