第49卷第5期 数学学报中文版 Vol.49, No.5
2006年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-1127-06 **文献标识码:** **A**

Busemann–Petty 问题的对偶均质积分形式

袁淑峰

绍兴文理学院上虞分院数学系 上虞 312300
E-mail: yuanshufeng2003@163.com

冷岗松

上海大学数学系 上海 200444

摘 要 本文主要建立了凸体几何中 Busemann–Petty 问题的一个对偶均质积分形式, 并将 Funk 截面定理推广到了对偶均质积分形式.

关键词 Busemann–Petty 问题; 相交体; 对偶均质积分
MR(2000) 主题分类 52A40, 52A20
中图分类 O186.5

Dual Quermassintegral Versions of Busemann–Petty Problem

Shu Feng YUAN

Department of Mathematics of Shaoxing University, Shangyu 312300*, P. R. China*
E-mail: yuanshufeng 2003@163.*com*

Gang Song LENG

Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444*, P. R. China*

Abstract In this paper, we give a dual quermassintegral version of Busemann–Petty problem in Geometric convexity, and extend the Funk's section theorem to the dual quermassintegral.

Keywords Busemann–Petty problem; intersection bodies; dual quermassintegral
MR(2000) Subject Classification 52A40, 52A20
Chinese Library Classification O186.5

1 引言及定理

设 $\mathscr{K}^n$ 为 n 维欧几里得空间 R^n 中所有凸体 (有非空内点的紧凸集) 的集合, $\mathscr{K}^n_c$ 为 $\mathscr{K}^n$ 中所有中心对称的凸体的集合. 设 $\mathscr{L}^n$ 为 R^n 中所有星体 (在支撑上有连续径向函数的关于原点的星形集) 的集合, $\mathscr{L}^n_o$ 为 $\mathscr{L}^n$ 中所有包含原点的子集, $\mathscr{L}^n_c$ 为 $\mathscr{L}^n$ 中所有原点中心对称的集合. 用 Vol_i 表示 R^n 空间中的 i 维 Lebesgue 测度, 其中 $0 \le i \le n$. 设 $L \in \mathscr{L}^n$, u 是一单位向量, 则

收稿日期: 2004-06-04; 修改日期: 2004-10-22; 接受日期: 2005-05-30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271071)

$L\cap E_u$ 表示 L 与垂直于方向 u 的一维余子空间 E_u 的相交部分.

1956 年, 由 Busemann 和 Petty [1] 提出的一个著名问题为：

如果 $K,L\in\mathscr{K}_c^n$, 并且对任意 $u\in S^{n-1}$, 有

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(L\cap E_u)\le \mathrm{Vol}_{n-1}(K\cap E_u),$$

那么 $\mathrm{Vol}_n(L)\le\mathrm{Vol}_n(K)$ 是否成立?

Busemann 和 Petty [1] 注意到这个问题与 Minkowski 空间中的面积测度问题等价：假设 F,F' 是 R^n 中的 Minkowski 度量, 使得对于 r $(1<r<n)$, 任何 (充分光滑的) r 维表面积的 F- 面积不超过它的 F'- 面积, 则当 $s>r$ 时, 对 s 维表面积是否仍有相同的关系成立? Larman 和 Rogers 利用概率论巧妙地证明了当 $n\ge 12$ 时, Busemann–Petty 问题不成立 [2]; 下一个进展同样令人惊讶, Ball 利用立方体和球的截面和体积的关系证明了当 $n\ge 10$ 时, Busemann–Petty 问题不成立 [3]; Giannapoulos [4] 和 Bourgain [5] 分别独立地利用适当的圆柱体和球的任意小的摄动体取代立方体, 改进 Ball 的证明得到了当 $n\ge 7$ 时, Busemann–Petty 问题的否定回答. 当 $n\ge 5$ 和 $n\ge 6$ 时, Busemann–Petty 问题不成立的结论分别由 Papadimitrakis [6] 和 Gardner [7] 发现. 后来, Lutwak [8] 引入相交体 (Intersection body) 的概念, 建立了 Busemann–Petty 问题的解与相交体的关系, 为在所有维数空间中彻底解决该问题开创了新的局面. Lutwak 的结论为:

定理 A 如果 L 是 R^n 中的相交体, $K\in\mathscr{L}_o^n$, 且对所有的 $u\in S^{n-1}$, 有

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(L\cap E_u)\le \mathrm{Vol}_{n-1}(K\cap E_u),$$

那么 $\mathrm{Vol}_n(L)\le\mathrm{Vol}_n(K)$.

