第49卷第5期 数学学报中文版 Vol.49, No.5
2006年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-0973-12 **文献标识码: A**

分数次积分算子的交换子在齐型空间上的弱型估计

陈冬香

杭州师范学院 杭州 310012

陈杰诚

浙江大学数学系 杭州 310028
E-mail: chendx020@yahoo.com.cn; jcchen@mail.hz.zj.cn

摘 要 本文研究分数次积分交换子 $I_{\alpha,b}^m f(x)=\int_{\mathbf{X}} K_\alpha(x,y)[b(x)-b(y)]^m f(y)d\mu(y)$, 其中 $K_\alpha(x,y)=d(x,y)^{\alpha-1}$, $m\in \mathrm{N}$ 且 $b(x)\in \mathrm{BMO}(\mathbf{X},\mu)$, 证明了 $I_{\alpha,b}^m$ 是从 Orlicz 空间 $L(\log L)^m(\mathbf{X})$ 到弱 $L^q(X)$ 空间的映照. 同时还证明了分数次极大算子交换子 $M_{\alpha,b}^m$ 也有类似性质.

关键词 交换子; 分数次积分; 齐型空间
MR(2000) 主题分类 42B25, 42B30
中图分类 O174.2

Weak Type Estimates for Commutator of Fractional Integrals in Spaces of Homogeneous Type

Dong Xiang CHEN

Department of Mathematics, Hangzhou Teachers' College, Hangzhou 310012, P. R. China

Jie Cheng CHEN

Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, P. R. China
E-mail: chendx020@yahoo.com.cn; jcchen@mail.hz.zj.cn

Abstract In this paper, the authors consider the commutators of fractional integrals defined by $I_{\alpha,b}^m f(x)=\int_{\mathbf{X}} K_\alpha(x,y)[b(x)-b(y)]^m f(y)d\mu(y)$, where $K_\alpha(x,y)=d(x,y)^{\alpha-1}$, $m\in\mathrm{N}$ and $b(x)$ belongs to $\mathrm{BMO}(\mathbf{X},\mu)$. We prove that $I_{\alpha,b}^m$ maps the Orlicz space $L(\log L)^m(\mathbf{X})$ into weak $L^q(X)$, and so does the fractional maximal commutator $M_{\alpha,b}^m$.

Keywords commutator; fractional integrals; homogeneous space
MR(2000) Subject Classification 42B25, 42B30
Chinese Library Classification O174.2

1 引言及主要结果

设 $0<\alpha<n$, 定义分数次积分算子如下 $I_\alpha f(x)=\int_{R^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$. 相应的分数次交换子为

收稿日期: 2004-04-20; 接受日期: 2005-06-07
基金项目: 国家科委 973 项目 (RC971077), (1999075105); 教育部博士点基金 (20030335019) 资助

$I_{\alpha,b}^m f(x)=\int_{R^n}[b(x)-b(y)]^m \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy$, 其中 $b\in \mathrm{BMO}(R^n)$.

当 $m=1$, 写 $I_{\alpha,b}^1=[b,I_\alpha]$. 1982 年, Chanillo [1] 引进了分数次积分算子的交换子 $[b,I_\alpha]$ 并且证明了 $[b,I_\alpha]$ 是从 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 上的有界算子, 其中 $1<p<n/\alpha, 1/q=1/p-\alpha/n$. Zhang [2] 和 Cruz–Uribe Sfo 及 Fioenza [3] 分别建立了分数次积分算子交换子 $[b,I_\alpha]$ 的端点估计同时也说明了 $[b,I_\alpha]$ 不是 $(L^1,L^{n/(n-\alpha),\infty})$ 有界.

此外, Coifman, Rochberg, Weiss [4] 建立了 Calderón–Zygmund 奇异积分交换子的的 L^p 有界性. 1995 年, Pérez [5] 证明奇异积分交换子是 Orlicz 空间 $L\log L(R^n)$ 到弱 $L^1(R^n)$ 上的映照. 1996 年, Bramanti 和 Christina [6] 证明了奇异积分交换子在 $L^p(\mathbf{X})$ 上有界, 同时他们 [7] 也建立了分数次积分算子的交换子的在齐型空间中的 (L^p,L^q) 有界性. 近来, Chen 和 Sawyer [8] 得到奇异积分算子交换子在齐型空间中的端点估计. 受文 [9,10] 启发, 本文将讨论分数次积分算子的交换子在齐型空间的端点估计. 在叙述本文的主要结果前, 首先引进些概念和符号.

集合 $\mathbf{X}$ 上的拟度量 d 是一函数 $d:\mathbf{X}\times\mathbf{X}\to[0,\infty)$, 同时满足

(i) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(ii) 对于所有 $x,y\in\mathbf{X}$, 有 $d(x,y)=d(y,x)$;

(iii) 存在常数 $\kappa\geq 1$, 使得对于所有 $x,y,z\in\mathbf{X}$, 有 $d(x,y)\leq\kappa[d(x,z)+d(y,z)]$. 称 $(\mathbf{X},d,\mu)$ 为齐型空间是集合 $\mathbf{X}$, 拟度量 d 以及定义在 $\mathbf{X}$ 上的非负满足双倍条件 Borel 测度 μ, 即对于所有的 $x\in\mathbf{X}$ 及 $r>0$, 有 $\mu(B(x,2r))\leq C_1\mu(B(x,r))$.

定义齐型空间上的分数次积分如下
$$I_\alpha f(x)=\int_{\mathbf{X}\setminus\ x}\frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}}d\mu(y),$$
其中 $\alpha\in(0,1)$. 定义齐型空间上的分数次积分算子的交换子和分数次极大算子的交换子分别为
$$I_{\alpha,b}^m f(x)=\int_{\mathbf{X}\setminus x}\frac{1}{d(x,y)^{1-\alpha}}(b(x)-b(y))^m f(y)d\mu(y),$$
及
$$M_{\alpha,b}^m f(x)=\sup_B\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B|b(x)-b(y)|^m|f(y)|d\mu(y),$$
其中 $0<\alpha<1, m\in\mathrm{N}$. 当 $m=0$, M^α 即为经典的分数次极大算子.

