第49卷第6期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.49, No.6
2006年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Nov., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)06-1303-08 **文献标识码: A**

非自治Schrödinger-KdV型藕合方程组的一致吸引子及其维数估计

陈光淦 蒲志林 张 健

四川师范大学数学与软件科学学院 成都 610066
E-mail: chenguanggan@hotmail.com; guangganchen@sina.com

摘 要 本文研究了非自治 Schrödinger-KdV 型藕合方程组的非线性动力学行为. 运用具有两个参数的算子簇来描述非自治无穷维动力系统的方法, 证明了该系统的一致吸引子的存在性. 进一步, 对其 Hausdorff 维数进行了估计.

关键词 自治 Schrödinger-KdV 型藕合方程组; 一致吸引子; Hausdorff 维数
MR(2000) 主题分类 35Q35, 58F39, 58F12
中图分类 O175.29

Uniform Attractor of Non-Autonomous Schrödinger-KdV Type Equations and Estimates of Its Dimension

Guang Gan CHEN Zhi Lin PU Jian ZHANG

College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066*, P. R. China*
E-mail: chenguanggan@hotmail.com; guangganchen@sina.com

Abstract In this paper, we are interested in the nonlinear dynamical behavior of non-autonomous Schrödinger-KdV type equations. Using the method of describing non-autonomous dynamical system by operator families with two parameters, we obtain the existence of their uniform attractor. Furthermore, we estimate the Hausdorff dimension of the uniform attractor.

Keywords Non-autonomous Schrödinger-KdV type equations; uniform attractor; Hausdorff dimension
MR(2000) Subject Classification 35Q35, 58F39, 58F12
Chinese Library Classification O175.29

1 引言

本文考虑非自治 Schrödinger-KdV 型藕合方程组

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{i}\varepsilon_t+\varepsilon_{xx}-bn\varepsilon+\mathrm{i}\gamma\varepsilon=g_1(x,t), \\ n_t+\beta n_{xxxx}+\mu n_{xxx}+\alpha nn_x+\nu n+\dfrac{1}{2}|\varepsilon|_x^2=g_2(x,t). \end{array}\right. \tag{1.1}$$

收稿日期: 2005-02-10; 接受日期: 2005-09-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271084);四川省重点科研基金资助项目

其中, $t \geq \tau$, $x \in \Omega$. 这里有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}$ 具有光滑的边界 $\partial\Omega$. $\varepsilon(x,\tau) = \varepsilon_\tau$, $n(x,\tau) = n_\tau$. 当 $x \in \partial\Omega$ 时, $\varepsilon(x,t) = 0$ 且 $n(x,t) = 0$. b, γ, β, μ, $\nu > 0$ 是常数. $C_b(\Omega \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ 表示在 $\Omega \times \mathbf{R}$ 上取值于 $\mathbf{R}$ 的有界连续函数的集合. $g_1(x,t)$, $g_2(x,t) \in C_b(\Omega \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$. 方程 (1.1) 模拟了 Langmuir 波与离子声波相互作用以及在浅水波中长重力波与表面张力波的相互作用等物理现象 [1, 2].

对于方程组 (1.1), 当外力项 g_1, g_2 和阻尼项为零时, 系统 (1.1) 是具有孤立波的可积 Hamiltonian 系统 [3, 4]. 进一步, 当 $\beta = 0$, $\nu = 0$ 时, 郭柏灵、苗长兴 [5] 和 Tsutsumi [6] 研究了其适定性理论. Albert 和 Pava [4] 研究了其孤立波基态解的性质. 然而当外力项 g_1, g_2 和阻尼项不为零时, 系统 (1.1) 是具有耗散性的不可积无穷维动力系统, 其解就可能出现诸如混沌等复杂现象的动力学行为. 而此时当外力项满足自治的条件, 其解的长时间动力学行为一般由全局吸引子 [7, 8], 指数吸引子 [7–9], 惯性流形 [8, 10] 和近似惯性流形 [8, 10] 描述. 另一方面, 当外力项是非自治的时候, 其动力学行为就变得更为复杂. 其中一个重要的原因, 从数学观点来看, 就是非自治的无穷维动力系统很少有不变的性质. 例如, 全局吸引子通常不再具有不变性 (而自治的无穷维动力系统的全局吸引子具有全局不变性)[11, 12].

本文研究方程组 (1.1) 在外力项 $g_1(x,t)$, $g_2(x,t)$ 是几乎周期 (almost periodic) 和拟周期 (quasi–periodic) 两种非自治情况下的动力学行为. 运用 Haraus [11], Chepyzhov 和 Vishik [12] 的理论方法, 用具有两个参数的算子簇来描述非自治动力系统, 得到了系统 (1.1) 的一致吸引子的存在性以及其 Hausdorff 维数估计.

