第49卷第5期 数学学报中文版 Vol.49, No.5
2006年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-0961-12 **文献标识码: A**

一类多线性积分算子的端点有界性

刘岚喆

长沙理工大学数学系 长沙 410077
E-mail: lanzheliu@263.net

陆善镇

北京师范大学数学系 北京 100875
E-mail: lusz@bnu.edu.cn

摘　要 本文对一类相关于非卷积型算子的多线性算子, 证明了其在端点情形上的有界性, 该算子包括 Littlewood–Paley 算子和 Marcinkiewicz 算子.

关键词 多线性算子; BMO 空间; Hardy 空间
MR(2000) 主题分类 42B20, 42B25
中图分类 O174.3

Endpoint Boundedness for Some Multilinear Integral Operators

Lan Zhe LIU

College of Mathematics, Changsha University of Science and Technology
Changsha 410077*, P. R. China*
E-mail: lanzheliu@ 263*.net*

Shan Zhen LU

Department of Mathematics, Beijing Normal University, Beijing 100875*, P. R. China*
E-mail: lusz@bnu.edu.cn

Abstract In this paper, we prove the endpoint boundedness for some multilinear operators related to certain non-convolution operators. The operators include Littlewood–Paley operator and Marcinkiewicz operator.

Keywords multilinear operator; BMO space; Hardy space
MR(2000) Subject Classification 42B20, 42B25
Chinese Library Classification O174.3

设 T 为 Calderón–Zygmund 算子, 由 Coifman, Rochberg 和 Weiss 得到的经典结果 [1] 说明交换子 $[b,T](f) = bT(f) - T(bf)$ (其中 $b \in \mathrm{BMO}(R^n)$) 在 $L^p(R^n)$ $(1 < p < \infty)$ 上有界; Chanillo [2] 对分数次积分算子 T 证明了类似的结果. 在文 [3] 中, 作者对该交换子证明了其端点有界性. 本文的主要目的就是对一类相关于非卷积型算子的多线性算子讨论其端点有界性. 事实上, 我们对满足一定尺寸条件的该多线性算子建立了其端点有界性. 作为应用, 我们对相关于 Littlewood–Paley 算子和 Marcinkiewicz 算子的多线性算子证明了其端点有界性.

收稿日期: 2005-01-12; 修改日期: 2005-05-14; 接受日期: 2005-07-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271071)

1 预备知识

本文中, Q 表示 R^n 中的方体. 给定方体 Q 和局部可积函数 f, 令 $f(Q)=\int_Q f(x)dx$, $f_Q=|Q|^{-1}\int_Q f(x)dx$ 和 $f^{\#}(x)=\sup_{x\in Q}|Q|^{-1}\int_Q|f(y)-f_Q|dy$; 称 f 属于 $\mathrm{BMO}(R^n)$, 若 $f^{\#}\in L^\infty(R^n)$, 且定义 $||f||_{\mathrm{BMO}}=||f^{\#}||_{L^\infty}$. 我们也给出原子和 H^1 空间的定义. 称函数 a 为 H^1 原子, 若存在方体 Q, 使得 $\operatorname{supp} a\subset Q$, $||a||_{L^\infty}\le|Q|^{-1}$ 且 $\int_{R^n}a(x)dx=0$. 众所周知 $H^1(R^n)$ 具有原子分解特征 (见文 [4]).

本文将考虑一类相关于非卷积型积分算子的多线性算子, 其定义如下.

固定 $\delta>0$, 设 m 为正整数, A 为 R^n 上的函数, 令

$$R_{m+1}(A;x,y)=A(x)-\sum_{|\alpha|\le m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha A(y)(x-y)^\alpha,$$

$$Q_{m+1}(A;x,y)=R_m(A;x,y)-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha A(x)(x-y)^\alpha.$$

定义 1 令 $\varepsilon>0$, ψ 为固定的函数且满足下列条件:

(1) $\int_{R^n}\psi(x)dx=0$;

(2) $|\psi(x)|\le C(1+|x|)^{-(n+1-\delta)}$;

(3) $|\psi(x+y)-\psi(x)|\le C|y|^\varepsilon(1+|x|)^{-(n+1+\varepsilon-\delta)}$ 当 $2|y|<|x|$.

定义多线性 Littlewood–Paley 算子为

$$g_\delta^A(f)(x)=\left(\int_0^\infty|F_t^A(f)(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

其中

$$F_t^A(f)(x)=\int_{R^n}\frac{R_{m+1}(A;x,y)}{|x-y|^m}\psi_t(x-y)f(y)dy,$$

且 $\psi_t(x)=t^{-n+\delta}\psi(x/t)$ 对 $t>0$. 记 $F_t(f)=\psi_t*f$. 我们也定义

$$g_\delta(f)(x)=\left(\int_0^\infty|F_t(f)(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

当 $\delta=0$ 时, 此即为 Littlewood–Paley g 函数 [5].

设 H 为如下 Hilbert 空间: $H=\{h:||h||=\left(\int_0^\infty|h(t)|^2dt/t\right)^{1/2}<\infty\}$. 对给定的 $x\in R^n$, 将 $F_t^A(f)(x)$ 和 $F_t(f)(x)$ 看成从 $[0,+\infty)$ 到 H 的映射, 则有

$$g_\delta(f)(x)=||F_t(f)(x)||,\quad g_\delta^A(f)(x)=||F_t^A(f)(x)||.$$

我们也考虑 g_δ^A 的变形, 其定义如下

$$\tilde g_\delta^A(f)(x)=\left(\int_0^\infty|\tilde F_t^A(f)(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

其中

$$\tilde F_t^A(f)(x)=\int_{R^n}\frac{Q_{m+1}(A;x,y)}{|x-y|^m}\psi_t(x-y)f(y)dy.$$

定义 2 令 $0<\gamma\le1$, Ω 为 R^n 上的零度齐次函数且满足 $\int_{S^{n-1}}\Omega(x')d\sigma(x')=0$. 设 $\Omega\in\mathrm{Lip}_\gamma(S^{n-1})$, 即存在常数 $M>0$, 使得对任何 $x,y\in S^{n-1}$, 有 $|\Omega(x)-\Omega(y)|\le M|x-y|^\gamma$. 记

