第49卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.49, No.5
2006年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-1153-10 **文献标识码: A**

非线性退化时滞微分控制系统的函数能控性

蒋 威

安徽大学数学与计算科学学院 合肥 230039
E-mail: jiangwei@ahu.edu.cn

摘 要 本文讨论非线性退化时滞微分控制系统. 首先就非线性退化时滞微分控制系统的一阶变分系统给出变易公式, 然后就非线性退化时滞微分控制系统的一阶变分系统的函数能控性给出一些判据, 最后给出关于非线性退化时滞微分控制系统的函数能控性的判据.

关键词 时滞; 一阶变分系统; 函数能控性
MR(2000) 主题分类 34K15
中图分类 O175.12

Function-Controllability of Nonlinear Singular Delay Differential Control Systems

Wei JIANG

School of Mathematics and Computational Science, University of Anhui,
Heifei 230039*, P. R. China*
E-mail: jiangwei@mars.ahu.edu.cn

Abstract In this paper, we discuss the nonlinear singular delay differential control systems. Firstly we give variation formula for first variation systems of nonlinear singular delay differential control systems, then for the function-controllability of first variation systems of nonlinear singular delay differential control systems, we give some criteria, and finally we give the criteria for the function-controllability of nonlinear singular delay differential control systems.

Keywords delay; first variation systems; function-controllability.
MR(2000) Subject Classification 34K15
Chinese Library Classification O175.12

1 引言及定义

近来, 关于时滞系统和退化系统的研究越来越热 [1–21]. 这主要是由于时滞和退化现象是在诸如经济系统、电力系统、生物系统、生理系统等等许多实际系统中普遍存在的现象. 到目前为止, 许多学者已经分别研究了时滞系统和退化系统, 并得到了许多好的结果. 但是, 有许多系统同时具有时滞和退化现象, 称这类系统为退化时滞系统. 在文献 [3, 7, 13, 15–20] 中已经讨论了这类

收稿日期: 2003-05-12; 修改日期: 2005-04-22; 接受日期: 2005-07-14
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10241005); 教育部重点项目 (205068); 安徽大学创新团队资助项目

系统, 且得到了一些结果. 我们注意到, 很少有关于非线性退化时滞微分控制系统的函数能控性的研究.

在控制理论中, 能控性是一个重要的课题, 而函数能控性则是一个新的重要概念. 毫无疑问, 研究非线性退化时滞微分控制系统的函数能控性十分重要.

非线性退化时滞微分控制系统的一般形式可以写作

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau), u(t)), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \tag{1}$$

这里 $x(t) \in R^n$ 为状态向量, $E \in R^{n\times n}$ 是一个退化矩阵, $u(t) \in R^m$ 为控制向量, $\tau > 0$ 为时滞, $\varphi(t)$ 为初始状态函数, $f(t, x, y, z) \in C^1(R \times R^n \times R^n \times R^m, R^n)$.

记 $\mathscr{B}$ 为由定义在 $[t_0 - \tau, t_0]$ 上 n 维可容初始向量值函数组成的初始空间.

定义 1 如果系统 (1) 有零解, 设

$$A(t) = \frac{\partial f(t,0,0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=y=z=0},$$
$$B(t) = \frac{\partial f(t,0,0,0)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x=y=z=0},$$
$$C(t) = \frac{\partial f(t,0,0,0)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{x=y=z=0},$$

我们称

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + C(t)u(t), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{2}$$

为系统 (1) 关于零解的一阶变分系统.

设 $\mathscr{K}$ 为定义在 $[t_0 - \tau, t_0]$ 上函数的一个抽象的赋范线性空间. 我们有

定义 2 设 $\alpha \in \mathscr{K}$; $x^0(\cdot, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha)\,(\varphi_\alpha \in \mathscr{B})$ 为系统 (1) 的满足当 $t \in [t_1, t_1 + \tau]$ 时, $x^0(t, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha) = \alpha(t - t_1 + t_0 - \tau)$ 的轨迹, 设

$$A(t) = \frac{\partial f(t, x^0(t, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha), x^0(t-\tau, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha), u_\alpha(t))}{\partial x},$$
$$B(t) = \frac{\partial f(t, x^0(t, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha), x^0(t-\tau, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha), u_\alpha(t))}{\partial y},$$
$$C(t) = \frac{\partial f(t, x^0(t, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha), x^0(t-\tau, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha), u_\alpha(t))}{\partial z},$$

则称系统 (2) 为系统 (1) 关于 $x^0(\cdot, t_0, \varphi_\alpha, u_\alpha)$ 的一阶变分系统.