定理 1 设 $(\mathbf{X},d,\mu)$ 是齐型空间. 又设 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbf{X},\mu)$, $0<\alpha<1$ 及 $\Phi(t)=t(1+\log^+ t)^m$, $m\in\mathrm{N}$, 则对于任意的 $\lambda>0$, 存在常数 $C>0$, 使得
$$\mu(\{x\in\mathbf{X}:|I_{\alpha,b}^m f(x)|>\lambda\})^{1/(1-\alpha)}\leq C\Phi(\Phi(\|b\|_*^m))\Big\|\Phi\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L^1}\Big[1+\alpha\log^+\Big\|\Phi\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L^1}\Big]^m.$$

分数次极大算子的交换子也有类似结果:

定理 2 设 $(\mathbf{X},d,\mu)$ 是齐型空间. 设 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbf{X},\mu)$, $0<\alpha<1$ 和 $\Phi(t)=t(1+\log^+ t)^m$, $m\in\mathrm{N}$, 则对于任意的 $\lambda>0$, 存在常数 $C>0$, 使得
$$\mu(\{x\in\mathbf{X}:|M_{\alpha,b}^m f(x)|>\lambda\})^{1/(1-\alpha)}\leq C\Phi(\Phi(\|b\|_*^m))\Big\|\Phi\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L^1}\Big[1+\alpha\log^+\Big\|\Phi\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)\Big\|_{L^1}\Big]^m.$$

定理 3 设 $\Phi(t)=t(1+\log^+ t)^m$ 及 $\Psi(t)=\Phi(\Phi(t))$, 则存在常数 $C>0$, 使得对于所有的具有紧支集的有界函数 f, 有
$$\begin{aligned}&\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu\big(y\in\mathbf{X}:|I_{\alpha,b}^m f(y)|>t\big)^{1/(1-\alpha)}\\ &\quad\leq C\Psi(\|b\|_*^m)\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu\big(y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)>t\big)^{1/(1-\alpha)}\end{aligned}$$
成立.

2 预备知识

本节将介绍有关极大函数和 Orlicz 空间的有关知识.

称 $\Phi(t)$ 是 Yong 函数, 如果 $\Phi(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上是连续的非负严格递增的凸函数, 并且 $\Phi(0)=0$ 及当 $t\to\infty$ 时, $\Phi(t)\to\infty$.

本文中任何 Young 函数 Φ 都是双倍的, 也即对于 $t>0$, 有 $\Phi(2t)\le C\Phi(t)$. 定义函数 f 在球 B 上的 Φ 平均为

$$\|f\|_{\Phi,B}=\inf\Big\{\lambda>0:\frac{1}{\mu(B)}\int_B\Phi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)d\mu(x)\le 1\Big\}.$$

Orlicz 空间中一个重要的性质是广义 Hölder 不等式

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B|fg|d\mu(y)\le\|f\|_{\Phi,B}\|g\|_{\bar{\Phi},B},$$

其中 $\bar{\Phi}$ 是 ΦYoung 补函数.

类似于文 [6], 我们定义极大函数 $Mf(x)$, sharp 极大函数 $M^\sharp f(x)$ 以及它们相应的二进极大函数和二进 sharp 极大函数, $\mathrm{BMO}(\mathbf{X},\mu)$ 如下

$$Mf(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)|d\mu(y),\quad M^\sharp f(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)-f_B|d\mu(y),$$

其中 $f_B=\mu(B)^{-1}\int_B f(y)d\mu(y)$ 和 $\mathbf{X}$ 中的二进极大函数和二进 sharp 极大函数分别定义为

$$M^df(x)=\sup_{x\in Q:\,Q\subset\mathcal{D}_{\mathbf{m}}}\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)|d\mu(y)$$

和

$$M^{\sharp,d}f(x)=\sup_{x\in Q:\,Q\subset\mathcal{D}_{\mathbf{m}}}\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)-f_B|d\mu(y),$$

这里 m 是与一固定的大非负整数有关

$$\|f\|_*=\sup_x M^\sharp f(x)=\sup_B\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)-f_B|d\mu(y),\quad \mathrm{BMO}(\mathbf{X},\mu)=\{f\in L_{loc}(X):\|f\|_*<\infty\},$$

其中 $\mathcal{D}_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}\in\mathbf{Z})$ 来自 $\mathcal{D}=\bigcup_{\mathbf{m}\in\mathbf{Z}}\mathcal{D}_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{X}$ 中的一种二进分解. 关于 $\mathbf{X}$ 中的二进分解 $\mathbf{X}$, 见文 [6]. 下述引理是证明定理的重要工具 [6].

引理 2.1 (a) 设 f 是 $\mathbf{X}$ 中有紧支集的有界函数, 则存在正常数 C 有下述 "good-λ" 不等式

$$\mu\big(\{y\in\mathbf{X}:M^df(y)>\lambda,M_\delta^{\sharp,d}f(y)\le\epsilon\lambda\}\big)\le C\epsilon\mu\big(\{y\in\mathbf{X}:M^df(y)>\lambda/2\}\big)$$

对于所有的 $\lambda,\epsilon>0$ 成立.

(b) 设 $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 是双倍函数, 则存在正的绝对常数 C, 使得

$$\sup_{\lambda>0}\varphi(\lambda)\mu\big(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^df(y)>\lambda\}\big)\le C\sup_{\lambda>0}\varphi(\lambda)\mu\big(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^{\sharp,d}f(y)>\lambda\}\big)$$

对于所有使得不等式左边有限的函数 f 成立.

定义与 $M_{\Phi,B}f(x)=\sup_B\|f\|_{\Phi,B}$ 相对应的分数次极大算子

$$M_{\Phi,\alpha,B}f(x)=\sup\nolimits_B\mu(B)^\alpha\|f\|_{\Phi,B}.$$

3 引理及其证明

引理 3.1[7] 设 $0<\alpha<1$, 又设 $(\mathbf{X},d,\mu)$ 是齐型空间.

(i) 如果 f 属于 $L^p,1<p<1/\alpha$, 则对于几乎每一 $x\in\mathbf{X}$, $I_\alpha f(x)$ 绝对收敛, 对于给定的 q 且 $1/q=1/p-\alpha$, 有 $\|I_\alpha f(x)\|_{L^q}\le C\|f(x)\|_{L^p}$.