$\Gamma(x)=\{(y,t)\in R_+^{n+1}:|x-y|<t\}$ 和 $\Gamma(x)$ 的特征函数为 $\chi_{\Gamma(x)}$. 定义多线性 Marcinkiewicz 算子为

$$\mu_\delta^A(f)(x)=\left[\int_0^\infty|F_t^A(f)(x)|^2\frac{dt}{t^3}\right]^{1/2},$$

其中

$$F_t^A(f)(x)=\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-\delta}}\frac{R_{m+1}(A;x,y)}{|x-y|^m}f(y)dy;$$

记

$$F_t(f)(x)=\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-\delta}}f(y)dy.$$

我们也定义

$$\mu_\delta(f)(x)=\left(\int_0^\infty|F_t(f)(x)|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2},$$

此即为 Marcinkiewicz 算子 (见文 [6]).

设 H 为如下 Hilbert 空间: $H=\{h:||h||=\left(\int_0^\infty|h(t)|^2dt/t^3\right)^{1/2}<\infty\}$. 对给定的 $x\in R^n$, 将 $F_t^A(f)(x)$ 和 $F_t(f)(x)$ 看成从 $[0,+\infty)$ 到 H 的映射, 则有

$$\mu_\delta^A(f)(x)=||F_t^A(f)(x)||,\quad \mu_\delta(f)(x)=||F_t(f)(x)||.$$

定义 μ_δ^A 的变形为

$$\tilde{\mu}_\delta^A(f)(x)=\left(\int_0^\infty|\tilde{F}_t^A(f)(x)|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2},$$

其中

$$\tilde{F}_t^A(f)(x)=\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-\delta}}\frac{Q_{m+1}(A;x,y)}{|x-y|^m}f(y)dy.$$

更一般地, 我们将研究相关于下列次线性算子的多线性算子.

定义 3 设 $F(x,y,t)$ 为 $R^n\times R^n\times[0,+\infty)$ 上的函数, 令

$$F_t(f)(x)=\int_{R^n}F(x,y,t)f(y)dy \quad 和 \quad F_t^A(f)(x)=\int_{R^n}\frac{R_{m+1}(A;x,y)}{|x-y|^m}F(x,y,t)f(y)dy.$$

设 H 为如下 Banach 空间: $H=\{h:||h||<\infty\}$, 使得对给定的 $x\in R^n$, 将 $F_t(f)(x)$ 和 $F_t^A(f)(x)$ 看成从 $[0,+\infty)$ 到 H 的映射, 则定义相关于 T 的多线性算子为

$$T^A(f)(x)=||F_t^A(f)(x)||;$$

我们也记 $T(f)(x)=||F_t(f)(x)||$.

显而易见定义 1, 2 是定义 3 的特例. 注意到当 $m=0$ 时, T^A, g_δ^A 和 μ_δ^A, 即为由 F_t 与 A 生成的交换子 (见文 [6–11]). 众所周知, 多线性算子作为交换子的非平凡推广, 在调和分析中引起广泛兴趣并得到诸多研究 (见文 [12–19]). 我们给出以下例子.

例 1 如果 $A=1$, 则当 $\delta=0$ 时, $g_\delta^A=g_\delta$ 和 $\mu_\delta^A=\mu_\delta$, 此即为 Littlewood–Paley 算子和 Marcinkiewicz 算子 (见文 [5, 6]).

例 2 如果 $m=0$, 则 g_δ^A 和 μ_δ^A 为 F_t 与 A 生成的交换子 (见文 [6–11]).

例 3 如果 $m>0$, 则 g_δ^A 和 μ_δ^A 为交换子的非平凡推广 (见文 [12, 13]).

我们将在第 3 节证明下列定理.

定理 1 设 $0 \le \delta < n$, $D^\alpha A \in \mathrm{BMO}(R^n)$ 当 $|\alpha| = m$, 则

(i) g_δ^A 为从 $L^{n/\delta}(R^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(R^n)$ 有界的;

(ii) $\tilde{g}_\delta^A$ 为从 $H^1(R^n)$ 到 $L^{n/(n-\delta)}(R^n)$ 有界的;

(iii) g_δ^A 为从 $H^1(R^n)$ 到弱 $L^{n/(n-\delta)}(R^n)$ 有界的;

(iv) 如对任意 H^1 原子 a, $\mathrm{supp} a \subset Q$ 和 $u \in 3Q \setminus 2Q$, 有

$$\int_{(4Q)^c} \left\| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \frac{(x-u)^\alpha}{|x-u|^m} \psi_t(x-u) \int_Q D^\alpha A(y) a(y) dy \right\|^{n/(n-\delta)} dx \le C,$$

则 g_δ^A 为从 $H^1(R^n)$ 到 $L^{n/(n-\delta)}(R^n)$ 有界的;

(v) 如对任意方体 Q 和 $u \in 3Q \setminus 2Q$, 有

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_Q) \int_{(4Q)^c} \frac{(u-y)^\alpha}{|u-y|^m} \psi_t(u-y) f(y) dy \right\| dx \le C||f||_{L^{n/\delta}},$$

则 $\tilde{g}_\delta^A$ 为从 $L^{n/\delta}(R^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(R^n)$ 有界的.

定理 2 设 $0 \le \delta < n$, $D^\alpha A \in \mathrm{BMO}(R^n)$ 当 $|\alpha| = m$, 则

(i) μ_δ^A 为从 $L^{n/\delta}(R^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(R^n)$ 有界的;

(ii) $\tilde{\mu}_\delta^A$ 为从 $H^1(R^n)$ 到 $L^{n/(n-\delta)}(R^n)$ 有界的;

(iii) μ_δ^A 为从 $H^1(R^n)$ 到弱 $L^{n/(n-\delta)}(R^n)$ 有界的.