定义 3 设 $\alpha(\cdot)$ 为空间 $\mathscr{K}$ 的一个函数, $\mathscr{B}$ 初始函数空间. 如果对于任意给的 $\varphi \in \mathscr{B}$, 存在一个时刻 t_1, $t_0 < t_1 < \infty$ 和一个可容的控制段 $u_{[t_0, t_1+\tau]}$, 使得 $x(t; t_0, \varphi, u) = \alpha(t - t_1 + t_0 - \tau)$, $t \in [t_1, t_1 + \tau]$. 这里 $x(t; t_0, \varphi, u)$ 为系统 (1) 的从 t_0 开始以 φ 为初始函数以 u 为初始控制的解, 则称系统 (1) 关于 $\mathscr{B}$ 对于 $\mathscr{K}$ 中的函数 $\alpha(\cdot)$ 是能控的. 如果 $\alpha(\cdot) \equiv 0$, 系统 (1) 关于 $\mathscr{B}$ 对于 $\alpha(\cdot) \equiv 0$ 是能控的, 则称该系统关于零点能控; 如果系统 (1) 关于 $\mathscr{K}$ 中的所有函数都能控, 则称其关于空间 $\mathscr{K}$ 能控.

本文将讨论非线性退化时滞微分控制系统 (1). 通篇总是假定系统是唯一可解的.

如果 $\det(E) \neq 0$, 系统 (1) 将是正常的时滞微分系统. 从文 [7] 可以知道非线性中立型控制系统也是一种非线性退化时滞微分控制系统. 所以, 本文推广了文 [11] 和 [21] 的主要结果.

2 一阶变分系统的变易公式

我们首先考虑非线性退化时滞微分控制系统的一阶变分系统 (2), 并给出其变易公式.

定义 4 设 E 为一个方阵, 如果存在一个矩阵 E^d 满足:

1^0 $EE^d = E^dE$;

2^0 $E^dEE^d = E^d$;

3^0 $(I - E^dE)E^l = 0$,

则我们称 E^d 为矩阵 E 的 Drazin 逆矩阵, 简称 D- 逆阵. 这里 l 是矩阵 E 的指标, 为使 $\mathrm{rank}(E^{l+1}) = \mathrm{rank}|, (E^l)$ 成立的最小非负整数.

由文 [3] 或 [5], 我们有:

引理 1 对于任意方阵 E, 其D-逆阵存在唯一, 且如果其Jordan标准型为 $E = T\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix}T^{-1}$. 这里 J_0 为幂零阵, J_1 和 T 均为可逆阵, 则 $E^d = \begin{pmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}$.

我们可以将系统 (2) 分为三个系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + EE^dC(t)u(t), & t \geq t_0, \\ x(t) \equiv 0, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + (I - EE^d)C(t)u(t), & t \geq t_0, \\ x(t) \equiv 0, & t_0 - \tau \leq t \leq t_0 \end{cases} \tag{4}$$

和

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau), & t \geq t_0, \\ x(t) = \varphi(t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases} \tag{5}$$

这里 $I \in R^{n\times n}$ 为单位阵.

容易证明:

定理 1 如果 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 分别为系统 (3) 和 (4) 的解, $x(t,\varphi,0)$ 为系统 (5) 的解, 则 $x(t) = x(t,\varphi,0) + x_1(t) + x_2(t)$ 为系统 (2) 的解.

定义 5 对于系统 (3), 如果 $X(t,s) \in R^{n\times n}$, 且满足方程

$$\begin{cases} E\dfrac{\partial X(t,s)}{\partial t} = A(t)X(t,s) + B(t)X(t-\tau,s), & t > s, \\ X(t,s) = \begin{cases} EE^d, & t = s, \\ 0, & t < s, \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

我们称 $X(t,s)$ 为系统 (3) 的基础解阵.