(ii) 如果 f 属于 L^1, 则对于几乎每一 $x \in \mathbf{X}$, $I_\alpha f(x)$ 绝对收敛, 对于 $\lambda > 0$, 有 $\mu\big(\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}\big) \le \big(\frac{C\|f\|_{L^1}}{\lambda}\big)^{1/(1-\alpha)}$. 上述不等式中的 C 与 f 无关.

引理 3.2 设 $0 < \alpha < 1$, 则对于任意的 $0 < \delta < 1$, 存在仅与 δ 有关的常数 $C > 0$, 使得对于对于所有的具有紧支集的有界函数 f, $M_\delta^\sharp(I_\alpha f)(x) \le CM^\alpha f(x)$.

引理 3.2 的证明 给定 $x \in \mathbf{X}$ 及一包含 x 的球 $B = B(x_0, r)$, 注意到对于 $0 < \delta < 1$ 及 $a, b \in R$, 有不等式 $\big||a|^\delta - |b|^\delta\big| \le |a-b|^\delta$. 仅需证明

$$\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |I_\alpha f(y) - \lambda|^\delta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{\delta}} \le CM^\alpha f(x). \tag{3.0}$$

将 f 分解为 $f = f_1 + f_2$ 其中 $f_1 = f\chi_{2\kappa B}$. 令

$$\lambda = \frac{1}{\mu(B)}\int_B I_\alpha f_2(w) d\mu(w),$$

则

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |I_\alpha f(y) - \lambda|^\delta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\le C_\delta\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |I_\alpha f_1(y)|^\delta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{\delta}} + C_\delta\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |I_\alpha f(y) - \lambda|^\delta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= C_\delta(I + II).
\end{aligned}$$

因为 $0 < \delta < 1$ 并且注意到 I_α 是弱 $(1, q)$ 型, $q = 1/(1-\alpha)$. 由 Kolmogrov 不等式 [9], 则

$$\begin{aligned}
I &= \mu(B)^{-1/q}\frac{\|[I_\alpha f_1]\chi_B\|_\delta}{\mu(B)^{\frac{1}{\delta}-1/q}} \le C\mu(B)^{\alpha-1}\|I_\alpha f_1\|_{WL^q} \\
&\le C\mu(B)^{\alpha-1}\int_{2\kappa B}|f(y)|d\mu(y) \le CM^\alpha f(x).
\end{aligned}$$

现估计 II, 对于任意的 $y \in B$, 考虑 $|I_\alpha f_2(y) - \lambda|$. 因为 x_0, y, $w \in B(x, r)$ 及 $z \in \mathbf{X}\backslash(2\kappa B(x_0, r))$, 易知 $d(w, z) > \kappa d(y, w)$ 和 $d(x_0, z) \sim d(x, z) \sim d(w, z) \sim d(y, z)$, 则

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f_2(y) - \lambda| &\le \frac{1}{\mu(B)}\int_B\int_{\mathbf{X}\backslash 2\kappa B}\left|\frac{1}{d(y,z)^{1-\alpha}} - \frac{1}{d(w,z)^{1-\alpha}}\right||f(z)|d\mu(z)d\mu(x) \\
&\le \frac{1}{\mu(B)}\int_B\int_{\mathbf{X}\backslash 2\kappa B}\frac{d(y,z)^{1-\alpha} - d(w,z)^{1-\alpha}}{d(y,z)^{1-\alpha}d(w,z)^{1-\alpha}}|f(z)|d\mu(z)d\mu(w) \\
&\le \frac{1}{\mu(B)}\int_B\int_{\mathbf{X}\backslash 2\kappa B}\frac{d(y,w)^{(1-\alpha)\theta}d(w,z)^{(1-\alpha)\theta}}{d(w,z)^{2(1-\alpha)}}|f(z)|d\mu(z)d\mu(w) \\
&\le C\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left(\sum_{j=1}^\infty\int_{2^j\kappa r \le d(x_0,z) < 2^{j+1}\kappa r}\frac{\mu(B)^{\theta(1-\alpha)}}{\mu(2^j\kappa B)^{(1+\theta)(1-\alpha)}}|f(z)|d\mu(z)\right)d\mu(w) \\
&\le C\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left(\sum_{j=1}^\infty\mu(B)^{\theta(1-\alpha)}\mu(2^{j+1}\kappa B)^{(1+\theta)(-1+\alpha)}\int_{d(x_0,z)<2^{j+1}\kappa r}|f(z)|d\mu(z)\right)d\mu(w) \\
&\le C\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left(\sum_{j=1}^\infty\mu(B)^{\theta(1-\alpha)}\mu(2^{j+1}\kappa B)^{(1+\theta)(-1+\alpha)}\mu(2^{j+1}\kappa B)^{1-\alpha}M^\alpha f(x)\right)d\mu(w) \\
&\le \sum_{j=1}^\infty\mu(\kappa B)^{\theta(1-\alpha)}\mu(2^{j+1}\kappa B)^{(1+\theta)(-1+\alpha)}\mu(2^{j+1}\kappa B)^{1-\alpha}M^\alpha f(x) \\
&\le \sum_{j=1}^\infty C_1^{j(1+\theta)(-1+\alpha)}C_1^{j(1-\alpha)}M^\alpha f(x) \le CM^\alpha f(x).
\end{aligned}$$

其中使用了以下事实

$$\mu(B(x_0,2^{j+1}\kappa r))\leq C\mu(B(w,d(w,z)))$$

(见文 [8] 中的 5.86) 和 $\mu(2^j\kappa B)\leq C_1^j\mu(\kappa B)$.

由上述估计及 Hölder 不等式可得

$$II\leq C\frac{1}{\mu(B)}\int_B|I_\alpha f_2(y)-\lambda|d\mu(y)\leq CM^\alpha f(x).$$

综合对 I 和 II 的估计可证不等式 (3.0). 证毕.

引理 3.3 设 $0<\alpha<1$, 则存在常数 $C_2,C_3>0$, 使得对于任意在 X 具有紧支集的有界函数 f,

$$C_2M^\alpha M^m f(x)\leq M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)\leq C_3M^\alpha M^m f(x),\tag{3.1}$$

其中

$$M^k=\underbrace{M\circ M\circ\cdots\circ M}_{k}.$$

引理 3.3 的证明 首先证明不等式

$$M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)\leq C_3M^\alpha M^m f(x).$$

对于任意给定的 $x\in\mathbf{X}$ 及包含 x 的球 B. 由 $M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)$ 和 $M^\alpha M^m f(x)$ 定义, 仅需证明存在与 f,x 和 B 无关的常数 $C>0$, 使得不等式

$$\|f\|_{L(\log L)^m,B}\leq C\frac{1}{\mu(B)}\int_B M^m f(x)d\mu(x)$$

成立. 此结果见文 [11] 中的 (66) 式.