(iv) 如对任意 H^1 原子 a, $\mathrm{supp} a \subset Q$ 和 $u \in 3Q \setminus 2Q$, 有

$$\int_{(4Q)^c} \left\| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \frac{(x-u)^\alpha}{|x-u|^m} \frac{\Omega(x-u)}{|x-u|^{n-1-\delta}} \chi_{\Gamma(x)}(u,t) \int_Q D^\alpha A(y) a(y) dy \right\|^{n/(n-\delta)} dx \le C,$$

则 μ_δ^A 为从 $H^1(R^n)$ 到 $L^{n/(n-\delta)}(R^n)$ 有界的;

(v) 如对任意方体 Q 和 $u \in 3Q \setminus 2Q$, 有

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q \left\| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha A(x) - (D^\alpha A)_Q) \int_{(4Q)^c} \frac{(u-y)^\alpha}{|u-y|^m} \frac{\Omega(u-y) \chi_{\Gamma(u)}(y,t)}{|u-y|^{n-1-\delta}} f(y) dy \right\| dx \le C||f||_{L^{n/\delta}},$$

则 $\tilde{\mu}_\delta^A$ 为从 $L^{n/\delta}(R^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(R^n)$ 有界的.

注 1 一般地, g_δ^A 和 μ_δ^A 不是 $(H^1, L^{n/(n-\delta)})$ 有界的.

2 主要定理及证明

我们首先证明一个一般性定理.

主要定理 令 $0 \le \delta < n$, $D^\alpha A \in \mathrm{BMO}(R^n)$ 当 $|\alpha| = m$. 设 F_t, T, T^A 如同定义 3 所示且对任意 $1 < p, q \le \infty$ 和 $1/q = 1/p - \delta/n$, T 为 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 有界的. 如果 T 满足尺寸条件: 对任意方体 Q, 当 $\mathrm{supp} f \subset (2Q)^c$ 和 $x \in Q$ 时, 有

$$||F_t^A(f)(x) - F_t^A(f)(x_0)|| \le C||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}} ||f||_{L^{n/\delta}},$$

则 T^A 为从 $L^{n/\delta}(R^n)$ 到 $\mathrm{BMO}(R^n)$ 有界的.

为证明该定理, 我们需要下列引理.

引理 1[15] 令 A 为 R^n 上的函数且当 $|\alpha| = m$ 时, $D^\alpha A \in L^q(R^n)$ 对某个 $q > n$, 则

$$|R_m(A; x, y)| \le C|x-y|^m \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{1}{|\tilde{Q}(x,y)|} \int_{\tilde{Q}(x,y)} |D^\alpha A(z)|^q dz \right)^{1/q},$$

其中 $\tilde{Q}(x,y)$ 为中心在 x 边长为 $5\sqrt{n}|x-y|$ 的方体.

主要定理的证明 我们只须证明存在常数 C_Q, 使得对任意方体 Q, 有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |T^A(f)(x)-C_Q|dx \le C||f||_{L^{n/\delta}}.$$

固定方体 $Q=Q(x_0,d)$. 令 $\tilde{Q}=5\sqrt{n}Q$, $\tilde{A}(x)=A(x)-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A)_{\tilde{Q}}x^\alpha$, 则 $R_m(A;x,y)=R_m(\tilde{A};x,y)$, 且 $D^\alpha\tilde{A}=D^\alpha A-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}}$ 当 $|\alpha|=m$. 对 $f_1=f\chi_{\tilde{Q}}$, $f_2=f\chi_{R^n\setminus\tilde{Q}}$, 记

$$\begin{aligned}F_t^A(f)(x)=&\int_{R^n}\frac{R_m(\tilde{A};x,y)}{|x-y|^m}F(x,y,t)f_1(y)dy\\&-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int_{R^n}\frac{F(x,y,t)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m}D^\alpha\tilde{A}(y)f_1(y)dy+\int_{R^n}\frac{R_{m+1}(\tilde{A};x,y)}{|x-y|^m}F(x,y,t)f_2(y)dy,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&|T^A(f)(x)-T^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)|=\big|||F_t^A(f)(x)||-||F_t^{\tilde{A}}(f)(x_0)||\big|\le\big\|F_t^A(f)(x)-F_t^{\tilde{A}}(f)(x_0)\big\|\\&\le\left\|F_t\left(\frac{R_m(\tilde{A};x,\cdot)}{|x-\cdot|^m}f_1\right)(x)\right\|+\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\left\|F_t\left(\frac{(x-\cdot)^\alpha}{|x-\cdot|^m}D^\alpha\tilde{A}f_1\right)(x)\right\|+\big\|F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x)-F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)\big\|\\&:=I(x)+II(x)+III(x),\end{aligned}$$

因此 $\frac{1}{|Q|}\int_Q|T^A(f)(x)-T^{\tilde{A}}(f)(x_0)|dx\le\frac{1}{|Q|}\int_Q I(x)dx+\frac{1}{|Q|}\int_Q II(x)dx+\frac{1}{|Q|}\int_Q III(x)dx=I+II+III$. 首先, 对 $x\in Q$ 和 $y\in\tilde{Q}$, 由引理 1, 得

$$R_m(\tilde{A};x,y)\le C|x-y|^m\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}},$$

因此, 由 T 的 $(L^{n/\delta},L^\infty)$ 有界性, 得

$$\begin{aligned}I&\le\frac{C}{|Q|}\int_Q\left|T\left(\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}f_1\right)(x)\right|dx\\&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||T(f_1)||_{L^\infty}\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}.\end{aligned}$$

其次, 对 $1<p<n/\delta$ 和 $1/q=1/p-\delta/n$, 由 T 的 (L^p,L^q) 有界性和 Hölder 不等式, 得

$$\begin{aligned}II&\le\frac{C}{|Q|}\int_Q\left|T\left(\sum_{|\alpha|=m}(D^\alpha A-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}})f_1\right)(x)\right|dx\\&\le C\sum_{|\alpha|=m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|T((D^\alpha A-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}})f_1)(x)|^qdx\right)^{1/q}\\&\le|Q|^{-1/q}\sum_{|\alpha|=m}||(D^\alpha A-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}})f_1||_{L^p}\\&\le C\sum_{|\alpha|=m}\left(\frac{1}{|Q|}\int_{\tilde{Q}}|D^\alpha A(y)-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}}|^qdy\right)^{1/q}||f||_{L^{n/\delta}}\\&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}.\end{aligned}$$

对 III, 由 T 的尺寸条件, 得 $III\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}$. 证毕.