定义 6 对于系统 (4), 如果 $Y(t,s) \in R^{n\times n}$, 且满足方程

$$\begin{cases} E\dfrac{\partial Y(t,s)}{\partial t} = A(t)Y(t,s) + B(t)Y(t-\tau,s) + (I - EE^d)\delta(t-s), & t > s, \\ Y(t,s) = \begin{cases} I - EE^d, & t = s, \\ 0, & t < s, \end{cases} \end{cases} \tag{7}$$

我们称 $Y(t,s)$ 为系统 (4) 的基础解阵. 这里 $\delta(t)$ 是 δ- 函数 [3, 5].

定理 2 设 $X(t,s)$ 为系统 (3) 的基础解阵, 系统 (3) 的解可以写作

$$x_1(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,s)E^dC(s)u(s)ds. \tag{8}$$

证明 由 (8) 式, 我们有

$$\begin{aligned} E\dot{x}_1(t) &= E\int_{t_0}^{t}\frac{\partial X(t,s)}{\partial t}E^dC(s)u(s)ds + EX(t,t)E^dC(t)u(t) \\ &= \int_{t_0}^{t}E\frac{\partial X(t,s)}{\partial t}E^dC(s)u(s)ds + EEE^dE^dC(t)u(t). \end{aligned}$$

由于 $E^dEE^d = E^d$, $EE^d = E^dE$, 且由 (6) 式, 我们有

$$\begin{aligned} E\dot{x}_1(t) &= \int_{t_0}^{t}E\frac{\partial X(t,s)}{\partial t}E^dC(s)u(s)ds + EE^dC(t)u(t) \\ &= \int_{t_0}^{t}(A(t)X(t,s)+B(t)X(t-\tau,s))E^dC(s)u(s)ds + EE^dC(t)u(t) \\ &= A(t)\int_{t_0}^{t}X(t,s)E^dC(s)u(s)ds + B(t)\int_{t_0}^{t}X(t-\tau,s)E^dC(s)u(s)ds + EE^dC(t)u(t) \\ &= A(t)x_1(t) + B(t)\int_{t_0}^{t-\tau}X(t-\tau,s)E^dC(s)u(s)ds \\ &\quad + B(t)\int_{t-\tau}^{t}X(t-\tau,s)E^dC(s)u(s)ds) + EE^dC(t)u(t) \\ &= A(t)x_1(t) + B(t)x_1(t-\tau) + EE^dC(t)u(t). \end{aligned}$$

定理 2 得证.

引理 2 对于任意方阵 E, 我们有

$$(E+I)(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1} = I-EE^d. \tag{9}$$

证明 由引理 1, 如果

$$E = T\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix}T^{-1}, \quad 则 \quad E^d = T\begin{pmatrix} J_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}T^{-1}.$$

由于 J_0 为幂零矩阵, J_0+I 可逆, 我们有

$$\begin{aligned} I-EE^d &= T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}T = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_0+I \end{pmatrix}T \times T^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J_0+I \end{pmatrix}^{-1}T \\ &= (E+I)(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}. \end{aligned}$$

引理 3 对于 δ- 函数, 我们有

$$\int_0^t \delta(t-s)C(s)u(s)ds = C(t)u(t). \tag{10}$$

证明 我们知道, 如果函数 $f*g$ 定义为 $f*g = \int_0^t g(t-s)f(s)ds$, 其 Laplace 变换为 $L(f*g) = L(f)L(g)$, 又 $L(\delta)=1$, 这样我们有

$$L\Big(\int_0^t \delta(t-s)C(s)u(s)ds\Big) = L(\delta(t))L(C(t)u(t)) = L(C(t)u(t)),$$

即 $\int_0^t \delta(t-s)C(s)u(s)ds = C(t)u(t)$.