其次, 只需证明不等式

$$M^\alpha M^m f(x)\leq CM_{L(\log L)^m,\alpha}f(x).$$

当 $m=1$ 时, 对于任意给定的 $x\in\mathbf{X}$ 及包含 x 的球 B. 将 f 分解为 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{c_\beta B}, c_\beta=\kappa\beta+\kappa^2\beta+\kappa^2$ 及 $\beta>0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B Mf(y)d\mu(y)&\leq\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B Mf_1(y)d\mu(y)+\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B Mf_2(y)d\mu(y)\\&=A_1+A_2.\end{aligned}$$

现估计 A_2, 我们断言: 对于任意的 $y,z\in B$,

$$\mu(B)^\alpha Mf_2(y)\leq CM^\alpha f(z).\tag{3.2}$$

对于任意包含 y 的球 B' 且 $B'\cap(\mathbf{X}\backslash c_\beta B)\neq\emptyset$. 因为 $B'\cap B\neq\emptyset$, 则 $z\in B\subset c_\beta B'$, 从而

$$\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B|f_2(y)|d\mu(y)\leq C\mu(c_\beta B')^{\alpha-1}\int_{c_\beta B'}|f_2(y)|d\mu(y)\leq CM^\alpha f(z).$$

因此

$$\begin{aligned}\mu(B)^\alpha Mf_2(y)&=\mu(B)^\alpha\sup_{y\in B'}\frac{1}{\mu(B')}\int_{B'}|f_2(y)|d\mu(y)+\mu(B)^\alpha\sup_{y\in B''}\frac{1}{\mu(B'')}\int_{B''}|f_2(y)|d\mu(y)\\&=\mu(B)^\alpha\sup_{y\in B'}\frac{1}{\mu(B')}\int_{B'}|f_2(y)|d\mu(y)\leq CM^\alpha f(z),\end{aligned}$$

其中 $B=B'\cup B'', B'\cap(\mathbf{X}\backslash c_\beta B)\neq\emptyset$ 和 $B''\cap(\mathbf{X}\backslash c_\beta B)=\emptyset$.

由上述不等式易知

$$A_2\leq C\frac{1}{\mu(B)}\int_B\inf_z M^\alpha f(z)d\mu(y)\leq CM^\alpha f(z)\leq CM_{L\log L,\alpha}f(z)$$

其中使用以下事实:

$$M^{\alpha}f(z)\le CM_{L\log L,\alpha}f(z).$$

此不等式由 $M^{\alpha}f(z)$ 定义和 Luxemburg 范数易得.

现估计 A_1. 从文 [6] 中引理 3.3 证明知

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B Mf(y)d\mu(y)\le C\|f\|_{L\log L,B}, \tag{3.3}$$

且 $\mathrm{supp}f\subset B$. 用 $c_\beta B$ 和 f_1 分别代替 (3.3) 式中的 B 和 f, 则

$$A_1\le C\mu(c_\beta B)^{\alpha}\frac{1}{\mu(c_\beta B)}\int_{c_\beta B}Mf_1(y)d\mu(y)\le C\mu(c_\beta B)^{\alpha}\|f\|_{L\log L,B}\le CM_{L\log L,\alpha}f(x).$$

由此不等式和对 A_2 的估计可得 $m=1$ 时的证明.

类似情形 $m=1$, 考虑

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B M^m f(y)d\mu(y)&\le\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B M^m f_1(y)d\mu(y)+\frac{1}{\mu(B)^{1-\alpha}}\int_B M^m f_2(y)d\mu(y)\\&=A_1'+A_2'.\end{aligned}$$

由 (3.2) 式, 知

$$\mu(B)^{\alpha}Mf_2(y)\le C\inf_{z\in B}Mf(z),\quad\forall y\in B.$$

由数学归纳法易证

$$\mu(B)^{\alpha}M^m f(y)\le C\inf_{z\in B}Mf(z),\quad\forall y\in B,$$

那么

$$\begin{aligned}A_2'&\le C\frac{1}{\mu(B)}\int_B\inf_{z\in B}M^{\alpha}f(z)d\mu(y)\\&\le CM^{\alpha}f(x)\le CM_{L\log L,\alpha}f(x)\le CM_{L(\log L)^m,\alpha}f(x).\end{aligned}$$

对于 A_1', 应用归纳法并使用类似于文 [6] 中 (4) 式证明可得: 对于所有的 $\mathrm{supp}f\subset B$ 的函数 f, 有

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B M^m f(y)d\mu(y)\le C\bigg(1+\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)|(\log^+(|f(y)|))^m d\mu(y)\bigg). \tag{3.4}$$

最后, 由 $c_\beta B$ 代替 (3.4) 中的 B 及对 A_2' 的估计可得

$$\begin{aligned}A_1'+A_2'&\le\mu(c_\beta B)^{\alpha}\frac{1}{\mu(c_\beta B)}\int_{c_\beta B}M^m f_1(y)d\mu(y)+CM_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)\\&\le CM_{L(\log L)^m,\alpha}f(x).\end{aligned}$$

引理证毕. 证毕.

关于交换子的 sharp 函数的点态估计.

引理 3.4 设 I_α 是分数次积分算子及 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbf{X},\mu)$, 则对于任意的 $0<\delta<\varepsilon<1$, 存在仅与 δ 有关的常数 $C>0$, 使得对于具有紧支集的有界函数 f, 有

$$M_\delta^{\sharp}(I_{\alpha,b}^m(f))(x)\le C\bigg(\sum_{j=0}^{m-1}\|b\|_*^{m-j}M_\varepsilon(I_{\alpha,b}^j(f))(x)+\|b\|_*^m M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)\bigg).$$

引理 3.4 的证明 对于给定的 $x\in\mathbf{X}$ 及包含 x 的球 $B=B(x_0,r)$, 将 f 分解为 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{2\kappa B}$.