欲证明定理 1, 2, 3, 我们需要下列引理.

引理 2 令 $0\le\delta<n$, $1<p<n/\delta$, $1/q=1/p-\delta/n$, $D^\alpha A\in\mathrm{BMO}(R^n)$ 当 $|\alpha|=m$, 则 g_δ^A 和 μ_δ^A 均为 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(R^n)$ 有界的.

证明 由 Minkowski 不等式, 得

$$\begin{aligned} g_\delta^A(f)(x) &\le \int_{R^n} \frac{|f(y)|\,|R_{m+1}(A;x,y)|}{|x-y|^m}\left(\int_0^\infty |\psi_t(x-y)|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2}dy \\ &\le C\int_{R^n} \frac{|f(y)|\,|R_{m+1}(A;x,y)|}{|x-y|^m}\left(\int_0^\infty \frac{t^{-2n+2\delta}}{(1+|x-y|/t)^{2(n+1-\delta)}}\frac{dt}{t}\right)^{1/2}dy \\ &\le C\int_{R^n} \frac{|R_{m+1}(A;x,y)|}{|x-y|^{m+n-\delta}}|f(y)|dy, \mu_\delta^A(f)(x) \\ &\le \int_{R^n} \frac{|\Omega(x-y)|\,|R_{m+1}(A;x,y)|}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}|f(y)|\left(\int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}dy \\ &\le C\int_{R^n} \frac{|R_{m+1}(A;x,y)|}{|x-y|^{m+n-\delta}}|f(y)|dy, \end{aligned}$$

从而, 由文 [19] 即得结论.

定理 1 的证明 (i) 首先, 由引理 2 的证明, 知

$$g_\delta(f)(x) \le C\int_{R^n}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\delta}}dy,$$

因此, 由文 [2] 知当 $1<p<n/\delta$, $1/q=1/p-\delta/n$ 时, g_δ 为 (L^p,L^q) 有界的. 我们只须证明 g_δ 满足主要定理的尺寸条件. 设 $\mathrm{supp}f\subset(2Q)^c$, 令 $\tilde{A}(x)=A(x)-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A)_Q x^\alpha$. 记

$$\begin{aligned} F_t^{\tilde{A}}(f)(x)-F_t^{\tilde{A}}(f)(x_0) &= \int_{R^n}\left[\frac{\psi_t(x-y)}{|x-y|^m}-\frac{\psi_t(x_0-y)}{|x_0-y|^m}\right]R_m(\tilde{A};x,y)f(y)dy \\ &\quad + \int_{R^n}\frac{\psi_t(x_0-y)f(y)}{|x_0-y|^m}[R_m(\tilde{A};x,y)-R_m(\tilde{A};x_0,y)]dy \\ &\quad - \sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int_{R^n}\left(\frac{\psi_t(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m}-\frac{\psi_t(x_0-y)(x_0-y)^\alpha}{|x_0-y|^m}\right)D^\alpha\tilde{A}(y)f(y)dy \\ &:= I_1+I_2+I_3. \end{aligned}$$

注意到当 $x\in Q$ and $y\in R^n\setminus Q$ 时, $|x-y|\approx|x_0-y|$. 由引理 1 和下列不等式 (见文 [20])

$$|b_{Q_1}-b_{Q_2}|\le C\log(|Q_2|/|Q_1|)||b||_{\mathrm{BMO}} \text{ 当 } Q_1\subset Q_2,$$

对 $x\in Q$, $y\in 2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}$, 有

$$\begin{aligned} |R_m(\tilde{A};x,y)| &\le C|x-y|^m\sum_{|\alpha|=m}(||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}+|(D^\alpha A)_{\tilde{Q}(x,y)}-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}}|) \\ &\le Ck|x-y|^m\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}. \end{aligned}$$

因此, 类似于引理 2 的证明, 得

$$\begin{aligned} ||I_1|| &\le C\int_{R^n\setminus\tilde{Q}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{m+n+1-\delta}}+\frac{|x-x_0|^\varepsilon}{|x_0-y|^{m+n+\varepsilon-\delta}}\right)|R_m(\tilde{A};x,y)||f(y)|dy \\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}}k\left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+1-\delta}}+\frac{|x-x_0|^\varepsilon}{|x_0-y|^{n+\varepsilon-\delta}}\right)|f(y)|dy \\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}\sum_{k=1}^\infty k(2^{-k}+2^{-\varepsilon k})\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}. \end{aligned}$$

对 I_2, 由公式 (见文 [15]): $R_m(\tilde{A};x,y)-R_m(\tilde{A};x_0,y)=\sum_{|\beta|<m}\frac{1}{\beta!}R_{m-|\beta|}(D^\beta\tilde{A};x,x_0)(x-y)^\beta$ 和引理 1, 有

$$|R_m(\tilde{A};x,y)-R_m(\tilde{A};x_0,y)|\le C\sum_{|\beta|<m}\sum_{|\alpha|=m}|x-x_0|^{m-|\beta|}|x-y|^{|\beta|}||D^\alpha A||_{\rm BMO}.$$

类似于 I_1 的估计, 得

$$||I_2||\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{k+1}\tilde{Q}\backslash 2^k\tilde{Q}}\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+1-\delta}}|f(y)|dy\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}||f||_{L^{n/\delta}}.$$

对 I_3, 类似于 I_1 的估计, 得

$$\begin{aligned}||I_3||&\le C\sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{k+1}\tilde{Q}\backslash 2^k\tilde{Q}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+1-\delta}}+\frac{|x-x_0|^\varepsilon}{|x_0-y|^{n+\varepsilon-\delta}}\right)|D^\alpha\tilde{A}(y)|\,|f(y)|dy\\&\le C\sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=1}^\infty(2^{-k}+2^{-\varepsilon k})\left(|2^k\tilde{Q}|^{-1}\int_{2^k\tilde{Q}}|D^\alpha A(y)-(D^\alpha A)_{\tilde{Q}}|^r dy\right)^{1/r}||f||_{L^{n/\delta}}\\&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}||f||_{L^{n/\delta}}.\end{aligned}$$