Gardner 对 $n=3$ 时的 Busemann–Petty 问题给出了肯定的回答 [9, 10]; Gaoyong Zhang (张高勇) [11] 解决了 Busemann–Petty 问题 $n=4$ 的情形. Zhang [12] 还发现 Busemann–Petty 问题在 R^n 中有肯定的回答的充要条件是 R^n 中每一个原点中心对称的凸体 L 是相交体, 也就是说 Lutwak 给出的定理 A 代表了 Busemann–Petty 问题最终解决的开端.

本文的第一个工作是给出比定理 A 更一般的对偶均质积分 (quermassintegral) 形式, 它是著名的 Busemann–Petty 问题的解的推广形式.

R^n 中的星体 K 的第 i 个对偶均质积分 $\widetilde{W}_i(K)$ 可由 Steiner 平行公式

$$\mathrm{Vol}_n(K\widetilde{+}\lambda B)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i\widetilde{W}_i(K).$$

来定义, 其中 B 是通常的 n 维单位球. 一般用 $\widetilde{W}_i$ 表示 n 维空间中的第 i 个对偶均质积分, 用 $\widetilde{w}_i$ 表示 $n-1$ 维空间中的第 i 个对偶均质积分. 我们得到的一个主要结果是：

定理 1 如果 L_1 是 R^n 中的相交体, $L_2\in\mathscr{L}_o^n$, 且对所有的 $u\in S^{n-1}$ 和任意给定的 i $(0\le i<n-1)$, 有

$$\widetilde{w}_i(L_1\cap E_u)\le\widetilde{w}_i(L_2\cap E_u),\tag{1.1}$$

那么

$$\widetilde{W}_i(L_1)\le\widetilde{W}_i(L_2),\tag{1.2}$$

当且仅当 $L_1=L_2$ 时, 等号成立.

在定理 1 中取 $i=0$, 即得 Busemann–Petty 问题的解.

Lutwak [8] 于 1988 年提出相交体的概念：令 $L \in \mathscr{L}_o^n$, $n \geq 2$, 则星体 L 的相交体 IL 定义为

$$\rho_{IL}(u) = \mathrm{Vol}_{n-1}(L \cap E_u) = \frac{1}{n-1}\int_{S^{n-1}\cap E_u} \rho_L(v)^{n-1} d\mathrm{Vol}_{n-2}(v).$$

后来, Goody, Lutwak 和 Weil [13] 提出另一个可替代的更广意义上的概念：R^n 中的星体 L_1 叫做相交体, 如果它满足 $\rho_{L_1} \in C(S^{n-1})$, 且 $\rho_{L_1} = R\mu$, 其中 R 是 Radon 变换, μ 是 S^{n-1} 上的有限偶的非负 Borel 测度. 相交体是对偶 Brunn–Minkowski 理论中的一个重要研究对象. 映照 $I : L \to IL$ 的各种性质的研究与总结体现在文献 [8, 12, 14]. Funk 截面定理 [15] 说明了映照 I 在原点中心对称星体类 (即 $\mathscr{L}_c^n$) 上的限制是一个单射, 亦即证明了如下著名的结果：

定理 B 如果 C, D 都属于 $\mathscr{L}_c^n$, 且对所有的 $u \in S^{n-1}$, 都有

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(C \cap E_u) = \mathrm{Vol}_{n-1}(D \cap E_u),$$

则 $C = D$.

2001 年, 冷岗松和张连生 [16] 在《中国科学》上对正交投影证明了如下结果:

定理 C 如果 $K \in \mathscr{K}^n$, $L \in \mathscr{K}_c^n$, $n \geq 2$ 且对所有的 $u \in S^{n-1}$ 和任意给定的 i $(0 \leq i < n)$, 有

$$w_i(L \mid E_u) = w_i(K \mid E_u),$$

那么 $W_i(L) \geq W_i(K)$ 当且仅当 L 和 K 在平移的意义下相等时等号成立.

本文的第二个主要工作是将 Funk 截面定理推广到了对偶均质积分形式, 也就是得到了定理 C 的对偶形式：

定理 2 如果 $K \in \mathscr{L}^n$, $L \in \mathscr{L}_c^n$, $n \geq 2$ 且对所有的 $u \in S^{n-1}$ 和任意给定的 i $(0 \leq i < n)$, 有

$$\widetilde{w}_i(L \cap E_u) = \widetilde{w}_i(K \cap E_u),$$

那么 $\widetilde{W}_i(L) \leq \widetilde{W}_i(K)$, 当且仅当 $L = K$ 时, 等号成立.