2 预备知识

让 $H = \overline{L^2}(\Omega)$, $H^m = \{u : u, \partial^i u \in H, i = 0, 1, \ldots, m\}$, $V = \overline{H_0^1}(\Omega)$. 其相对应的范数分别为 $\forall\, u \in H$, $\|u\| := (u,u)^{1/2} = \{\int_\Omega |u|^2 dx\}^{1/2}$ 和 $\forall\, u \in H^m$, $\|u\|_{H^m} = \|\partial^m u\|$. 另外, 用 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 表示 $L^\infty(\Omega)$ 的范数. 置 $E := H \times V$ 和 $F := E \times T^m$, 这里 T^m 表示 m 维环. 为了简单起见, 本文用 C 表示所有正的常数.

定义 2.1[12] 让X表示一个距离空间. 双参数簇 $\{U_\sigma(t,\tau)\} : X \to X$ 称为 X上的过程, 如果

(1) $U_\sigma(t,s)U_\sigma(s,\tau) = U_\sigma(t,\tau)$, $\forall\, t \geq s \geq \tau$, $\forall\, \tau \in \mathbf{R}$;

(2) $U_\sigma(\tau,\tau) = I$ (identity), $\forall\, \tau \in \mathbf{R}$,

其中 $\sigma \in \Sigma$. 这里 $\Sigma := \overline{\{T(h)\sigma(x,t) = \sigma(x,t+h),\ \forall\, h \in \mathbf{R}\}} = \hbar(\sigma) \subset C_b(\mathbf{R}, X)$. $\hbar$ 称为 σ 的壳.

定义 2.2[12] 过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ 关于 $\sigma \in \Sigma$ 是一致有界, 如果对任意的集合 $B \in B(X)$, 有 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{\tau\in\mathbf{R}}\bigcup_{t\geq\tau} U_\sigma(t,\tau)B \in B(X)$ 成立, 其中 $B(X)$ 表示 X 上的所有有界集的集合.

定义 2.3[12] 对于过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$, 集合 B_0 关于 $\sigma \in \Sigma$ 是一致吸收的, 如果对任意的 $\tau \in \mathbf{R}$ 和任意的集合 $B \in B(X)$, 一定存在 $T = T(t,B) \geq \tau$, 使得 $\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau)B \in B_0$, $\forall\, t \geq T$.

定义 2.4[12] 对于过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$, 集合 P 关于 $\sigma \in \Sigma$ 是一致吸引的, 如果

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{\sigma\in\Sigma} \operatorname*{dist}_{\Sigma}(U_\sigma(t,\tau)B, P) = 0,\ \forall\, \tau \in \mathbf{R},\quad B \in B(X).$$

一个具有紧的一致吸收集的过程被称为一致紧. 一个具有紧的一致吸引集的过程被称为一致渐近紧 [12]. 显然, 一个一致紧的过程同时也是一致渐近紧的. 反之, 不一定成立.

定义 2.5[12] 一个闭集 $A_\Sigma \subset X$ 关于 $\sigma \in \Sigma$ 是过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ 的一致吸引子, 如果

(1) 它关于 $\sigma \in \Sigma$ 一致吸引 (吸引性);

(2) 它被包含于 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ 的任意一个关于 $\sigma \in \Sigma$ 的吸引集 A' 中, 即 $A_\Sigma \subseteq A'$ (最

小性).

假设不变半群 $\{T(s), s \geq 0\}$ 作用在 Σ 上, 使得 $T(s)\Sigma = \Sigma$, $s \geq 0$ (并不要求一定是变换半群). 进一步, 设

$$U_{T(s)\sigma}(t,\tau) = U_\sigma(t+s, \tau+s), \quad \forall\, \sigma \in \Sigma, \quad t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbf{R}, \quad s \geq 0. \tag{2.1}$$

在这些设置下, 一致吸引子的构建问题便归结为半群算子 $\{S(t)\}$ 的吸引子. 其中 $\{S(t)\}$ 被延拓作用在 $X \times \Sigma$ 上 [12], 满足

$$S(t)(u,\sigma) = (U_\sigma(t,0)u,\, T(t)\sigma), \quad t \geq 0, \quad (u,\sigma) \in X \times \Sigma. \tag{2.2}$$

引理 2.1[12] 设 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ 是作用在 X 上的过程, 且关于 $\sigma \in \Sigma$ 是一致渐近紧和 $(X \times \Sigma, X)$- 连续. Σ 是紧的测度空间. $\{T(t)\}$ 是作用在 Σ 上满足 (2.1) 的连续不变半群. 那么, 相应于过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$, 作用在 $X \times \Sigma$ 上的半群算子 $\{S(t)\}$ 有紧的吸引子 A. 并且满足 $S(t)A = A$, $\forall\, t \geq \tau$. 而且

(1) $\Pi_1 A = A_1 = A_\Sigma$ 是过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma \in \Sigma$ 关于 $\sigma \in \Sigma$ 的一致吸引子;

(2) $\Pi_2 A = A_2 = \Sigma$.

这里, Π_1 是 $X \times \Sigma \to X$ 的投射, Π_2 是 $X \times \Sigma \to \Sigma$ 的投射.