因此

$$||F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x)-F_t^{\tilde{A}}(f_2)(x_0)||\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}||f||_{L^{n/\delta}}.$$

(ii) 只须证明存在常数 $C>0$, 使得对任意 H^1 原子 a, 有 $||\tilde{g}_\psi^A(a)||_{L^{n/(n-\delta)}}\le C$. 记

$$\int_{R^n}\tilde{g}_\delta^A(a)(x)dx=\left[\int_{2Q}+\int_{(2Q)^c}\right]\tilde{g}_\delta^A(a)(x)dx=J+JJ.$$

对 J, 由下列等式

$$Q_{m+1}(A;x,y)=R_{m+1}(A;x,y)+\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(x-y)^\alpha(D^\alpha A(x)-D^\alpha A(y)).$$

类似于引理 2 的证明, 有

$$\tilde{g}_\delta^A(a)(x)\le g_\delta^A(a)(x)+C\sum_{|\alpha|=m}\int_{R^n}\frac{|D^\alpha A(x)-D^\alpha A(y)|}{|x-y|^n}|a(y)|dy.$$

因此, 由引理 2 和文 [2] 知, 当 $1<p<n/\delta$, $1/q=1/p-\delta/n$ 时, $\tilde{g}_\delta$ 为 (L^p,L^q) 有界的, 故

$$J\le C||\tilde{g}_\delta^A(a)||_{L^q}^{n/((n-\delta)q)}|2Q|^{1-n/((n-\delta)q)}\le C||a||_{L^p}^{n/(n-\delta)}|Q|^{1-n/((n-\delta)q)}\le C.$$

欲估计 JJ, 令 $\tilde{A}(x)=A(x)-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A)_{2Q}x^\alpha$, 则 $Q_m(A;x,y)=Q_m(\tilde{A};x,y)$. 由 a 的消失矩条件, 对 $x\in(2Q)^c$, 记

$$\begin{aligned}\tilde{F}_t^A(a)(x)&=\int_{R^n}\frac{\psi_t(x-y)R_m(A;x,y)}{|x-y|^m}a(y)dy-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int_{R^n}\frac{\psi_t(x-y)D^\alpha\tilde{A}(x)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m}a(y)dy\\&=\int_{R^n}\left[\frac{\psi_t(x-y)}{|x-y|^m}-\frac{\psi_t(x-x_0)}{|x-x_0|^m}\right]R_m(\tilde{A};x,y)a(y)dy\\&\quad+\int_{R^n}\frac{\psi_t(x-x_0)a(y)}{|x_0-x|^m}[R_m(\tilde{A};x,y)-R_m(\tilde{A};x,x_0)]dy\\&\quad-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int_{R^n}\left[\frac{\psi_t(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m}-\frac{\psi_t(x-x_0)(x-x_0)^\alpha}{|x-x_0|^m}\right]D^\alpha\tilde{A}(x)a(y)dy,\\&:=JJ_1+JJ_2+JJ_3.\end{aligned}$$

类似于引理 2 和 (i) 的证明, 对 $x \in (2Q)^c$, 得

$$\begin{aligned} ||JJ_1|| &\le C\int_{R^n}\left[\frac{|y-x_0|}{|x-y|^{n+m+1-\delta}}+\frac{|y-x_0|^{\varepsilon}}{|x-y|^{n+m+\varepsilon-\delta}}\right]|R_m(\tilde{A};x,y)|\,|a(y)|dy \\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}\big(|Q|^{1/n}|x-x_0|^{-n-1+\delta}+|Q|^{\varepsilon/n}|x-x_0|^{-n-\varepsilon+\delta}\big), \\ ||JJ_2|| &\le C\int_{R^n}\frac{|R_m(\tilde{A};x,y)-R_m(\tilde{A};x,x_0)|\,|a(y)|}{|x-y|^{m+n-\delta}}dy \\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}\int_{R^n}\frac{|x_0-y|\,|a(y)|}{|x-x_0|^{n+1-\delta}}dy \\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}|Q|^{1/n}|x-x_0|^{-n-1+\delta}, \\ ||JJ_3|| &\le C\int_{R^n}\frac{|x_0-y|}{|x-y|^{n+1-\delta}}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\tilde{A}(x)|\,|a(y)|dy \\ &\le C\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\tilde{A}(x)|\big[|Q|^{1/n}|x-x_0|^{-n-1+\delta}+|Q|^{\varepsilon/n}|x-x_0|^{-n-\varepsilon+\delta}\big]. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} JJ &\le \int_{(2Q)^c}(||JJ_1+JJ_2+JJ_3||)^{n/(n-\delta)}dx \\ &\le C\Big(\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\rm BMO}\Big)^{n/(n-\delta)}\sum_{k=1}^{\infty}k[2^{-kn/(n-\delta)}+2^{-kn\varepsilon/(n-\delta)}]\le C. \end{aligned}$$

(iii) 由下列等式

$$R_{m+1}(A;x,y)=Q_{m+1}(A;x,y)+\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(x-y)^\alpha(D^\alpha A(x)-D^\alpha A(y)).$$

类似于引理 2 的证明, 有

$$g_\delta^A(f)(x)\le \tilde{g}_\delta^A(f)(x)+C\sum_{|\alpha|=m}\int_{R^n}\frac{|D^\alpha A(x)-D^\alpha A(y)|}{|x-y|^{n-\delta}}|f(y)|dy,$$

由 (i), (ii) 和文 [2], 得

$$\begin{aligned} |\{x\in R^n: g_\delta^A(f)(x)>\lambda\}| &\le |\{x\in R^n:\tilde{g}_\delta^A(f)(x)>\lambda/2\}| \\ &\quad+\left|\left\{x\in R^n:\sum_{|\alpha|=m}\int_{R^n}\frac{|D^\alpha A(x)-D^\alpha A(y)|}{|x-y|^{n-\delta}}|f(y)|dy>C\lambda\right\}\right| \\ &\le C(||f||_{H^1}/\lambda)^{n/(n-\delta)}. \end{aligned}$$