设 $\lambda = \frac{1}{\mu(B)}\int_B I_\alpha((b-b_{2\kappa B})^m f_2)(w)d\mu(w)$. 仅需证明

$$\begin{aligned}&\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |I_{\alpha,b}^m(f)(y)-\lambda|^\delta d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{\delta}}\\ &\quad\le C\bigg(\sum_{j=0}^{m-1}\|b\|_*^{m-j}M_\varepsilon(I_{\alpha,b}^j(f))(x)+\|b\|_*^m M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)\bigg),\end{aligned}\tag{3.5}$$

类似文 [10], 有

$$I_{\alpha,b}^m(f)(x)=\sum_{j=0}^{m-1}C_{j,m}(b(x)-\lambda)^{m-j}I_{\alpha,b}^j(f)(x)+I_\alpha((b-\lambda)^m f)(x).\tag{3.6}$$

考虑

$$\begin{aligned}&\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |I_{\alpha,b}^m(f)(y)-\lambda|^\delta d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{\delta}}\\ \le\ &\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B\bigg|\sum_{j=0}^{m-1}C_{j,m}(b(x)-\lambda)^{m-j}I_{\alpha,b}^j(f)(y)+I_\alpha((b-\lambda)^m f)(y)-\lambda\bigg|^\delta d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{\delta}}\\ \le\ &C\sum_{j=0}^{m-1}\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B(b(x)-\lambda)^{(m-j)\delta}|I_{\alpha,b}^j(f)(y)|^\delta d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{\delta}}\\ &+\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|I_\alpha((b-\lambda)^m f_1)(y)|^\delta d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{\delta}}+\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|I_\alpha((b-\lambda)^m f_2)(y)-\lambda|^\delta d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{\delta}}\\ =\ &C(U+V+W).\end{aligned}$$

对于 U, 使用指数为 (r,r') 的 Hölder 不等式, 其中 $1<r<\varepsilon/\delta$.

$$\begin{aligned}U&\le C\sum_{j=0}^{m-1}\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|(b(x)-\lambda)^{(m-j)r'\delta}|d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{r'\delta}}\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B|I_{\alpha,b}^j(f)(y)|^{r\delta}d\mu(y)\bigg)^{\frac{1}{r\delta}}\\ &\le C\sum_{j=0}^{m-1}\|b\|_*^{m-j}M_{r\delta}(I_{\alpha,b}^j(f))(y)\le C\sum_{j=0}^{m-1}\|b\|_*^{m-j}M_\varepsilon(I_{\alpha,b}^j(f))(y).\end{aligned}\tag{3.7}$$

对于 V, 注意到 I_α 是弱 $(1,q)$ 型并使用 Kolmogorov 不等式和广义 Hölder 不等式, 则

$$\begin{aligned}V&\le C\mu(2\kappa B)^{-1/q}\frac{\|I_\alpha((b-b_{2\kappa B})^m f\chi_{2\kappa B})\chi_{2\kappa B}\|_\delta}{|2b_0B|^{\frac{1}{\delta}-1}}\\ &\le C\mu(2\kappa B)^{-1/q}\|I_\alpha((b-b_{2\kappa B})^m f\chi_{2\kappa B})\chi_{2\kappa B}\|_{WL^q}\\ &\le C\mu(2\kappa B)^\alpha\frac{1}{\mu(2\kappa B)}\int_{2\kappa B}|(b-b_{2\kappa B})^m||f(y)|d\mu(y)\\ &\le C\mu(2\kappa B)^\alpha\|(b-b_{2\kappa B})^m\|_{(\exp L)^{1/m},2\kappa B}\|f\|_{L(\log L)^m,2\kappa B}\\ &\le C\|b\|_*^m M_{L(\log L)^m,\alpha}(f)(x).\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中, 使用了齐型空间中的 John–Nirenberg 引理, 即存在常数 C, 使得对于所有 $\mathbf{X}$ 中的球

$$\|(b-b_{2\kappa B})^m\|_{(\exp L)^{1/m},2\kappa B}\le C\|b\|_*^m.$$

最后估计 W, 类似于引理 3.2 中证明中的 II, 对于任意的 $y\in B$, 考虑

$$|I_\alpha\big((b-b_{2\kappa B})^m f_2\big)(y)-\lambda|.$$

因为 $x_0,\ y,w\in B(x_0,r)$ 及 $z\in\mathbf{X}\backslash 2\kappa B(x_0,r))$, 易得

$$d(w,z)>\kappa d(y,w)\ \text{ 和 }\ d(x_0,z)\sim d(x,z)\sim d(w,z)\sim d(y,z).$$

使用广义 Hölder 不等式, 得

$$
\begin{aligned}
&|I_\alpha\big((b-b_{2b_0B})^m f_2\big)(y)-\lambda| \\
&\le \frac{1}{\mu(B)}\int_B\int_{\mathbf{X}\setminus 2\kappa B}\left|\frac{1}{d(y,z)^{1-\alpha}}-\frac{1}{d(w,z)^{1-\alpha}}\right||b(z)-b_{2\kappa B}|^m|f(z)|d\mu(z)d\mu(w)\\
&\le \frac{1}{\mu(B)}\int_B\int_{\mathbf{X}\setminus 2\kappa B}\frac{d(y,w)^{(1-\alpha)\theta}d(w,z)^{(1-\alpha)\theta}}{d(w,z)^{2(1-\alpha)}}|b(z)-b_{2\kappa B}|^m|f(z)|d\mu(z)d\mu(w)\\
&\le C\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left(\sum_{j=1}^\infty\int_{2^j\kappa r\le d(x_0,z)<2^{j+1}\kappa r}\frac{\mu(B)^{\theta(1-\alpha)}}{\mu(2^j\kappa B)^{(1+\theta)(1-\alpha)}}|b(z)-b_{2\kappa B}|^m|f(z)|d\mu(z)\right)d\mu(w)\\
&\le C\sum_{j=1}^\infty\frac{\mu(B)^{\theta(1-\alpha)}}{\mu(2^j\kappa B)^{(1+\theta)(1-\alpha)}}\frac{1}{\mu(B)}\int_B\left(\int_{d(x_0,z)<2^{j+1}\kappa r}|b(z)-b_{2^{j+1}\kappa B}|^m|f(z)|d\mu(z)d\mu(w)\right.\\
&\quad\left.+|b_{2\kappa B}-b_{2^{j+1}\kappa B}|^m\int_{d(x_0,z)<2^{j+1}\kappa r}|f(z)|d\mu(z)d\mu(w)\right)\\
&\le C\sum_{j=1}^\infty\frac{\mu(\kappa B)^{\theta(1-\alpha)}}{\mu(2^j\kappa B)^{(1+\theta)(1-\alpha)}}\mu(2^j\kappa B)\|(b-b_{2^{j+1}\kappa B})^m\|_{(\exp L)^{1/m},2^{j+1}\kappa B}\|f\|_{L(\log L)^m,2^{j+1}\kappa B}\\
&\quad+C\sum_{j=1}^\infty\mu(\kappa B)^{\theta(1-\alpha)}\mu(2^{j+1}\kappa B)^{(1+\theta)(-1+\alpha)}\mu(2^{j+1}\kappa B)^{1-\alpha}j^m\|b\|_*^m M^\alpha f(x)\\
&\le CC\sum_{j=1}^\infty C_1^{j\theta(\alpha-1)}\|b\|_*^m(M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)+M^\alpha f(x))\\
&\le C\|b\|_*^m(M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x),
\end{aligned}
$$