定理 3 设 $Y(t,s)$ 为系统 (4) 的基础解阵, 系统 (4) 的解可以写作

$$x_2(t)=\int_{t_0}^{t}Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds. \tag{11}$$

证明 从 (11) 和 (7) 式, 我们有

$$\begin{aligned}E\dot{x}_2(t)=&E\int_{t_0}^{t}\frac{\partial Y(t,s)}{\partial t}(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+EY(t,t)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(t)u(t)\\=&\int_{t_0}^{t}E\frac{\partial Y(t,s)}{\partial t}(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+E(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(t)u(t)\\=&\int_{t_0}^{t}(A(t)Y(t,s)+B(t)Y(t-\tau,s))(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+\int_{t_0}^{t}(I-EE^d)\delta(t-s)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+E(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(t)u(t).\end{aligned}$$

由引理 3 得

$$\begin{aligned}E\dot{x}_2(t)=&A(t)\int_{t_0}^{t}Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+B(t)\int_{t_0}^{t}Y(t-\tau,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}\int_{t_0}^{t}\delta(t-s)C(s)u(s)ds\\&+E(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(t)u(t)\\=&A(t)\int_{t_0}^{t}Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+B(t)\int_{t_0}^{t-\tau}Y(t-\tau,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds\\&+(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(t)u(t)\\&+E(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(t)u(t)\\=&A(t)x_2(t)+B(t)x_2(t-\tau)\\&+(I+E)(I-EE^d)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(t)u(t).\end{aligned}$$

由引理 2 知 $E\dot{x}_2(t)=A(t)x_2(t)+B(t)x_2(t-\tau)+(I-EE^d)C(t)u(t)$, 即 $x_2(t)$ 为系统 (4) 的解.

由定理 2, 定理 3 和定理 1, 我们有

定理 4 设 $X(t,s)$ 为系统 (3) 的基础解阵, $Y(t,s)$ 为系统 (4) 的基础解阵, $x(t,\varphi,0)$ 为系统 (5) 的解, 则系统 (2) 的解可以写作

$$x(t)=x(t,\varphi,0)+\int_{t_0}^{t}X(t,s)E^dC(s)u(s)ds+\int_{t_0}^{t}Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}C(s)u(s)ds. \tag{12}$$

3 一阶变分系统的函数能控性

由定理 4, 我们有系统 (2) 的解也可以写作

$$x(t) = x(t,\varphi,0) + \int_{t_0}^{t} [X(t,s)E^d + Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s)u(s)ds. \tag{13}$$

现在, 设

$$\begin{aligned} W(t_0,t_1) = & \int_{t_0}^{t_1} [X(t_1,s)E^d + Y(t_1,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s) \\ & \times C^T(s)[(E^d)^T X^T(t_1,s) + ((I+E(I-EE^d))^{-1})^T Y^T(t_1,s)]ds, \end{aligned} \tag{14}$$

这里 "T" 表示转置.

定理 5 对于系统 (2), 和任何函数 $\alpha(\cdot) \in \mathscr{K}$, 如果存在 $t_1 > t_0$, 使得

$$\operatorname{rank}(W(t_0,t_1)) = n, \tag{15}$$

则存在一个可容的控制 $u(t)$ 能够使得系统的解在有限时间内零相交.

证明 在 (13) 式中, 取

$$\begin{aligned} u^*(s) = & -C^T(s)[(E^d)^T X^T(t_1,s) + ((I+E(I-EE^d))^{-1})^T Y^T(t_1,s)] \\ & \times W^{-1}(t_0,t_1)x(t_1,\varphi,0), \quad s \in [t_0,t_1], \end{aligned}$$

我们有

$$x(t_1) = x(t_1,\varphi,0) + \int_{t_0}^{t_1} [X(t_1,s)E^d + Y(t_1,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s)u^*(s)ds = 0.$$

定理 6 如果系统 (2) 满足:

(i) 存在 $t_1 > t_0$, 使得 (15) 成立;

(ii) 方程

$$B(t)x(t-\tau) + C(t)u(t) = 0 \tag{16}$$

在区间 $(t_1, t_1+\tau)$ 上有可容的控制,
则系统 (2) 关于初始函数空间 $\mathscr{B}$ 对于零点是能控的.

证明 由定理 5, 我们有: 对于任何 $\varphi \in \mathscr{B}$ 存在 $u_{[t_0,t_1]}$, 使得 $x(t_1,t_0,\varphi,u_{[t_0,t_1]}) = 0$. 如果 (16) 式成立, 则在区间 $(t_1,t_1+\tau)$ 上, 系统 (2) 成为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in (t_1,t_1+\tau), \\ x(t_1) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

显然, 我们可有对于所有的 $t \in [t_1,t_1+\tau]$, $x(t) = 0$.