(iv) 令 a 为 H^1 原子, ${\rm supp}a\subset Q=Q(x_0,d)$. 由 a 的消失矩条件, 对 $u\in 3Q\setminus 2Q$, 记

$$\begin{aligned} F_t^A(a)(x) &= \chi_{4Q}(x)F_t^A(a)(x)+\chi_{(4Q)^c}(x)\int_{R^n}\left[\frac{R_m(\tilde{A};x,y)\psi_t(x-y)}{|x-y|^m}-\frac{R_m(\tilde{A};x,u)\psi_t(x-u)}{|x-u|^m}\right]a(y)dy \\ &\quad-\chi_{(4Q)^c}(x)\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int_{R^n}\left[\frac{\psi_t(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m}-\frac{\psi_t(x-u)(x-u)^\alpha}{|x-u|^m}\right]D^\alpha\tilde{A}(y)a(y)dy \\ &\quad-\chi_{(4Q)^c}(x)\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}\int_{R^n}\frac{(x-u)^\alpha}{|x-u|^m}\psi_t(x-u)D^\alpha\tilde{A}(y)a(y)dy, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
g_\delta^A(a)(x) &= \|F_t^A(a)(x)\| \le \chi_{4Q}(x)\|F_t^A(a)(x)\| \\
&\quad + \chi_{(4Q)^c}(x)\left\| \int_{R^n} \left[\frac{R_m(\tilde{A};x,y)\psi_t(x-y)}{|x-y|^m} - \frac{R_m(\tilde{A};x,u)\psi_t(x-u)}{|x-u|^m}\right] a(y)dy \right\| \\
&\quad + \chi_{(4Q)^c}(x)\left\| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}\int_{R^n}\left[\frac{\psi_t(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m} - \frac{\psi_t(x-u)(x-u)^\alpha}{|x-u|^m}\right] D^\alpha\tilde{A}(y)a(y)dy \right\| \\
&\quad + \chi_{(4Q)^c}(x)\left\| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}\int_{R^n} \frac{(x-u)^\alpha}{|x-u|^m}\psi_t(x-u)D^\alpha\tilde{A}(y)a(y)dy \right\| \\
&= I_1(x) + I_2(x,u) + I_3(x,u) + I_4(x,u).
\end{aligned}$$

类似于 (i) 的证明, 得

$$||I_1(\cdot)||_{L^{n/(n-\delta)}} \le ||g_\delta^A(a)||_{L^q}|4Q|^{(n-\delta)/n-1/q} \le C||a||_{L^p}|Q|^{1-1/p} \le C;$$

$$\begin{aligned}
&||I_2(\cdot,u)||_{L^{n/(n-\delta)}} \\
&\le C\sum_{k=2}^\infty \left[\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}\left(\int_Q\left(\frac{|y-u|}{|x-y|^{m+n+1-\delta}} + \frac{|y-u|^\varepsilon}{|x-y|^{m+n+\varepsilon-\delta}}\right)|R_m(\tilde{A};x,y)|\,|a(y)|dy\right)^{\frac{n}{n-\delta}}dx\right]^{\frac{n-\delta}{n}} \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=2}^\infty\left[\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}\left(\int_Q \frac{|y-u|}{|x-y|^{n+1-\delta}}|a(y)|dy\right)^{\frac{n}{n-\delta}}dx\right]^{\frac{n-\delta}{n}} \\
&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=2}^\infty\left[\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}\left(\int_Q k\left(\frac{|y-u|}{|x-y|^{n+1-\delta}} + \frac{|y-u|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon-\delta}}\right)|a(y)|dy\right)^{\frac{n}{n-\delta}}dx\right]^{\frac{n-\delta}{n}} \\
&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=2}^\infty\left[\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}k\left(\frac{d}{(2^kd)^{n+1-\delta}} + \frac{d^\varepsilon}{(2^kd)^{n+\varepsilon-\delta}}\right)^{\frac{n-\delta}{n}}dx\right]^{(n-\delta)/n}||a||_{L^\infty}|Q| \\
&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=2}^\infty k(2^{-k}+2^{-\varepsilon k}) \le C;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&||I_3(\cdot,u)||_{L^{n/(n-\delta)}} \\
&\le C\sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=2}^\infty\left[\int_{2^{k+1}Q\setminus 2^kQ}\left(\int_Q\left(\frac{|y-u|}{|x-y|^{n+1-\delta}} + \frac{|y-u|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon-\delta}}\right)|D^\alpha\tilde{A}(y)||a(y)|dy\right)^{\frac{n}{n-\delta}}dx\right]^{\frac{n-\delta}{n}} \\
&\le C\sum_{|\alpha|=m}\sum_{k=2}^\infty\left(\frac{d}{(2^kd)^{n+1-\delta}} + \frac{d^\varepsilon}{(2^kd)^{n+\varepsilon-\delta}}\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|D^\alpha\tilde{A}(y)|dy\right)||a||_{L^\infty}|Q||2^kQ|^{\frac{n-\delta}{n}} \\
&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=2}^\infty(2^{-k}+2^{-\varepsilon k}) \le C.
\end{aligned}$$

因此, 由 $I_4(x,u)$ 的条件, 得

$$||g_\delta^A(a)||_{L^{n/(n-\delta)}} \le C.$$

(v) 给定任意方体 $Q = Q(x_0,d)$, 对

$$f = f\chi_{4Q} + f\chi_{(4Q)^c} = f_1 + f_2 \quad 和 \quad u \in 3Q\setminus 2Q,$$

记

$$\tilde{F}_t^A(f)(x)=\tilde{F}_t^A(f_1)(x)+\int_{R^n}\frac{R_m(\tilde{A};x,y)}{|x-y|^m}\psi_t(x-y)f_2(y)dy$$
$$-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x)-(D^\alpha A)_Q)\int_{R^n}\left[\frac{\psi_t(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m}-\frac{\psi_t(u-y)(u-y)^\alpha}{|u-y|^m}\right]f_2(y)dy$$
$$-\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x)-(D^\alpha A)_Q)\int_{R^n}\frac{(u-y)^\alpha}{|u-y|^m}\psi_t(u-y)f_2(y)dy,$$