3 一致吸引子的存在性

引理 3.1 设 $g_1(t) = g_1(\cdot,t)$, $g_2(t) = g_2(\cdot,t) \in C_b(\mathbf{R}, H)$, 且 $\varepsilon_\tau, n_\tau \in H$, 则方程 (1.1) 存在唯一的解 $(\varepsilon, n) \in C_b([\tau, +\infty),\, H \times V) \cap L^2((\tau, T),\, H \times V)$, $\forall\, T \geq \tau$.

此引理用 Faedo–Galerkin 方法 [7] 易证, 此略去证明.

引理 3.2 设 $g_i, g_i' \in C_b(\mathbf{R}, H)$ $(i=1,2)$, 那么存在常数 C, 使得 $\|\varepsilon\|_{L^\infty}$, $\|n\|_{L^\infty}$, $\|\nabla n\|_{L^\infty} \leq C$, $t > \tau$. 进一步, 存在一个 $T(\tau, \varepsilon_\tau, n_\tau, b, \gamma, \beta, \mu, \nu)$, 使得对任意的 $t_0 \geq T$, 一定存在 C, 使得 $\|\varepsilon\|$, $\|n\|$, $\|\nabla n\| \leq C$, $t > t_0$.

证明 用 $\overline{\varepsilon}$ (复函数 ε 的共轭) 乘以方程 (1.1) 第一式, 并在 Ω 上积分, 运用 Green 公式, 然后取虚部, 再由 Young 不等式可得 $\frac{d}{dt}\|\varepsilon\|^2 \leq -\gamma\|\varepsilon\|^2 + \frac{1}{\gamma}\|g_1\|^2$. 由 Gronwall 不等式

$$\|\varepsilon\|^2 \leq \|\varepsilon(\tau)\|^2 e^{-\gamma(t-\tau)} + \frac{\|g_1\|^2}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma(t-\tau)}).$$

因此, 对任意的 $t_1 > \tau$, 存在 $\rho_1 > 0$, 使得当 $t \geq t_1$ 时, $\|\varepsilon(t)\| \leq \rho_1$, 故有 $\|\varepsilon\|_{L^\infty} < C$ 成立. 如果在上述过程中取实部, 有

$$\|\nabla\varepsilon\|^2 = -\mathrm{Re}\,(g_1, \varepsilon) - b(n\varepsilon, \varepsilon). \tag{3.1}$$

用 n 与方程 (1.1) 第二式在 H 中作内积, 运用 Green 公式、Young 不等式和 (3.1) 式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|n\|^2 + \frac{\nu}{4}\|n\|^2 + \Big(\lambda - \frac{C}{\nu}\Big)\|\nabla\varepsilon\|^2 \leq \frac{1}{\nu}\|g_2\|^2 + C + \lambda C\|g_1\| =: C.$$

这里 λ 是 Young 不等式中所产生的系数因子. 取适当的 $\lambda > 0$, 使得 $\lambda - \frac{C}{\nu} > 0$, 则有

$$\frac{d}{dt}\|n\|^2 \leq -\frac{\nu}{2}\|n\|^2 + C.$$

因此, 再由 Gronwall 不等式, 对任意的 $t_2 > t_1$, 存在 $\rho_2 > 0$, 使得 $\|n(t)\| \leq \rho_2$, $t \geq t_2$, 即有 $\|n\|_{L^\infty} < C$.

用 $-\Delta n$ 与方程 (1.1) 中的第二式在 H 中作内积

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla n\|^2+\beta\|\nabla\Delta n\|^2+\alpha(n\nabla n,-\Delta n)+\nu\|\nabla n\|^2+\frac{1}{2}(|\varepsilon|_x^2,-\Delta n)=(g_2,-\Delta n).$$

运用 Green 公式和 Schwartz 不等式

$$\alpha(n\nabla n,-\Delta n)=\frac{\alpha}{2}(\nabla n^2,-\Delta n)=\frac{\alpha}{2}(n^2,\nabla\Delta n)\le\frac{\alpha}{2}\|n\|_{L^\infty}\|n\|\,\|\nabla\Delta n\|$$

和

$$\frac{1}{2}(|\varepsilon|_x^2,-\Delta n)=\frac{1}{2}(\nabla(\varepsilon\overline{\varepsilon}),-\Delta n)=\frac{1}{2}(\varepsilon\overline{\varepsilon},\nabla\Delta n)\le\frac{1}{2}\|\varepsilon\|_{L^\infty}\|\varepsilon\|\,\|\nabla\Delta n\|.$$

再由 Schwartz 不等式和 Gagliardo–Nirenberg 不等式

$$(g_2,-\Delta n)\le\|g_2\|\,\|\Delta n\|\le\|g_2\|\,\|n\|^{1/3}\|\nabla\Delta n\|^{2/3}.$$

因此, 由 Young 不等式 $\frac{d}{dt}\|\nabla n\|^2\le-2\nu\|\nabla n\|^2+C$. 最后, 由 Gronwall 不等式, 结论成立.