在定理 2 中取 $i = 0$, 即得 Funk 截面定理.

2 准备知识

如果 $L \in \mathscr{L}_o^n$, 则对任意 $u \in S^{n-1}$, 星体 L 关于原点的径向函数 ρ_L 可定义为

$$\rho_L(u) = \max\{c \geq 0 : cu \in L\}.$$

如果 L_i 是 R^n 的星体, 且 $t_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq m)$, 则径向线性组合 $t_1L_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} t_mL_m$ 定义为

$$t_1L_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} t_mL_m = \{t_1x_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} t_mx_m : x_i \in L_i\}.$$

对任意 $u \in S^{n-1}$, 有

$$\rho_{t_1L_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} t_mL_m}(u) = t_1\rho_{L_1}(u) + \cdots + t_m\rho_{L_m}(u). \tag{2.1}$$

在对偶混合体积理论 [12, 17, 18] 中, 下列等式和不等式是有用的.

设 $L_j \in \mathscr{L}_o^n$ $(1 \leq j \leq n)$, 则星体 L_j $(1 \leq j \leq n)$ 的对偶混合体积 $\widetilde{V}(L_1, \ldots, L_n)$ 定义为

$$\tilde{V}(L_1, \ldots, L_n) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} \rho_{L_1}(u) \ldots \rho_{L_n}(u) d\mathrm{Vol}_{n-1}(u). \tag{2.2}$$

当 $L \in \mathscr{L}_o^n$, 则 L 的第 i 个对偶均质积分 $\widetilde{W}_i(L)$ 可表示为

$$\widetilde{W}_i(L) = \widetilde{V}(\underbrace{L, \ldots, L}_{n-i}, \underbrace{B, \ldots, B}_{i}). \tag{2.3}$$

若 $L_i \in \mathscr{L}_o^n$ $(i=1,\dots,n)$, 则对偶混合体积的对偶 Aleksandrov–Fenchel 不等式, 有

$$\widetilde{V}(L_1,\dots,L_n)^m \le \prod_{i=1}^{m} \widetilde{V}(L_i,m;L_{m+1},\dots,L_n), \tag{2.4}$$

当且仅当 L_i $(i=1,\dots,m)$ 互为伸缩 (dilates) 时取等号.

在 (2.4) 式中令 $L_1=\cdots=L_{m-1}=K$, $L_m=L$, $L_{m+1}=\cdots=L_n=B$, 则有

如果 $K,L\in\mathscr{L}_o^n$, 且 $0\le i<n-1$, 则

$$\widetilde{V}(\underbrace{K,\dots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},L)^{n-i} \le \widetilde{W}_i(K)^{n-i-1}\widetilde{W}_i(L), \tag{2.5}$$

当且仅当 K 是 L 的伸缩时, 等号成立. 当 $i=0$ 时, (2.5) 恰好是对偶 Minkowski 不等式.

球面 Radon 变换 (见文 [14, 381 页]) 是本文证明的重要工具: 假设 f 是定义在 S^{n-1} 上的 Borel 函数, 则 f 的球面 Radon 变换 Rf 定义为

$$(Rf)(u) = \int_{S^{n-1}\cap E_u} f(v)d\mathrm{Vol}_{n-2}(v), \quad u\in S^{n-1}. \tag{2.6}$$

文中 I^n 将用于表示 $\mathscr{L}^n$ 中的相交体的集合. 一个广义相交体 $L\in\mathscr{L}^n$ 可定义为 L 满足 $\rho_L\in C(S^{n-1})$ 且 $\rho_L=R\mu$, 其中 μ 是 S^{n-1} 上的广义的有限偶的 Borel 测度. 用 I_g^n 表示广义相交体的集合, 则 I_g^n 是 $\mathscr{L}_c^n$ 的一个稠密子集 [12].