则

$$\left|\tilde{g}_\delta^A(f)(x)-g_\delta\left(\frac{R_m(\tilde{A};x_0,\cdot)}{|x_0-\cdot|^m}f_2\right)(x_0)\right|=\left|\|\tilde{F}_t^A(f)(x)\|-\left\|F_t\left(\frac{R_m(\tilde{A};x_0,\cdot)}{|x_0-\cdot|^m}f_2\right)(x_0)\right\|\right|$$
$$\le\left\|\tilde{F}_t^A(f)(x)-F_t\left(\frac{R_m(\tilde{A};x_0,\cdot)}{|x_0-\cdot|^m}f_2\right)(x_0)\right\|$$
$$\le\|\tilde{F}_t^A(f_1)(x)\|+\left\|\int_{R^n}\left[\frac{R_m(\tilde{A};x,y)}{|x-y|^m}\psi_t(x-y)-\frac{R_m(\tilde{A};x_0,y)}{|x_0-y|^m}\psi_t(x_0-y)\right]f_2(y)dy\right\|$$
$$+\left\|\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x)-(D^\alpha A)_Q)\int_{R^n}\left[\frac{\psi_t(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^m}-\frac{\psi_t(u-y)(u-y)^\alpha}{|u-y|^m}\right]f_2(y)dy\right\|$$
$$+\left\|\sum_{|\alpha|=m}\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha A(x)-(D^\alpha A)_Q)\int_{R^n}\frac{(u-y)^\alpha}{|u-y|^m}\psi_t(u-y)f_2(y)dy\right\|$$
$$=J_1(x)+J_2(x)+J_3(x,u)+J_4(x,u).$$

类似于 (i) 和 (iv) 的证明, 得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q J_1(x)dx\le|Q|^{-1/q}||\tilde{g}_\delta^A(f_1)||_{L^q}\le C|Q|^{-1/q}||f_1||_{L^p}\le C||f||_{L^{n/\delta}};$$
$$\frac{1}{|Q|}\int_Q J_2(x)dx\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\frac{1}{|Q|}\int_Q\sum_{k=2}^\infty\int_{2^{k+1}Q\setminus2^kQ}$$
$$\times k\left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+1-\delta}}+\frac{|x-x_0|^\varepsilon}{|x_0-y|^{n+\varepsilon-\delta}}\right)|f(y)|dydx$$
$$\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}\sum_{k=1}^\infty k(2^{-k}+2^{-\varepsilon k})$$
$$\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}};$$
$$\frac{1}{|Q|}\int_Q J_3(x,u)dx\le\sum_{|\alpha|=m}\frac{C}{|Q|}\int_Q|D^\alpha A(x)-(D^\alpha A)_Q)|$$
$$\times\sum_{k=2}^\infty\int_{2^{k+1}Q\setminus2^kQ}\left(\frac{|x-u|}{|x-y|^{n+1-\delta}}+\frac{|x-u|^\varepsilon}{|x-y|^{n+\varepsilon-\delta}}\right)|f(y)|dydx$$
$$\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=2}^\infty(2^{-k}+2^{-\varepsilon k})||f||_{L^{n/\delta}}\le C||f||_{L^{n/\delta}}.$$

因此, 由 $J_4(x,u)$ 的条件, 得

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q\left|\tilde{g}_\delta^A(f)(x)-g_\delta\left(\frac{R_m(\tilde{A};x_0,\cdot)}{|x_0-\cdot|^m}f_2\right)(x_0)\right|dx\le C||f||_{L^{n/\delta}}.$$

证毕.

定理 2 的证明 (i) 首先由引理 2 的证明, 知

$$\mu_\delta(f)(x) \le C\int_{R^n}\frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\delta}}dy,$$

因此, 当 $1<p<n/\delta$, $1/q=1/p-\delta/n$ 时, μ_δ 为 (L^p,L^q) 有界的. 我们只须证明 μ_δ 满足主要定理的尺寸条件. 设 $\mathrm{supp} f\subset(2Q)^c$, 令 $\tilde{A}(x)$ 与定理 1 的证明相同. 记

$$\begin{aligned}
&||F_t^{\tilde{A}}(f)(x)-F_t^{\tilde{A}}(f)(x_0)||\\
&\le\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)R_m(\tilde{A};x,y)}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}f(y)dy-\int_{|x_0-y|\le t}\frac{\Omega(x_0-y)R_m(\tilde{A};x_0,y)}{|x_0-y|^{m+n-1-\delta}}f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\
&\quad+\sum_{|\alpha|=m}\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\le t}\left(\frac{\Omega(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}-\int_{|x_0-y|\le t}\frac{\Omega(x_0-y)(x_0-y)^\alpha}{|x_0-y|^{m+n-1-\delta}}\right)D^\alpha\tilde{A}(y)f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\
&\le\left(\int_0^\infty\left[\int_{|x-y|\le t,\ |x_0-y|>t}\frac{|\Omega(x-y)||R_m(\tilde{A};x,y)|}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}|f(y)|dy\right]^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\int_0^\infty\left[\int_{|x-y|>t,\ |x_0-y|\le t}\frac{|\Omega(x_0-y)||R_m(\tilde{A};x_0,y)|}{|x_0-y|^{m+n-1-\delta}}|f(y)|dy\right]^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\int_0^\infty\left[\int_{|x-y|\le t,|x_0-y|\le t}\left|\frac{\Omega(x-y)R_m(\tilde{A};x,y)}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}-\frac{\Omega(x_0-y)R_m(\tilde{A};x_0,y)}{|x_0-y|^{m+n-1-\delta}}\right||f(y)|dy\right]^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\
&\quad+\sum_{|\alpha|=m}\left(\int_0^\infty\left|\int_{|x-y|\le t}\left(\frac{\Omega(x-y)(x-y)^\alpha}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}-\int_{|x_0-y|\le t}\frac{\Omega(x_0-y)(x_0-y)^\alpha}{|x_0-y|^{m+n-1-\delta}}\right)D^\alpha\tilde{A}(y)f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}\\
&:=K_1+K_2+K_3+K_4.
\end{aligned}$$

由 $|x-y|\approx|x_0-y|$, 当 $y\in(2Q)^c$, 有

$$\begin{aligned}
K_1&\le C\int_{R^n\setminus\tilde{Q}}\frac{|f(y)|\,|R_m(\tilde{A};x,y)|}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}\left(\int_{|x-y|\le t<|x_0-y|}\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}dy\\
&\le C\int_{R^n\setminus\tilde{Q}}\frac{|f(y)|\,|R_m(\tilde{A};x,y)|}{|x-y|^{m+n-1-\delta}}\frac{|x_0-x|^{1/2}}{|x-y|^{3/2}}dy\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}.
\end{aligned}$$

类似地, 有 $K_2\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}$.