定理 7 对于系统 (2) 和任意的函数 $\alpha(\cdot) \in \mathscr{K}$, 如果存在 $t_1 > t_0$, 使得系统 (15) 成立, 则对于任意的 $\varphi \in \mathscr{B}$ 存在一个可容控制 $u(t)$, 使得其解有

$$x(t_1,t_0,\varphi,u_{[t_0,t_1]}) = \alpha(t_0-\tau).$$

证明 在系统 (13) 中, 取

$$\begin{aligned} u^*(s) = & -C^T(s)[(E^d)^T X^T(t_1,s) + ((I+E(I-EE^d))^{-1})^T Y^T(t_1,s)] \\ & \times W^{-1}(t_0,t_1)[x(t_1,\varphi,0) - \alpha(t_0-\tau)], \quad s \in [t_0,t_1], \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= x(t_1,\varphi,0)q + \int_{t_0}^{t_1}[X(t_1,s)E^d + Y(t_1,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s)u^*(s)ds \\
&= x(t_1,\varphi,0) + \int_{t_0}^{t_1}[X(t_1,s)E^d + Y(t_1,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s) \\
&\quad \times [-C^T(s)[(E^d)^T X^T(t_1,s) + ((I+E(I-EE^d))^{-1})^T Y^T(t_1,s)] \\
&\quad \times W^{-1}(t_0,t_1)(x(t_1,\varphi,0)-\alpha(t_0-\tau))]ds \\
&= x(t_1,\varphi,0) - W(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)(x(t_1,\varphi,0)-\alpha(t_0-\tau)) \\
&= \alpha(t_0-\tau)).
\end{aligned}$$

定理 8 如果系统 (2) 满足:

(i) 存在 $t_1>t_0$, 使得系统 (15) 成立;

(ii) 方程

$$B(t)x(t-\tau)+C(t)u(t)-E\frac{d}{dt}\alpha(t-t_1+t_0-\tau)+A(t)\alpha(t-t_1+t_0-\tau)=0 \tag{18}$$

在区间 $(t_1,t_1+\tau)$ 上有可容的控制 $u(\cdot)$,

则系统 (2) 关于初始函数空间 $\mathscr{B}$ 对于函数 $\alpha(\cdot)\in\mathscr{K}$ 是能控的.

证明 对于 $\varphi\in\mathscr{B}$ 和系统 (15) 中的 t_1, 由定理 7 我们有, 存在一个可容的控制 $u_{[t_0,t_1]}$, 使得 $x(t_1,t_0,\varphi,u_{[t_0,t_1]})=\alpha(t_0-\tau)$. 如果方程 (18) 成立, 在区间 $(t_1,t_1+\tau)$ 上, 系统 (2) 为

$$\begin{cases} E\frac{d}{dt}(x(t)-\alpha(t-t_1+t_0-\tau)) = A(t)(x(t)-\alpha(t-t_1+t_0-\tau)), \quad t\in(t_1,t_1+\tau), \\ x(t_1)=\alpha(t_0-\tau), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} E\frac{d}{dt}(x(t)-\alpha(t-t_1+t_0-\tau)) = A(t)(x(t)-\alpha(t-t_1+t_0-\tau)), \quad t\in(t_1,t_1+\tau), \\ x(t_1)-\alpha(t_0-\tau)=0. \end{cases}$$

显然, 对所有的 $t\in[t_1,t_1+\tau]$, 我们可得 $x(t)-\alpha(t-t_1+t_0-\tau)=0$, 即 $x(t)=\alpha(t-t_1+t_0-\tau)$. 所以系统 (2) 关于初始函数空间 $\mathscr{B}$ 对于函数 $\alpha(\cdot)\in\mathscr{K}$ 是能控的.

4 系统 (1) 的函数能控性

现在考虑非线性退化时滞微分控制系统.