引理 3.3[7] (一致 Gronwall 引理) 设 g,h,y 是定义在 $[t_0,+\infty)$ 上的正的局部可积函数. y' 也满足在 $[t_0,+\infty)$ 上局部可积, 并且 $\frac{dy}{dt}\le gy+h,\ \forall t\ge t_0$. 同时

$$\int_t^{t+r}g(s)ds\le a_1,\quad \int_t^{t+r}h(s)ds\le a_2,\quad \int_t^{t+r}y(s)ds\le a_3,\ \forall t\ge t_0.$$

这里 r,a_1,a_2,a_3 都是正的常数, 那么一定有 $y(t+r)\le(\frac{a_3}{r}+a_2)e^{a_1},\ \forall t\ge t_0$.

引理 3.4 假设 $g_i,g_i'\in C_b(\mathbf{R},H)$ $(i=1,2)$, 那么一定存在常数 C 和 $t_*\ge\tau$, 使得 $\|\nabla\varepsilon\|$, $\|\Delta n\|\le C$, $t>t_*$. 这里 t_* 仅仅依赖于 $\tau,\varepsilon_\tau,n_\tau,b,\gamma,\beta,\mu,\nu$.

证明 对 (3.1) 关于时间 t 从 t 到 $t+1$ 积分, 得

$$\int_t^{t+1}\|\nabla\varepsilon(\theta)\|^2d\theta\le\rho_1\|g_1\|+b\rho_2C\rho_1:=C. \tag{3.2}$$

用 $\Delta\varepsilon$ 与方程 (1.1) 的第一式在 H 中作内积, 然后运用 Green 公式、Young 不等式和 Gagliardo–Nirenberg 不等式, 与引理 3.2 的证明类似可得

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varepsilon\|^2\le\gamma\|\nabla\varepsilon\|^2+C. \tag{3.3}$$

又 $\int_t^{t+1}\gamma d\theta\le\gamma$, $\int_t^{t+1}Cd\theta\le C$, 由引理 3.3, 最后有 $\|\nabla\varepsilon(t)\|\le C,\ \forall t\ge t_3+1:=t_4$.

用 $\Delta^2 n$ 与方程 (1.1) 的第二式在 H 中作内积, 然后运用 Green 公式、Young 不等式和 Gagliardo–Nirenberg 不等式, 与引理 3.2 的证明类似可得

$$\frac{d}{dt}\|\Delta n\|^2\le\nu\|\Delta n\|^2+C. \tag{3.4}$$

在证明引理 3.2 时, 关于方程 (1.1) 的第二式估计 $\|n\|^2$, 如果不丢掉 $\beta\|\Delta n\|^2$, 得

$$\frac{d}{dt}\|n\|^2+2\beta\|\Delta n\|^2\le-\frac{\nu}{2}\|n\|^2+C. \tag{3.5}$$

对 (3.5) 关于时间 t 从 t 到 $t+1$ 积分, 有 $\int_t^{t+1}\|\Delta n\|^2d\theta\le C$. 又 $\int_t^{t+1}\nu d\theta\le\nu$, $\int_t^{t+1}Cd\theta\le C$, 结合引理 3.3, 便有 $\|\Delta n(t)\|\le C,\ \forall t\ge t_4+1:=t_5$. 结论成立.

设 $(\varepsilon(t),n(t))$ 是方程 (1.1) 及其初值条件的解, $U_\sigma(t,\tau):H\times V\to H\times V$, $U_\sigma(t,\tau):(\varepsilon_\tau,n_\tau)\mapsto(\varepsilon(t),n(t))$, $\forall t\ge\tau$, $\tau\in\mathbf{R}$. 并假设方程 (1.1) 的外力项 $g_1(t),g_2(t)$ 满足几乎周期条件 (almost periodic), 取值于 H.

于是, 考虑如下 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t y(t) = \Lambda y + f(y) + g(x,t) \equiv A_{g(t)}(y), \quad g \in \Sigma = \hbar(g) \subset C_b(\mathbf{R}, H), \\ y|_{t=\tau} = y_\tau. \end{cases} \tag{3.6}$$

其中

$$y(t) = (\varepsilon(t), n(t))^T,\ \Lambda = \begin{pmatrix} i\Delta - \gamma I & 0 \\ 0 & -\beta\Delta^2 - \mu\nabla\Delta - \nu I \end{pmatrix},$$

$$f(y) = \Big(-\mathrm{i}b\varepsilon, -\alpha n\nabla n - \frac{1}{2}|\varepsilon|_x^2 \Big)^T \text{ 和 } g(x,t) = (-\mathrm{i}g_1(x,t),\, g_2(x,t))^T.$$

显然, 对所有的 $g \in \Sigma$, 问题 (3.6) 有唯一解 $y(t)$ 满足引理 3.2 和引理 3.4. 因此, 相应于 (3.6) 作用在 $H \times V$ 上的过程 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$ 存在. 这里符号空间 Σ 为 $\hbar(g)$. 由前面的假设有, $\Sigma = \hbar(g) \subset\subset C_b(\mathbf{R}, H)$.