其中使用以下事实

$$
\|(b-b_{2^{j+1}\kappa B})^m\|_{(\exp L)^{1/m},2^{j+1}\kappa B}\le C\|b\|_*^m,\quad |b_{2\kappa B}-b_{2^{j+1}\kappa B}|\le Cj\|b\|_*
$$

和引理 3.3.

由上述估计及 Hölder 不等式, 得

$$
W\le\frac{1}{\mu(B)}\int_B|I_\alpha((b-\lambda)^m f_2)(y)-\lambda|d\mu(y)\le C\|b\|_*^m M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x).
$$

综合对 U,V 和 W 得估计可得引理 3.4. 证毕.

注 1 如果用 $M_\delta^{\sharp,d}$ 及 M_ε^d 分别替代 $M_\delta^\sharp$ 和 M_ε, 引理 3.4 也成立.

引理 3.5 设 $\Phi(t)=t(1+\log^+t)^m$, f 是具有紧支集的有界函数的. 对于 $\lambda>0$, 又设 $\Omega=\big\{x\in\mathbf{X}:M_{L\log L,\alpha}f(x)>\lambda\big\}$. 若 Ω 非空, 则对于给定的 $\sigma>0$, 存在两两不交的可数的球族 $\{B_i\}$, 使得

(a) $\bigcup_i B_i\subset\Omega\subset\bigcup_i B_i^*$, 其中 $B_i^*=\kappa(4\kappa+1)B$.

(b) 对于所有的 i, $\|f\|_{L\log L,B_i}>\lambda\mu(B_i)^{-\alpha}$;

(c) 对于某个 i, 如果球 B,B_i 满足 $B_i\subset B$ 且 $r(B)\ge\sigma r(B_i)$, 则 $\|f\|_{L\log L,B}>\lambda\mu(B)^{-\alpha}$. 因此

$$
\begin{aligned}
&\mu(\big\{x\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(x)>\lambda\big\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\quad\le C\int_{\mathbf{X}}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y)\left(1+\alpha\log^+\int_{\mathbf{X}}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y)\right)^m.
\end{aligned}
$$

引理 3.5 的证明 我们仅给出 $m=1$ 时的证明. 类似于文 [11], 对于给定的 f 和 λ. 如果 $x\in\Omega$, 存在包含 x 的球 B_x 和 $\|f\|_{L\log L,B_x}>\lambda\mu(B_x)^{-\alpha}$. 定义 $R=R(f,\lambda)$ 如下

$$R=\sup_{B_x:\|f\|_{L\log L,B_x}>\lambda\mu(B_x)^{-\alpha}} r(B_x).$$

假设 $\operatorname{supp} f\subset B_0$ 设 B_x 满足 $\|f\|_{L\log L,B_x}>\lambda\mu(B_x)^{-\alpha}$, 则由 Luxemburg 范数的定义值

$$\mu(B_x)^{\alpha}\inf\left\{t>0:\frac{1}{\mu(B_x)}\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{t}\right)d\mu(y)\le 1\right\}>\lambda,$$

从而

$$\frac{1}{\mu(B_x)}\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|\mu(B_x)^{\alpha}}{\lambda}\right)d\mu(y)>1.$$

对于任意的 $0<u,\,v<\infty$, 有 $\Phi(uv)\le\Phi(u)\Phi(v)$, 则

$$\mu(B_x)<\mu(B_x)^{\alpha}(1+\alpha\log^{+}\mu(B_x))\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y). \tag{3.9}$$

取 $\eta=\eta(n,\alpha)$, $C_4=C(n,\alpha)$, 使得 $0<\eta<1-\alpha$, $C_4>1$ 且当 $t>C_4$ 和 $1+\log^{+}t<t^{\eta}$成立. 考虑下述情形:

情形 I 当 $\mu(B_x)\le C_4$, $\log^{+}\mu(B_x)^{\alpha}\le C$, (3.9) 式意味着

$$(\mu(B_x))^{1-\alpha}\le C\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y).$$

情形 II 当 $\mu(B_x)>C_4$, $1+\log^{+}\mu(B_x)^{\alpha}<\mu(B_x)^{\eta}$, 则由 (3.9) 式得

$$\mu(B_x)^{1-\alpha-\eta}<\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y). \tag{3.10}$$

因此

$$(1-\alpha-\eta)\log^{+}\mu(B_x)^{\alpha}<\log^{+}\left(\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y)\right)^{\alpha}.$$

由此不等式和 (3.9) 可得

$$\mu(B_x)^{1-\alpha}\le C\left(1+\log^{+}\left(\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y)\right)^{\alpha}\right)\int_{B_x}\Phi\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)d\mu(y). \tag{3.11}$$

由 (3.11) 知

$$\begin{aligned}1\ &\le\ C\left(1+\log^{+}\left(\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_x\cap B_0)\right)^{\alpha}\right)\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\frac{\mu(B_x\cap B_0)}{\mu(B_x)^{1-\alpha}}\\ &\le\ C\left(1+\alpha\log^{+}\left(\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)\right)\right)\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)^{\alpha}\left(\frac{\mu(B_x\cap B_0)}{\mu(B_x)}\right)^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