定理 9 对于系统 (1), 如果其一阶变分系统 (2) 关于零解满足条件:

(i) 存在 $t_1>t_0$, 使得系统 (15) 成立;

(ii) 在区间 $[t_1,t_1+\tau]$ 上, 对矩阵方程

$$E\dot{Z}(t)=A(t)Z(t)+B(t)Z(t-\tau)+C(t)U(t), \tag{19}$$

我们可以取一个矩阵 $U(t)\in R^{m\times n}$, 使得当 $\det(Z(t_1))\neq 0$ 时, 我们有 $\det(Z(t)\neq 0$,

则系统 (1) 关于 $\mathscr{B}$ 对于零点是能控的.

证明 对于 $t\in[t_0,t_1]$, 我们定义 $u^\xi(t)=u(t,\xi)=C^T(t)[(E^d)^T X^T(t_1,t)+((I+E(I-EE^d))^{-1})^T Y^T(t_1,t)]\xi$. 这里 $\xi\in R^n$. 对于此控制, 设系统 (1) 的解为 $x(t;t_0,\varphi,u^\xi)$.

设

$$J(t)=\left.\frac{\partial x(t;t_0,\varphi,u^{\xi})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}. \tag{20}$$

由系统 (1) 我们得：对于 $t\in[t_0,t_1+\tau]$,

$$\begin{aligned}E\dot{J}(t)&=\left.\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t,0,0,0)\frac{\partial x(t)}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial y}(t,0,0,0)\frac{\partial x(t-\tau)}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial z}(t,0,0,0)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]\right|_{\xi=0}\\&=A(t)J(t)+B(t)J(t-\tau)+C(t)\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0),\end{aligned}$$

即

$$E\dot{J}(t)=A(t)J(t)+B(t)J(t-\tau)+C(t)\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0). \tag{21}$$

显然, 对于 $t\in[t_0,t_1]$, $\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0)=C^T(t)[(E^d)^TX^T(t_1,t)+((I+E(I-EE^d))^{-1})^TY^T(t_1,t)]$.

由定理 4, 我们有系统 (21) 的解为

$$\begin{aligned}J(t)&=\int_{t_0}^{t}[X(t,s)E^d+Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s)\frac{\partial u}{\partial\xi}(s,0)ds\\&=\int_{t_0}^{t}[X(t,s)E^d+Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s)\\&\quad\times C^T(s)[(E^d)^TX^T(t_1,s)+((I+E(I-EE^d))^{-1})^TY^T(t_1,s)]ds,\end{aligned}$$

即 $J(t_1)=W(t_0,t_1)$. 由 (i), 我们有 $\det(J(t_1))\neq0$. 由 (ii), 在区间 $[t_1,t_1+\tau]$ 上, 可以取 $\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0)$, 使得对于系统 (21) 的解 $J(t)$ 满足当 $t\in[t_1,t_1+\tau]$ 时, $\det(J(t))\neq0$.

从系统 (20) 中 $J(t)$ 的定义及隐函数定理, $\det(J(t))\neq0$ 意味着我们可以解 $x(t;t_0,\varphi,\xi)=0$, $t_1\le t\le t_1+\tau$, ξ 为 φ 的函数. 定理 9 证毕.

注 1 定理 9 中的条件 (ii) 可较为容易满足. 例如, 设 $K=Z(t_1)$, 如果在区间 $[t_1,t_1+\tau]$ 上, 我们可以取矩阵 $U(t)\in R^{m\times n}$ 满足

$$A(t)K+B(t)Z(t-\tau)+C(t)U(t)=0, \tag{22}$$

则在区间 $[t_1,t_1+\tau]$ 上, 矩阵方程 (19) 的解为 $Z(t)\equiv K$. 当然, 当 $\det(Z(t_1))\neq0$ 时, $\det(Z(t)\neq0$.

定理 10 对于系统 (1), 如果其一阶变分系统 (2) 关于定义 2 中定义的系统的轨迹 $x^0(\cdot,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha)$ 满足条件：

(i) 对定义 2 中定义的 $t_1>t_0$, (15) 成立;

(ii) 在区间 $[t_1,t_1+\tau]$ 上, 对矩阵方程 (19), 我们可以取一个矩阵 $U(t)\in R^{m\times n}$, 使得当 $\det(Z(t_1))\neq0$ 时, 我们有 $\det(Z(t)\neq0$,

则系统 (1) 关于初始函数空间 $\mathscr{B}$ 对于空间 $\mathscr{K}$ 中的函数 $\alpha(\cdot)$ 是能控的.