引理 3.5　过程 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$ 关于 $g \in \Sigma$ 一致有界, 一致紧且 $(E \times \Sigma, E)$- 连续.

证明　由引理 3.2, 过程 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$ 关于 $g \in \Sigma$ 一致有界. 而且集合

$$B_0 = \{(\varepsilon, n) \in E : \|\varepsilon\|_H,\, \|n\|_{H^1} \le C\}$$

关于 $g \in \Sigma$ 一致吸收. 又由引理 3.4, 集合

$$B_1 = \{(\varepsilon, n) \in H^1 \times H^2 : \|\varepsilon\|_{H^1},\, \|n\|_{H^2} \le C\}$$

关于 $g \in \Sigma$ 也一致吸收. 因此, B_1 在 E 中准紧. 所以, 过程 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g \in \Sigma$ 一致紧.

设 $u_1 = (\varepsilon_1, n_1)^T$ 和 $u_2 = (\varepsilon_2, n_2)^T$ 是方程 (1.1) 分别满足初值条件 $u_{1\tau} = (\varepsilon_{1\tau}, n_{1\tau})^T$ 和 $u_{2\tau} = (\varepsilon_{2\tau},\, n_{2\tau})^T$ 的解. 相应的各自符号函数分别为 $\tilde{g}_1 = (-\mathrm{i}g_{11}, g_{21})^T$ 和 $\tilde{g}_2 = (-\mathrm{i}g_{12},\, g_{22})^T$.

置 $w(t) = (w_1, w_2)^T = u_1(t) - u_2(t) = U_{\tilde{g}_1}(t,\tau)u_{1\tau} - U_{\tilde{g}_2}(t,\tau)u_{2\tau}$ 和 $q = (q_1, q_2)^T = \tilde{g}_1 - \tilde{g}_2 = (-ig_{11} + \mathrm{i}g_{12}, g_{21} - g_{22})^T$, 使满足

$$\begin{cases} \partial_t w_1 = \mathrm{i}\Delta w_1 - \mathrm{i}bn_1 w_1 - \mathrm{i}b\varepsilon_2 w_2 - \gamma w_1 + q_1, \\ \partial_t w_2 = -\beta\Delta^2 w_2 - \mu\nabla\Delta w_2 - \alpha n_1 \nabla w_2 - \alpha w_2 \nabla n_2 - \dfrac{1}{2}\nabla(\varepsilon_1 \overline{w_1}) - \dfrac{1}{2}\nabla(w_1 \overline{\varepsilon_2}) + q_2. \end{cases} \tag{3.7}$$

用 w_1 与 (3.7) 式中的第一式在 H 中作内积, 运用 Green 公式, 然后取实部, 得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_1\|^2 \le -\gamma\|w_1\|^2 + b\|\varepsilon_2\|_{L^\infty}\|w_2\|\,\|w_1\| + \|q_1\|\,\|w_1\|. \tag{3.8}$$

用 $-\Delta w_2$ 与 (3.7) 的第二式在 H 中作内积, 运用 Green 公式、Young 不等式和 Gagliardo–Nirenberg 不等式, 有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla w_2\|^2 \le -\frac{\beta}{2}\|\nabla\Delta w_2\|^2 + C\|\nabla w_2\|^2 + C\|w_2\|^2 + C\|w_1\|^2 + C\|q\|^{3/2}\|w_2\|^{1/2}. \tag{3.9}$$

让 (3.8) 与 (3.9) 式相加并运用 Young 不等式和有界区域上的紧嵌入定理：$H^1 \hookrightarrow H$ 是紧的, 故

$$\frac{d}{dt}(\|w_1\|^2 + \|\nabla w_2\|^2) \le C(\|w_1\|^2 + \|\nabla w_2\|^2) + C\|q_1\|^2 + C\|q_2\|^2.$$

再由 Gronwall 不等式, 易得

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|w_1\|^2 + \|\nabla w_2\|^2 \le [\|w(\tau)\|^2 + C(\|q_1\|^2 + \|q_2\|^2)(t-\tau)]e^{C(t-\tau)} \\ &= [\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^2 + C(\| - ig_{11} + ig_{12}\|^2 + \|g_{21} - g_{22}\|^2)(t-\tau)]e^{C(t-\tau)}, \end{aligned}$$

故结论成立.

设 $S(t)$ 是由 (2.2) 决定, 作用在 $E\times\Sigma$ 上的半群.

定理 3.1 设 $g(x,t)$ 为几乎周期 (almost periodic) 函数, 则过程 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\Sigma$ 关于 $g\in\Sigma$ 有一致吸引子 A_Σ.