因此 B_x 和 B_0 必定相交. 假设 $r(B_x)\ge r(B_0)$, 由文 [11] 中的 (29) 式易得 $B_0\subset\kappa(2\kappa+1)B_x$, 从而对于给定得 δ, 有

$$\begin{aligned}1\ &\le\ C\left(1+\alpha\log^{+}\left(\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)\right)\right)\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)^{\alpha}\left(\frac{\mu(B_x\cap B_0)}{\mu(B_x)}\right)^{1-\alpha}\\ &\le\ C\left(1+\alpha\log^{+}\left(\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)\right)\right)\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)^{\alpha}\left(\frac{\mu(B_0)}{\mu(B_x)}\right)^{1-\alpha}\\ &\le\ C\left(1+\alpha\log^{+}\left(\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)\right)\right)\Phi\left(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\right)\mu(B_0)^{\alpha}\left(\frac{r(B_0)}{r(B_x)}\right)^{(1-\alpha)\delta}.\end{aligned}$$

其中使用了 μ 反相双倍性质 (见文 [11] 中的 (28) 式). 特别地

$$r(B_x)\le C\bigg[\bigg(1+\alpha\log^+\bigg(\Phi\bigg(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\bigg)\mu(B_0)\bigg)\bigg)\Phi\bigg(\frac{|f|_{L^\infty}}{\lambda}\bigg)\bigg]^{1/(1-\alpha)\delta}r(B_0)^{\alpha/(1-\alpha)\delta}r(B_0).$$

由此说明 R 有限. 余下的部分仅需对文 [11] 中的引理 5.2 稍做改动即可, 故省去. 证毕.

4 定理的证明

引理 4.1 设 $(\mathbf{X},d,\mu)$ 是齐型空间. 设 $0<\alpha<1$ 且 $Mf(x)$ 和 $M^\alpha f(x)$ 局部可积, 则存在与 f 和 x 无关的正常数 C, 使得

$$M^mM^\alpha f(x)\le CM^\alpha M^m f(x).$$

本引理的证明只需对文 [12] 中的引理 2.4 稍做改动即可.

定理 3 的证明 类似于文 [10], 设 f 有紧支集的有界函数. 对于 $\delta>0$, 定义 $L_\delta(f)$ 如下

$$L_\delta(f)=\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^d(I_{\alpha,b}^m f)(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}.$$

对于任意的 $0<\delta<1$, $\varepsilon>0$, 只需证明

$$L_\delta(f)\le\varepsilon CL_\delta(f)+C_{\varepsilon,\delta}\Psi(\|b\|_*^m)\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}(f)(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}.\quad(4.1)$$

对于 $t>0$ 及 $\delta>0$, 使用引理 2.1(a)

$$\begin{aligned}&\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^d(I_{\alpha,b}^m f)(y)>t\})\\&\le\mu(\{y\in\mathbf{X}:M^d(|I_{\alpha,b}^m f|^\delta)(y)>t^\delta,M^{\sharp,d}(|I_{\alpha,b}^m f|^\delta)(y)\le\varepsilon t^\delta\})\\&\quad+\mu(\{y\in\mathbf{X}:M^{\sharp,d}(|I_{\alpha,b}^m f|^\delta)(y)>\varepsilon t^\delta\})\\&\le C\varepsilon\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{\delta,d}(I_{\alpha,b}^m f)(y)>t/2^{\frac{1}{\delta}}\})+\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^{\sharp,d}(I_{\alpha,b}^m f)(y)>\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}t\})\\&=IV+VI.\end{aligned}\quad(4.2)$$

现估计 VI, 使用引理 3.4, 取 $\varepsilon=r\delta,\ 1<r<\frac{1}{\delta}$:

$$\begin{aligned}VI&\le\mu\bigg(\bigg\{y\in\mathbf{X}:C\bigg(\sum_{j=0}^{m-1}\|b\|_*^{m-j}M_{r\delta}^d(I_{\alpha,b}^j(f))(y)+\|b\|_*^m M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)\bigg)>\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}t\bigg\}\bigg)\\&\le\sum_{j=0}^{m-1}\mu\bigg(\bigg\{y\in\mathbf{X}:M_{r\delta}^d(I_{\alpha,b}^j(f))(y)>\frac{\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}t}{C\|b\|_*^{m-j}}\bigg\}\bigg)\\&\quad+\mu\bigg(\bigg\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)>\frac{\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}t}{C\|b\|_*^m}\bigg\}\bigg).\end{aligned}$$

设 $a_j=\varepsilon^{\frac{1}{\delta}}/C\|b\|_*^{m-j}$, $j=0,1,\dots,m-1$. (4.2) 式两边除以 $\Psi(1/t)$ 并使用 Ψ 次可乘性, 即对于 $0<u,\ v<\infty$, 有

$$\Psi(uv)\le\Psi(u)\Psi(v),$$

则

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^d(I_{\alpha,b}^m f)(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\le \frac{C\varepsilon^{1/(-\alpha)}}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^d(I_{\alpha,b}^m f)(y)>t/2^{1/\delta}\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{r\delta}^d(I_{\alpha,b}^j(f))(y)>a_jt\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\quad+\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)>a_0t\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\le \frac{C\varepsilon}{\Psi(2^{1/\delta}/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_\delta^d(I_{\alpha,b}^m f)(y)>t/2^{1/\delta}\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\quad+\sum_{j=0}^{m-1}\frac{C\Psi(\|b\|_*^{m-j})}{\Psi(1/a_jt)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{r\delta}^d(I_{\alpha,b}^j(f))(y)>a_jt\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\quad+\frac{\Psi(\|b\|_*^m)}{\Psi(1/a_0t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)>a_0t\})^{1/(1-\alpha).}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
L_\delta(f)\le C\varepsilon^{1/(-\alpha)}L_\delta(f)&+\sum_{j=0}^{m-1}C\Psi(\|b\|_*^{m-j})\\
&\times\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/a_jt)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{r\delta}^d(I_{\alpha,b}^j(f))(y)>a_jt\})^{1/(1-\alpha)}\\
&+\Psi(\|b\|_*^m)\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/a_0t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)>a_0t\})^{1/(1-\alpha)}.
\end{aligned}
$$