3 定理的证明

定理 1 的证明 设 $K_j\in\mathscr{L}_o^n$ $(1\le j\le n-1)$, $u\in S^{n-1}$. 根据对偶混合体积的定义 (2.2), 则 $K_j\cap E_u$ $(1\le j\le n-1)$ 的 $n-1$ 维对偶混合体积 $\widetilde{v}(K_1\cap E_u,\dots,K_{n-1}\cap E_u)$ 可表示为

$$\widetilde{v}(K_1\cap E_u,\dots,K_{n-1}\cap E_u) = \frac{1}{n-1}\int_{S^{n-1}\cap E_u} \rho_{K_1}(v)\dots\rho_{K_{n-1}}(v)d\mathrm{Vol}_{n-2}(v).$$

于是, $K_1\cap E_u$ 的第 i 个对偶均质积分可写为

$$\widetilde{w}_i(K_1\cap E_u) = \frac{1}{n-1}\int_{S^{n-1}\cap E_u} \rho_{K_1}(v)^{n-i-1}dv. \tag{3.1}$$

设 M 是原点中心对称的星体, 则 $\rho_M\in C_e(S^{n-1})$, 且 $\rho_M\ge 0$. 定义一中心对称星体 L, 使得

$$\rho_L(u) = \frac{1}{n-1}\int_{S^{n-1}\cap E_u}\rho_M(v)^{n-1}dv = \frac{1}{n-1}R(\rho_M^{n-1})(u), \tag{3.2}$$

可知 L 是 M 的相交体.

根据 (3.1) 式, Fibini 定理, (3.2) 式和对偶混合体积的定义 (2.2) 式, 我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\widetilde{w}_i(L_1\cap E_u)\rho_M(u)^{n-1}du &= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\frac{1}{n-1}\int_{S^{n-1}\cap E_u}\rho_{L_1}(v)^{n-i-1}dv\rho_M(u)^{n-1}du \\
&= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_{L_1}(u)^{n-i-1}\left(\frac{1}{n-1}R(\rho_M^{n-1})(u)\right)du \\
&= \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_{L_1}(u)^{n-i-1}\rho_L(u)du \\
&= \widetilde{V}(\underbrace{L_1,\dots,L_1}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},L).
\end{aligned}$$

同理可知

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\widetilde{w}_i(L_2\cap E_u)\rho_M(u)^{n-1}du=\widetilde{V}(\underbrace{L_2,\dots,L_2}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},L).$$

由已知条件可知

$$\widetilde{V}(\underbrace{L_1,\dots,L_1}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},L)\le\widetilde{V}(\underbrace{L_2,\dots,L_2}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},L).$$

由 M 的任意性, 可知对任意的相交体 L, 上式都成立.

在上式中取 $L=L_1$, 得到

$$\widetilde{W}_i(L_1)\le\widetilde{V}(\underbrace{L_2,\dots,L_2}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},L_1).$$

对右边运用对偶的 Aleksandrov–Fenchel 不等式 (2.4), 容易得到

$$\widetilde{W}_i(L_1)\le\widetilde{W}_i(L_2)^{\frac{n-i-1}{n-i}}\widetilde{W}_i(L_1)^{\frac{1}{n-i}},$$

整理后就得到我们所需的不等式 (1.2).

由对偶的 Aleksandrov–Fenchel 不等式的等号条件可知, 不等式 (1.2) 的等号条件是 L_1 和 L_2 互为伸缩和 $\widetilde{w}_i(L_1\cap E_u)=\widetilde{w}_i(L_2\cap E_u)$, 则推得 $L_1=L_2$. 证毕.

定理 2 的证明 设 $Q\in I_g^n$, μ 为 S^{n-1} 上生成 Q 的广义的有限偶的 Borel 测度, 即 $\rho_Q=R\mu,\mu\in C_e(S^{n-1})$. 由于任何一个属于 $C_e(S^{n-1})$ 的函数都可以表示为 $C_e^+(S^{n-1})$ 中的两个函数的差, 所以一定存在测度 $\mu_1,\mu_2\in C_e^+(S^{n-1})$, 使得 $\mu=\mu_1-\mu_2$. 设 Z_i 为由测度 μ_i 生成的相交体 $(i=1,2)$, 则有 $Z_1,Z_2\in I^n$ 和 $\rho_Q=\rho_{Z_1}-\rho_{Z_2}$. 由径向函数的性质 (2.1) 可知

$$Z_1=Q\widetilde{+}Z_2. \tag{3.3}$$

如果 $Z\in I^n$, 则一定存在 $f\in C_e^+(S^{n-1})$, 使得 $\rho_Z=R(\frac{1}{n-1}\cdot f)$, 则有

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\widetilde{w}_i(K\cap E_u)\cdot f du=\widetilde{V}(\underbrace{K,\dots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Z),$$

$$\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\widetilde{w}_i(L\cap E_u)\cdot f du=\widetilde{V}(\underbrace{L,\dots,L}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Z).$$

由已知条件得

$$\widetilde{V}(\underbrace{L,\dots,L}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Z)=\widetilde{V}(\underbrace{K,\dots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Z).$$

由函数 f 的任意性, 可知对任意 $Z\in I^n$, 上式成立.