证明 由引理 3.5 知, 过程 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\Sigma$ 满足引理 2.1 的所有条件. 因此, 半群 $S(t)$ 在 $E\times\Sigma$ 上有紧的吸引子 A. 而且, $\Pi_1 A=A_1=A_\Sigma$ 是过程 $\{U_\sigma(t,\tau)\}$, $\sigma\in\Sigma$ 关于 $\sigma\in\Sigma$ 的一致吸引子. 这里 Π_1 是 $X\times\Sigma\to X$ 的投射.

定理 3.2 设 $g(x,t)$ 为拟周期 (quasi–periodic) 函数, 则过程 $\{U_g(t,\tau)\}$, $g\in\Sigma$ 关于 $g\in\Sigma$ 有一致吸引子 A_Σ.

此定理的证明完全类似定理 3.1.

4 一致吸引子的Hausdorff 维数

下面估计非自治系统 (1.1) 在外力项为拟周期 (quasi–periodic) 函数条件时具有的一致吸引子的 Hausdorff 维数的上界. 而外力项为拟周期 (quasi–periodic) 函数的非自治系统的符号空间是 m 维环 T^m[12]. 在区域 $\Omega\subset\subset\mathbf{R}$ 上, 考虑非自治 Schrödinger-KdV 型藕合系统 (3.6), 其中

$$\begin{aligned}&g(x,t)=G(x,\varpi(t));\quad \varpi(t)=[\alpha t+\varpi_0]=(\alpha t+\varpi_0)(\operatorname{mod}2\pi)^m,\\&\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)\in\mathbf{R}^m,\quad \varpi_0\in T^m.\end{aligned}\tag{4.1}$$

这里

$$G(x,\varpi)\in C(H,T^m),\quad G_{\varpi_j}(x,\varpi)\in C(H,T^m),\quad \varpi=(\varpi_1,\varpi_2,\ldots,\varpi_m),\quad G(x,\varpi_1,\varpi_2,\ldots,\varpi_m).$$

关于每个变量 ϖ_j $(j=1,2,\ldots,m)$ 是周期为 2π 的周期函数, 那么系统 (3.6) 等价于如下自治系统

$$\begin{cases}\partial y=\Lambda y+f(y)+G(x,\varpi),\quad \partial\varpi=\alpha,\\ y|_{t=0}=y_0,\quad \varpi|_{t=0}=\varpi_0,\quad y_0\in E,\quad \varpi_0\in T^m.\end{cases}\tag{4.2}$$

或如下简略形式

$$\partial\varphi=M(\varphi),\quad \varphi|_{t=0}=\varphi_0,\quad \varphi=(y,\varpi)\in F,\quad \varphi_0=(y_0,\varpi_0)\in F,\tag{4.3}$$

其中, $M(\varphi)=(A(u,\varpi),\alpha)$, F 如前面所定义.

由于半群算子 $\{S(t)\}((S(t)\varphi_0=\varphi(t))$ 在吸引子 A $(A\subset\subset E\times T^m)$ 上拟微分. 因此, $S'(t,\varphi_0)z_0=z(t)$ 满足下列 Fréchet 微分方程

$$\partial_t z=M'(\varphi)z=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\Delta u-\mathrm{i}bnu-\gamma u-\mathrm{i}b\varepsilon v-\mathrm{i}G_1'(x,\varpi)\chi\\ -\dfrac12\nabla(\varepsilon\overline{u}+u\overline{\varepsilon})-\beta\Delta^2v-\mu\nabla\Delta v-\alpha v\nabla n-\nu v+G_2'(x,\varpi)\chi\\ 0\end{pmatrix},\tag{4.4}$$

其中 $z(t)=(u(t),v(t),\chi)\in F:=E\times T^m:=H\times V\times T^m$, $z_0=(u_0,v_0,\chi_0)\in F$.

定理 4.1 设外力项 $g(x,t)$ 为拟周期 (quasi–periodic) 函数, 那么非自治 Schrödinger-KdV 型藕合系统 (3.6) 的一致吸引子 A_Σ 的 Hausdorff 维数满足

$$\dim A_\Sigma\le m+K,$$

其中, K 仅依赖于 m,n,C,g_i $(i=1,2)$.

证明 首先

$$
\begin{aligned}
(\partial_t z, z) &= (M'(\varphi)z, z) \\
&= (i\Delta u - ibnu - \gamma u - ib\varepsilon v - iG_1'(x,\varpi)\chi, u)_H \\
&\quad + \Big(-\frac{1}{2}\nabla(\varepsilon\overline{u} + u\overline{\varepsilon}) - \beta\Delta^2 v - \mu\nabla\Delta v - \alpha v\nabla n - \nu v + G_2'(x,\varpi)\chi, v\Big)_{H^1} \\
&\le -i\|\nabla u\|^2 + bC\|u\|^2 - \gamma\|u\|^2 + bC\|v\|\|u\| + \|g_1\|\|\chi\|\|u\| \\
&\quad + \frac{\beta}{2}\|\nabla\Delta v\|^2 + \frac{C^2}{2\beta}\|u\|^2 - \beta\|\nabla\Delta v\|^2 + \alpha C\|v\|\|\Delta v\| \\
&\quad + \alpha C\|\nabla v\|\|\Delta v\| - \nu\|\nabla v\|^2 + \|g_2\|\|\chi\|\|\Delta v\| \\
&\le -i\|\nabla u\|^2 + C\|u\|^2 + C\|v\|^2 - \frac{\beta}{2}\|\nabla\Delta v\|^2 + C\|\Delta v\|^2 \\
&\quad + C\|\nabla v\|^2 + C(\|g_1\|^2 + \|g_2\|^2)\|\chi\|^2 \\
&:= M_1(u,v,\chi)^T := (L_1 u, u) + (L_2 v, v) + (L_3\chi, \chi).
\end{aligned}
$$