对 K_3, 由下列不等式 (见文 [16]):

$$\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1-\delta}}-\frac{\Omega(x_0-y)}{|x_0-y|^{n-1-\delta}}\right|\le\left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n-\delta}}+\frac{|x-x_0|^\gamma}{|x_0-y|^{n-1+\gamma-\delta}}\right),$$

得

$$\begin{aligned}
K_3&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\int_{R^n\setminus\tilde{Q}}\left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n-\delta}}+\frac{|x-x_0|^\gamma}{|x_0-y|^{n-1-\delta+\gamma}}\right)\\
&\quad\times\left(\int_{|x_0-y|\le t,|x-y|\le t}\frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}|f(y)|dy\\
&\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}\sum_{k=1}^\infty k(2^{-k}+2^{-\gamma k})||f||_{L^{n/\delta}}\le C\sum_{|\alpha|=m}||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}}||f||_{L^{n/\delta}}.
\end{aligned}$$

对 K_4, 类似于 K_1, K_2, K_3 的证明, 得

$$K_4 \le C \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{k+1}\tilde{Q}\setminus 2^k\tilde{Q}} \left(\frac{|x-x_0|}{|x_0-y|^{n+1-\delta}} + \frac{|x-x_0|^{1/2}}{|x_0-y|^{n+1/2-\delta}} + \frac{|x-x_0|^{\gamma}}{|x_0-y|^{n+\gamma-\delta}} \right) |D^\alpha \tilde{A}(y)|\,|f(y)|dy$$

$$\le C \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}} \sum_{k=1}^{\infty} k(2^{-k} + 2^{-k/2} + 2^{-\gamma k}) ||f||_{L^{n/\delta}}$$

$$\le C \sum_{|\alpha|=m} ||D^\alpha A||_{\mathrm{BMO}} ||f||_{L^{n/\delta}}.$$

用与定理 1 的证明相同的方法即可证明 (ii), (iii), (iv), (v), 限于篇幅, 我们省略细节. 证毕.

参 考 文 献

[1] Coifman R., Rochberg R. and Weiss G., Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.,* 1976, **103**: 611–635.

[2] Chanillo S., A note on commutators, *Indiana Univ. Math. J.,* 1982, **31**: 7–16.

[3] Harboure E., Segovia C. and Torrea J. L., Boundedness of commutators of fractional and singular integrals for the extreme values of p, *Illinois J. Math.,* 1997, **41**: 676–700.

[4] Garcia-Cuerva J. and Rubio de Francia J. L., Weighted norm inequalities and related topics, Amsterdam: North-Holland Math., 1985, **16**.

[5] Torchinsky A., The real variable methods in harmonic analysis, New York: Pure and Applied Math., 123, Academic Press, 1986.

[6] Torchinsky A. and Wang S., A note on the Marcinkiewicz integral, *Colloq. Math.,* 1990, **60/61**: 235–243.

[7] Alvarez J., Babgy R. J., Kurtz D. S. and Perez C., Weighted estimates for commutators of linear operators, *Studia Math.,* 1993, **104**: 195–209.

[8] Liu L. Z., Weighted weak type estimates for commutators of Littlewood–Paley operator, *Japanese J. of Math.,* 2003, **29**(1): 1–13.

[9] Liu L. Z., Weighted weak type (H^1, L^1) estimates for commutators of Littlewood–Paley operator, *Indian J. of Math.,* 2003, **45**(1): 71–78.

[10] Liu L. Z., Weighted block-H^1 estimates for commutators of Littlewood–Paley operators, *Southeast Asian Bull. of Math.,* 2004, **27**: 833–838.

[11] Liu L. Z., Lu S. Z. and Xu J. S., Boundedness for commutators of Littlewood–Paley operators, *Adv. in Math.,* 2003, **32**: 473–480 (in Chinese).

[12] Liu L. Z., Endpoint estimates for multilinear operators of some sublinear operators on Herz and Herz type Hardy spaces, *Studia Sci. Math. Hungarica,* 2005, **42**(2): 131–151.

[13] Liu L. Z., Weighted boundedness of multilinear operators for the extreme cases, *Taiwanese J. of Math.,* 2006.

[14] Chen W. G. and H, G. E., Weak type (H^1, L^1) estimate for multilinear singular integral operator, *Adv. in Math.,* 2001, **30**(1): 63–69 (in Chinese).

[15] Cohen J., A sharp estimate for a multilinear singular integral on R^n, *Indiana Univ. Math. J.,* 1981, **30**: 693–702.

[16] Cohen J. and Gosselin J., On multilinear singular integral operators on R^n, *Studia Math.,* 1982, **72**: 199–223.

[17] Cohen J. and Gosselin J., A BMO estimate for multilinear singular integral operators, *Illinois J. Math.,* 1986, **30**: 445–465.

[18] Coifman R. and Meyer Y., Wavelets, Calderón-Zygmund and multilinear operators, Cambridge: Cambridge Studies in Advanced Math. 48, Cambridge University Press, 1997.

[19] Ding Y. and Lu S. Z., Weighted boundedness for a class rough multilinear operators, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2001, **17**: 517–526.

[20] Stein E. M., Harmonic Analysis: real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, Princeton NJ: Princeton Univ. Press, 1993.