因为 $Q\in I_g^n$, 根据 (3.3) 式, 则存在 $Z_1\in I^n$, 使得 $Q\widetilde{+}Z_1\in I^n$, 于是由

$$\widetilde{V}(\underbrace{L,\dots,L}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Q\widetilde{+}Z_1)=\widetilde{V}(\underbrace{K,\dots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Q\widetilde{+}Z_1)$$

和

$$\widetilde{V}(\underbrace{L,\dots,L}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Z_1)=\widetilde{V}(\underbrace{K,\dots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\dots,B}_{i},Z_1),$$

可得到

$$\widetilde{V}(\underbrace{L,\ldots,L}_{n-i-1},\underbrace{B,\ldots,B}_{i},Q)=\widetilde{V}(\underbrace{K,\ldots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\ldots,B}_{i},Q).$$

由于 I_g^n 是 $\mathscr{L}_c^n$ 的稠密子集, 因此对任意 $M\in\mathscr{L}_c^n$, 都有

$$\widetilde{V}(\underbrace{L,\ldots,L}_{n-i-1},\underbrace{B,\ldots,B}_{i},M)=\widetilde{V}(\underbrace{K,\ldots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\ldots,B}_{i},M).$$

取 $M=L$, 有

$$\widetilde{V}(\underbrace{K,\ldots,K}_{n-i-1},\underbrace{B,\ldots,B}_{i},L)=\widetilde{W}_i(L).$$

再运用对偶混合体积的 Aleksandrov–Fenchel 不等式 (2.4), 得到

$$\widetilde{W}_i(L)\le\widetilde{W}_i(K).$$

等号成立条件的讨论与定理 1 相同.

参 考 文 献

[1] Busemann H., Petty C. M., Problems on convex bodies, *Math. Scand.*, 1956, **4**: 88–94.
[2] Larman D. G., Rogers C. A., The existence of a centrally symmetric convex body with central sections that are unexpectedly small, *Mathematike*, 1975, **22**: 164–175.
[3] Ball K. M., Some remarks on the geometry of convex sets, in Geometric Aspects of Functional Analysis, ed. by J. Lindenstrauss and V. D. Milman, Lecture Notes in Mathematics 1317. Heidelberg: Springer, 1989, 224–231.
[4] Giannopoulos A. A., A note on a problem of H. Busemann and C. M. Petty concerning sections of symmetric convex bodies, *Mathematika*, 1990, **37**: 239–244.
[5] Bourgain J., On the Busemann–Petty problem for perturbations of the ball, *Geom. Functional Anal.*, 1991, **1**: 1–13.
[6] Papadimitrakis M., On the Busemann–Petty problem about convex, centrally symmetric bodies in R^n, *Mathematike,* 1992, **39**: 258–266.
[7] Gardner R. J., Intersection bodies and the Busemann–Petty problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1994, **342**: 435–445.
[8] Lutwak E., Intersection bodies and dual mixed volumes, *Advances in Math.*, 1988, **71**: 232–261.
[9] Gardner R. J., On the Busemann–Petty problem concerning central sections of centrally symmetric convex bodies, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1994, **30**: 222–226.
[10] Gardner R. J., A positive answer to the Busemann–Petty problem in three dimensions, *Annals of Math.*, 1994, **140**: 435–447.
[11] Zhang G., A positive solution to the Busemann–Petty problem in R^4, *Annals of Math.*, 1999, **149**: 535–543.
[12] Zhang G., Centered bodies and dual mixed volumes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1994, **345**: 777–801.
[13] Goody P. R., Lutwak E., Weil W., Functional analytic characterization of classes of convex bodies, *Math. Z.,* in Press.
[14] Gardner R. J., Geometric tomography, New York: Cambridge Univ. Press, 1995.
[15] Funk P., Über Flächen mit lauter geschlossnen geodä tischen linien, *Math. Ann.*, 1913, **74**: 278–300.
[16] Leng S., Zhang L., Extremal problem of quermassintegral of convex bodies, *Science in China, Ser. A*, 2001, **31**: 204–212 (in Chinese).
[17] Lutwak E., Dual mixed volume, *Pacific J. Math.*, 1975, **58**: 531–538.
[18] Lutwak E., Centroid bodies and dual mixed volumes, *Proc. London Math. Soc.*, 1990, **60**: 365–391.