这里, $L_1 u = i\Delta u + Cu$, $L_2 v = \frac{\beta}{2}\Delta^3 v + C\Delta^2 v - C\Delta v + Cv$, $L_3\chi = C(\|g_1\|^2 + \|g_2\|^2)\chi$, 并且

$$
\|g_i\| = \sup_{\varpi\in T^m}\|G_{i\varpi}'(\cdot,\varpi)\| = \sup_{\varpi\in T^m}\Big(\sum_{j=1}^m \|G_{i\varpi_j}'(\cdot,\varpi)\|^2\Big)^{1/2}.
$$

置

$$
M_1 = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L_3 \end{pmatrix}, \quad 其中 \quad L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}.
$$

又因为 $\varpi_0 \in A$ 时, $|\varpi|$ 是光滑的, 故算子 L 自共轭且具有离散谱. 因此, 可设 M_1 的特征向量 $\Psi_i^{(1)} = (\Phi_i, 0)^T$, $\Psi_i^{(2)} = (0, \eta_i)^T$, 其中算子 L 在 H 中的特征向量 $\{\Phi_i\}$ 正交 ($L\Phi_i = \lambda_i\Phi_i$, $\Phi_i \in H$, $\lambda_i \to -\infty$, $i \to \infty$). $\{\eta_j\}$ $(j = 1,2,\dots,m)$ 是算子 L_3 在 T^m 中的正交特征向量 ($L_3\eta_j = \iota\eta_j$). 假定 d 较大, 设 M_1 的 d 个最大特征值排列如下

$$
\lambda_{d-m} \le \cdots \le \lambda_l \le \iota \le \cdots \le \iota \le \lambda_{l-1} \le \cdots \le \lambda_1, \tag{4.5}
$$

并设算子 L_1, L_2 的特征向量分别为 ξ_j, ζ_j. 因此

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Tr} F'(\varphi(\tau)) \circ Q_m(\tau) &= \operatorname{Re}\operatorname{Tr} F'(\varepsilon(\tau)) \circ Q_m(\tau) + \operatorname{Tr} F'(n(\tau)) \circ Q_m(\tau) + \operatorname{Tr} F'(\varpi(\tau)) \circ Q_m(\tau) \\
&= \operatorname{Re}\sum_{j=1}^{d-m}(F'(\varepsilon(\tau))\xi_j, \xi_j) + \sum_{j=1}^{d-m}(F'(n(\tau))\zeta_j, \zeta_j) + \sum_{j=1}^{d-m}(F'(\varpi(\tau))\eta_j, \eta_j) \\
&\le C\sum_{j=1}^{d-m}\|\xi_j\|_H^2 - \frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{d-m}\|\Delta\zeta_j\|_{H^1}^2 + C\sum_{j=1}^{d-m}\|\nabla\zeta_j\|_{H^1}^2 + C\sum_{j=1}^{d-m}\|\zeta_j\|_{H^1}^2 \\
&\quad + C\sum_{j=1}^{d-m}\|\zeta_j\|_H^2 + C(\|g_1\|^2 + \|g_2\|^2)\sum_{j=1}^{m}\|\eta_j\|^2.
\end{aligned}
$$

又由 Ω 有界, 故嵌入 $H^3(\Omega) \hookrightarrow H^2(\Omega)$ 紧. 因此存在 C, 使得 $\|\Delta v\|_H \le C\|\nabla\Delta v\|_H$. 进一步, $\|\nabla\zeta_j\|_{H^1} \le C\|\Delta\zeta_j\|_{H^1}$. 而且 $\|\nabla v\|_H \ge \wp_1^{1/2}\|v\|_H$, 其中 $\{\wp_j\}$ 是紧算子 $-\Delta$ 的特征值满足 $\wp_1 \le \wp_2 \le \cdots \le \wp_j \le \cdots$; $\wp_j \to +\infty$, 当 $j \to \infty$. 于是有 $\|v\|^2 \le \wp_1^{-1}\|\nabla v\|^2$, 所以

$\|\zeta_j\|_H^2 \le \wp_1^{-1}\|\nabla\zeta_j\|_H^2 = \wp_1^{-1}\|\zeta_j\|_{H^1}^2$. 于是