证明 设 $x^0(\cdot,t_0,\varphi_\alpha,u_\alpha)\equiv x^0(t)$, 我们给出代换 $y(t)=x(t)-x^0(t)$, 则系统 (1) 将变为

$$E\dot{y}(t)=-E\dot{x}^0(t)+f(t,y(t)+x^0(t),y(t-\tau)+x^0(t-\tau),u(t)). \tag{23}$$

对于 $t\in[t_0,t_1]$, 定义 $u^{\xi}(t)=u(t,\xi)=u_\alpha(t)+C^T(t)[(E^d)^TX^T(t_1,t)+((I+E(I-EE^d))^{-1})^TY^T(t_1,t)]\xi$. 对于该控制, 设系统 (23) 的解为 $y(t;t_0,\varphi,u^{\xi})$.

设

$$J(t)=\left.\frac{\partial y(t;t_0,\varphi,u^{\xi})}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}. \tag{24}$$

由系统 (23) 可得, 对于 $t\in[t_0,t_1+\tau]$, 我们有

$$\begin{aligned}E\dot{J}(t)=&\bigg[\frac{\partial f}{\partial x}(t,x^0(t),x^0(t-\tau),u_\alpha(t))\frac{\partial y(t)}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial y}(t,x^0(t),x^0(t-\tau),u_\alpha(t))\frac{\partial y(t-\tau)}{\partial\xi}\\&+\frac{\partial f}{\partial z}(t,x^0(t),x^0(t-\tau),u_\alpha(t))\frac{\partial u}{\partial\xi}\bigg]\bigg|_{\xi=0}=A(t)J(t)+B(t)J(t-\tau)+C(t)\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0),\end{aligned}$$

即

$$E\dot{J}(t)=A(t)J(t)+B(t)J(t-\tau)+C(t)\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0).\tag{25}$$

显然, 对于 $t\in[t_0,t_1]$, 有

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0)=C^T(t)[(E^d)^TX^T(t_1,t)+((I+E(I-EE^d))^{-1})^TY^T(t_1,t)].$$

由定理 4 可得, 方程 (25) 的解为

$$\begin{aligned}J(t)&=\int_{t_0}^{t}[X(t,s)E^d+Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s)\frac{\partial u}{\partial\xi}(s,0)ds\\&=\int_{t_0}^{t}[X(t,s)E^d+Y(t,s)(I+E(I-EE^d))^{-1}]C(s)\\&\quad\times C^T(s)[(E^d)^TX^T(t_1,s)+((I+E(I-EE^d))^{-1})^TY^T(t_1,s)]ds,\end{aligned}$$

即 $J(t_1)=W(t_0,t_1)$. 由 (i) 得 $\det(J(t_1))\neq0$. 由 (ii), 在区间 $[t_1,t_1+\tau]$ 上, 我们可以取 $\frac{\partial u}{\partial\xi}(t,0)$, 使得方程 (25) 的解满足对 $t\in[t_1,t_1+\tau]$, $\det(J(t))\neq0$.

从方程 (24) 中 $J(t)$ 的定义, 由隐函数定理, $\det(J(t))\neq0$ 意味着可以解 $y(t;t_0,\varphi,\xi)=0$, $t_1\le t\le t_1+\tau$, ξ 为 φ 的函数. 即我们可解

$$x(t;t_0,\varphi,\xi)=\alpha(t-t_1+t_0-\tau),\quad t_1\le t\le t_1+h,$$

ξ 为 φ 的函数. 定理 10 得证.

注 2 定理 9 可以看作定理 10 的一个例子, 即如果在定理 10 中设 $y(t)=x(t)-x^0(t)$, 定理 10 即为定理 9.

现在给出一个例子说明本文的主要结果, 即定理 9.