我们断言:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{r\delta}^d(I_{\alpha,b}^j(f))(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\quad\le C\Psi(\|b\|_*^j)\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}.
\end{aligned}\tag{4.3}
$$

此处仅考虑 $m=1$ 的情形, 也即

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{r\delta}^d(I_\alpha(f))(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}\\
&\quad\le C\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L),\alpha}f(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}.
\end{aligned}\tag{4.4}
$$

事实上, 因为 $0<r\delta<1$, 由引理 3.2 和引理 2.1(b) 可得此不等式. 对于一般情况, 类似于 (4.4) 式的证明, 仅需应用引理引理 2.1(b) 和引理 3.4 有限次即可证明 (4.3). 因此

$$
L_\delta(f)\le C\varepsilon^{1/(1-\alpha)}L_\delta(f)+C\Psi(\|b\|_*^m)\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu(\{y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^m,\alpha}f(y)>t\})^{1/(1-\alpha)}.
$$

类似文 [12, 引理 4.2] 的证明, 使用引理 3.2, 引理 3.3 及引理 3.5 和引理 4.1, 即可得定理 3. 证毕.

定理 1 的证明 由齐性, 我们只需证明当 $\lambda=1$, 即

$$
\mu(\{x\in\mathbf{X}:|I_{\alpha,b}^m f(x)|>1\})^{1/(1-\alpha)}\le C\Phi(\Phi(\|b\|_*^m))\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\right\|_{L^1}\left[1+\alpha\log^+\left\|\Phi\left(\frac{|f|}{\lambda}\right)\right\|_{L^1}\right]^m.
$$

设 f 是有紧支集的有界函数并使用定理 3 , 可得

$$\begin{aligned}&\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu\big(y\in\mathbf{X}:|I_{\alpha,b}^{m}f(y)|>t\big)^{1/(1-\alpha)}\\&\quad\leq\ C\Psi(\|b\|_{*}^{m})\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu\big(y\in\mathbf{X}:M_{L(\log L)^{m},\alpha}f(x)>t\big)^{1/(1-\alpha)}.\end{aligned}$$

再由引理 3.5 且注意到 Φ 的次可乘性, 从而

$$\begin{aligned}&\mu\left(\{x\in\mathbf{X}:|I_{\alpha,b}^{m}f(x)|>1\}\right)^{1/(1-\alpha)}\leq\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\mu\big(y\in\mathbf{X}:|I_{\alpha,b}^{m}f(y)|>t\big)^{1/(1-\alpha)}\\&\quad\leq C\Psi(\|b\|_{*}^{m})\sup_{t>0}\frac{1}{\Psi(1/t)}\int_{\mathbf{X}}\Phi\Big(\frac{|f(y)|}{\lambda}\Big)d\mu(y)\Big(1+\alpha\log^{+}\int_{\mathbf{X}}\Phi\Big(\frac{|f(y)|}{\lambda}\Big)d\mu(y)\Big)^{m}\\&\quad\leq C\Psi(\|b\|_{*}^{m})\sup_{t>0}\frac{\Phi(\Phi(1/t))}{\Psi(1/t)}\int_{\mathbf{X}}\Phi\big(|f(y)|\big)d\mu(y)\Big(1+\alpha\log^{+}\int_{\mathbf{X}}\Phi\big(|f(y)|\big)d\mu(y)\Big)^{m}\\&\quad\leq C\Psi(\|b\|_{*}^{m})\int_{\mathbf{X}}\Phi\big(|f(y)|\big)d\mu(y)\Big(1+\alpha\log^{+}\int_{\mathbf{X}}\Phi\big(|f(y)|\big)d\mu(y)\Big)^{m}.\end{aligned}$$

证毕.

定理 2 的证明 不妨设 f 是非负的有紧支集的有界函数且定义 $\tilde{I}_{\alpha,b}^{m}$ 为

$$\tilde{I}_{\alpha,b}^{m}f(x)=\int_{\mathbf{X}\backslash\{x\}}\frac{1}{d(x,y)^{1-\alpha}}|b(x)-b(y)|^{m}f(y)d\mu(y).$$

易知定理 1 和定理 3 对算子 $\tilde{I}_{\alpha,b}^{m}$ 也成立. 又因为

$$M_{\alpha,b}^{m}f(x)\leq\tilde{I}_{\alpha,b}^{m}f(x),$$

从而可证定理 2. 证毕.

参 考 文 献

[1] Bramanti M., Ceistina Cerutti M., Commutators of singular integrals on homogeneous spaces, *Boll. U. M. I.,* 1996, **10**(B): 843–883.

[2] Bramanti M., Ceistina Cerutti M., Commutators of singular integrals and fractional integrals on homogeneous spaces, *Contemp. Math.,* 1995, **189**: 81–94.

[3] Chanillo S., A note on commutators , *Indiana Univ. Math. J.,* 1982, **31**: 7–16.

[4] Coifman R., Rochberg R. and Weiss G., Factorization theorems for Hardy spaces in several variable, *Ann. of Math.,* 1976, **103**: 611–635.

[5] Cruz-Uribe Sfo D., Fiorenza A., Endpoint estimates and weighted norm inequalities for commutators of fractional integrals, *Publ. Math.,* 2003, **47**: 103–131.

[6] Chen W. G., Sawyer E., Endpoint estimates for commutators of singular integrals on spaces of homogeneous type, *J. Math. Anal. Appl.,* 2003, **282**: 553–566.

[7] Eduardo A., Vági S., Fractional integrals on spaces of homogeneous type, Analysis and Partial Differential Equation, New York: Dekker, 1990, 171–216.

[8] Genebashvili A., Gogatishvili A. and Kokliashvili V. et al., Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Math., 1998, 92.

[9] García-Cuerva J., Rubio de Francia J. L., Weighted norm inequlaities and related topics, North-Holland Math. Studies, Amsterdam: North-Holland, 1985, 116.

[10] Pérez C., Endpoint estimates for the commutators of singular integral operators, *J. Funct. Anal. Math.,* 1995, **128**: 163–185.

[11] Pérez C., Uncertainty principle estimate for vector fields, *J. of Func. Anal.,* 2001, **181**: 146–188.

[12] Ding Y., Lu S. Z., Zhang P., Weak type estimates for commutators for fractional integral operators, *Science in China, Ser. A,* 2001, **31**(4): 877–888.