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr} F'(\varphi(\tau))\circ Q_m(\tau)\\ &\quad\le C\sum_{j=1}^{d-m}\|\xi_j\|_H^2 - \frac{\beta}{4}\sum_{j=1}^{d-m}\|\Delta\zeta_j\|_{H^1}^2 + C\sum_{j=1}^{d-m}\|\zeta_j\|_{H^1}^2 + C(\|g_1\|^2+\|g_2\|^2)\sum_{j=1}^{m}\|\eta_j\|^2 + C.\end{aligned}$$

由 Lieb–Thirring 不等式 [7], 有

$$\sum_{j=1}^{d-m}\|\Delta\zeta_j\|_{H^1}^2 \ge \frac{1}{|\Omega|^{\frac{4}{n}}}C(d-m)^{1+\frac{4}{n}} := C(d-m)^{1+\frac{4}{n}},$$

$$\sum_{j=1}^{d-m}\|\xi_j\|_H^2 = d-m,\ \sum_{j=1}^{d-m}\|\zeta_j\|_{H^1}^2 = d-m,\ \sum_{j=1}^{m}\|\eta_j\|^2 = d-m.$$

因此 $\operatorname{Tr} F'(\varphi(\tau))\circ Q_m(\tau) \le -C(d-m)^{1+\frac{4}{n}} + C(d-m) + C(\|g_1\|^2+\|g_2\|^2)m + C$, 故得到

$$\begin{aligned}\tilde{q}_d &\equiv \lim_{T\to+\infty}\inf\sup_{\varphi_0\in A}\Big(\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{Tr} F'(\varphi(\tau))\circ Q_m(\tau)ds\Big)\\ &\le -C(d-m)^{1+\frac{4}{n}} + C(d-m) + C(\|g_1\|^2+\|g_1\|^2)m + C.\end{aligned}$$

考虑如下方程的根 $\tilde{X}$,

$$-C\tilde{X}^{1+\frac{4}{n}} + C\tilde{X} + C(\|g_1\|^2+\|g_2\|^2)m + C = 0. \tag{4.6}$$

显然, 如果 $d > m+\tilde{X}$, 那么 $\tilde{q}_d < 0$. 而且, 对应方程 (4.6), 一定存在仅依赖 m, n, C, g_i $(i=1,2)$ 的 K, 满足 $\tilde{X} \le K$. 于是 $\tilde{q}_d \le 0$, $d-m > k$. 因此 $\dim A_\Sigma \le \dim A \le m+K$.

注 1 特别地, 如果 $n=4$, 那么 (4.6) 就是关于 $d-m$ 的二次三项式. 如果 $d-m$ 大于其正根, $d-m > \frac{C+\sqrt{C^2+4C(C(\|g_1\|^2+\|g_2\|^2)m+C)}}{2C}$. 又置 $[\frac{C+\sqrt{C^2+4C(C(\|g_1\|^2+\|g_2\|^2)m+C)}}{2C}] := K$. 那么, $\dim A \le K+m$. 这里 $[x]$ 表示比 x 严格大的最小整数.

参 考 文 献

[1] Kawahara T., Sugimoto N., and Kakutani T., Nonlinear interaction between short and long capillary gravity waves, *J. Phys. Soc Japan*, 1975, **39**: 1379–1386.

[2] Nishikawa K., Hojo H., Mima K., and Ikezi H., Coupled nonlinear electron plsma and ion-acoustic waves, *Phys. Rev. Lett.*, 1974, **33**: 148–151.

[3] Gu C. H., Soliton theory and its applications, Hangzhou: Zhejiang Science and Technology publishing House, Springer-Verlag, 1995.

[4] Albert J., Pava J. A., Existence and stability of ground-dtate solutions of Schrödinger-KdV system, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2003, **133**(5): 987–1029.

[5] Guo B. L., Miao C. X., Local well-posedness of Cauchy problem of coupled Schrödinger-KdV equations, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1998, **41**(6): 1295–1302.

[6] Tsutsumi M., Well-posedness of the Cauchy problem for a coupled Schrödinger-KdV equation, *Math. Sci. Appl.*, 1993, **2**: 513–528.

[7] Temam R., Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics, New York: Springer-Verlag, 1988.

[8] Guo B. L., Nonlinear evolution equations, Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1998 (in Chinese).

[9] Chen G. G., Pu Z. L., Exponential attractor of KDV type equation on unbounded Domain R^1, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2004, **47**(3): 441–448.

[10] Dai Z. D., Guo B. L., Inertial manifolds and approximate inertial manifolds, Beijing: Science Publishing House, 2000 (in Chinese).

[11] Haraus A., Attractors of asymptotically compact processes and applications to non-linear partial differential equations, *Comm. Partial Differential Equations*, 1988, **13**: 1383–1414.

[12] Chepyzhov V. V., Vishik M. I., Attractors ofnon-autonomous dynamical systems and their dimension, *J. Math. Pures Appl.*, 1994, **73**: 279–333.