例题 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x_1}(t)=\sin(x_1(t)+u_1(t))+\cos x_2(t)+\sin(x_1(t-1)+x_2(t-1)), & t\ge0,\\0=\sin(x_2(t)+x_2(t-1))+\cos(x_1(t)+x_1(t-1))+u_2(t), & t\ge0.\end{cases}\tag{26}$$

系统 (26) 的关于零解的一阶变分系统为

$$\begin{cases}\dot{x_1}(t)=x_1(t)+x_1(t-1)+x_2(t-1)+u_1(t), & t\ge0,\\0=x_2(t)+x_2(t-1)+u_2(t), & t\ge0.\end{cases}\tag{27}$$

对照系统 (27) 和 (2), 我们有

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

由系统 (6) 和 (7), 我们有：当 $t \in (0,1)$ 且 $t > S$ 时

$$X(t,s) = \begin{pmatrix} e^{t-s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta(t-s) \end{pmatrix}.$$

由系统 (14), 我们有：当 $t_1 \in (0,1)$ 时

$$W(0,t_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{2t_1}-1) & 0 \\ 0 & \int_0^{t_1} \delta^2(t)dt \end{pmatrix},$$

即 $\operatorname{rank}(W(0,t_1)) = 2$, 定理 9 中的条件 (i) 满足. 由注 1 容易得到定理 9 的条件 (ii) 成立. 由定理 9, 我们有系统 (26) 关于零点是能控的.

致谢 作者十分感谢本文编辑和审稿人为本文提出的建议.

参 考 文 献

[1] Hale J. K. and Verduyn Lunel S. M., Introduction to functional differential equations, Berlin, New York: Springer-Verlay, 1993.
[2] Zheng Z. X., Theory of functional differential equations, Hefei: Anhui Education Press, 1994 (in Chinese).
[3] Jiang W., The degenerate differential systems with delay, Hefei: University of Anhui Press, 1998 (in Chinese).
[4] Dai L., Singular control systems, Berlin, New York: Springer-Verlay, 1989.
[5] Campbell S. L., Singular systems of differential equation(II), *Pitman*, 1982.
[6] Xu S. Y. and Yang C. W., Stabilization of discrete-time singular systems: a matrix inequalities approach, *Automatica*, 1999, **35**: 1613–1617.
[7] Jiang W., Eigenvalue and stability of singular differential delay systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, **297**: 305–316.
[8] Jiang W. and Song W. Z., Controllability of singular systems with control delay, *Automatica*, 2001, **37**: 1873–1877.
[9] Jiang W. and Zheng Z. X., The constant variation formula and the general solution of degenerate neutral differential systems, *Acta Mathematical Applicatac Sinica*, 1998, **21**: 562–570.
[10] Jiang W. and Wang Z. C., The controllability of singular control systems, *Journal of Hunan University*, 1999, **26**: 6–9 (in Chinese).
[11] Jiang W., Song W. Z. and Fei S. M., The function-controllability of the nonlinear control systems with state and control delay, *London, World Scientific*, 2000, 143–148.
[12] Jiang W., Song W. Z. and Fei S. M., Song Shiji, On the controllability and stabilizability of control delay systems, *Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation*, 2000, 2846–2849.
[13] Jiang W. and Zheng Z. X., The general solution for the degenerate differential system with delay, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 1998, **42**: 769–780.
[14] Boyarinchev U. E., Solution of ordinary differential equation of degenerate system, *Science* (*Russian*),1988.
[15] Jiang W. and Zheng Z. X., On the degenerate differential systems with delay, *Ann. Diff. Equs.*, 1998, **14**: 204–211.
[16] Jiang W. and Zheng Z. X., The solvability of the degenerate differential systems with delay, *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 2000, **15**: 1–7.
[17] Jiang W. and Zheng Z. X., The algebraic criteria for the all-delay stability of two-dimensional degenerate differential systems with delay, *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 1998, **13**: 87–93.
[18] Jiang W. and Zheng Z. X., The general solution of degenerate difference systems with delay, *Journal of Mathematical Study*, 1998, **31**: 44–50.
[19] Jiang W., Zheng Z. X. and Wang Z. C., The V-functional method for the stability of degenerate differential systems with delays, *Ann. Diff. Equs.*, 2001, **17**: 10–20.
[20] Grispos E., Kalogeropoulos G. and Stratis I. G., On generalized linear singular delay systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, **245**: 430–446.
[21] Jiang W., The function–controllability of the nonlinear neutral control systems, *Journal of Mathematical Study*, 1996, **29**: 55–60.