第49卷第5期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.49, No.5
2006年9月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series　　Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-1113-08　　**文献标识码: A**

C^n 中具有逐块光滑边界的有界域上带权因子积分表示的拓广式

陈吕萍

厦门大学数学科学学院数学与应用数学系 厦门 361005
E-mail: linhui@xmu.edu.cn

摘　要　本文讨论了C^n空间中具有逐块光滑边界的有界域上和强拟凸域上具有拓广的 B-M 核的 $(0,q)$ 形式的带权因子的积分表示式, 得到了带权因子拓广的 Koppelman–Leray–Norguet 公式. 由此得到了有界域上 $\bar{\partial}$- 方程带权因子的连续解, 由于权因子的引入, 使得积分公式在应用上 (如在函数插值问题的应用) 具有更大的灵活性.

关键词　积分表示; 权因子; 有界域; 拓广式
MR(2000) 主题分类　32A25, 32C10, 32F20
中图分类　O174.56

The Extensional Formula of Weighted Integral Representation on a Bounded Domain with Piecewise Smooth Boundary in C^n

Lü Ping CHEN

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005*, P. R. China*
E-mail: linhui@xmu.edu.cn

Abstract　In this paper, we obtain an integral representation of extensional Bochner–Martinelli kernel with weight factors of $(0,q)$ differential form on bounded domains and strongly pseudoconvex domain with piecewise smooth boundary in C^n, that is, we obtain an extensional Koppelman–Leray–Norguet formula with weight factors. Then we obtain the weighted continuous solution of $\bar{\partial}$-equation on bounded domains. Because of the introduction of weight factors, the applications of integral formula (such as the application of interpolation problem) are much more flexible.

Keywords　integral representation; weight factor; bounded domain; extensional formula
MR(2000) Subject Classification　32A25, 32C10, 32F20
Chinese Library Classification　O174.56

1　有关逐块 $C^{(1)}$ 光滑的概念与引理

先介绍逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的概念:

定义 1[1,2]　设 $D \in C^n$ 是一开集, D 的边界 ∂D 称为逐块 $C^{(1)}$ 光滑的, 是指如果存在 ∂D 的一个邻域 U 的一个有限开覆盖 $\{V_j\}_{j=1}^{N}$ 和 $C^{(1)}$ 函数 ρ_k: $V_k \to R$, $k=1,2,\dots,N$, 使得满足

收稿日期: 2004-07-02; 修改日期: 2004-10-22; 接受日期: 2005-03-20
基金项目: 国家自然科学基金 (10271097); 天元基金 (10526033); 福建省自然科学基金 (Z0511002) 资助项目

下列条件:

(1) $\partial D \subseteq V_1 \cup \cdots \cup V_N$;

(2) 点 $z \in V_1 \cup \cdots \cup V_N$ 属于 D 当且仅当存在 $k: 1 \le k \le \cdots \le N$, 使 $z \in V_k,\ \rho_k(z) < 0$;

(3) 对每一指标集 $1 \le k_1 < \cdots < k_l \le N$ 和对每一点 $z \in V_{k_1} \cap \cdots \cap V_{k_l}$,

$$d\rho_{k_1}(z) \wedge \cdots \wedge d\rho_{k_l}(z) \neq 0.$$

命 $S_k = \{z \in \partial D \cap V_k : \rho_k = 0\}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, 又对整数 $1 \le k_1 \le \cdots \le k_l \le N$ 的每一有序集 $K = (k_1, \ldots, k_l)$, 定义

(i) 如果整数 $k_1, \ldots, k_l$ 是不同的配对, $S_K = S_{k_1} \cap \cdots \cap S_{k_l}$;

(ii) 否则, $S_K = \emptyset$.

选择 S_K 的定向, 使得

$$\partial D = \sum_{k=1}^{N} S_k, \tag{1}$$

$$\partial S_K = \sum_{j=1}^{N} S_{Kj}, \tag{2}$$

其中 $Kj = (k_1, \ldots, k_l, j)$.

以 $\triangle$ 表示 R^{N+1} 中所有满足 $\lambda_j \ge 0$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$ 且$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j = 1$的点 $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in R^{N+1}$ 的集合, 以形式 $d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 \wedge \cdots \wedge d\lambda_N$ 定义 $\triangle$ 的定向, 又对整数 $1 \le k_1 < \cdots < k_l \le N$ 的每一个严格增加的指标集 $K = (k_1, \ldots, k_l)$, 记 $|K| = l$ 对所有 $K \in P(N)$, 定义

$$\Gamma_K = \{\zeta \in U_{\bar{D}}^K : \rho_j(\zeta) \le \rho_K(\zeta) \le 0,\ j = 1, \ldots, N\},$$

则有 $\bar{D} = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_N$, 且 $\partial \Gamma_K = S_K \cup \Gamma_{K1} \cup \cdots \cup \Gamma_{KN}, K \in P(N)$. 命

$$\triangle_K = \left\{\lambda \in \triangle : \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_{k_\alpha} = 1\right\},\quad \triangle_{0K} = \left\{\lambda \in \triangle : \lambda_0 + \sum_{\alpha=1}^{l} \lambda_{k_\alpha} = 1\right\}, \tag{3}$$

其中 $0K = (0, k_1, \ldots, k_l)$. 显然由以上定义知, $\triangle_{0K}$ 具有由形式 $d_{\lambda_{k_1}} \wedge \cdots \wedge d_{\lambda_{k_l}}$ 定义的定向, 而对 $k = 0, 1, \ldots, N$, 单点集 $\triangle_k$ 的定向是 $+1$.

命题 1[2] 设 $\partial D, S_K, \triangle_{0K}, \triangle_K, \triangle_0, \Gamma_K$ 为以上所定义, 那么有

$$\partial\left[\sum_{|K| \le n} (-1)^{|K|} S_K \times \triangle_{0K}\right] = \sum_{|K| \le n} S_K \times \triangle_K - \partial D \times \Delta_0, \tag{4}$$

其中求和是对整数 $1 \le k_1 < \cdots \le k_l \le N$ 的所有严格增加的指标集 $K = (k_1, \ldots, k_l)$ 进行.

命题 2[3] 设 D 是C^n中的有界域, 具有逐块光滑边界 ∂D, 那么对所有函数 $f(z) \in C^{(\infty)}(\bar{D})$, 有下面拓广的 Bochner–Martinelli 公式

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega^{(m)}(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}) - \int_D \bar{\partial} f(\zeta) \wedge \omega^{(m)}(\zeta - z, \bar{\zeta} - \bar{z}),\ \ z \in D, \tag{5}$$

其中

$$\omega^{(m)}(\zeta - z,\, \bar{\zeta} - \bar{z}) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left(\frac{m}{2}\right)^{n-1} \frac{\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^{m-2} \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{\alpha-1}(\bar{\zeta}_\alpha - \bar{z}_\alpha) d\bar{\zeta}_{[\alpha]} \wedge d\zeta}{\left[\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j - z_j|^m\right]^n}. \tag{6}$$

称为拓广的 B-M 核, 这里 $m=2,3,\dots,P(P<+\infty)$, 当 $m=2$ 时, 即为通常的 B-M 核

$$\omega(\zeta-z,\bar{\zeta}-\bar{z})=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}(\bar{\zeta}_\alpha-\bar{z}_\alpha)d\bar{\zeta}_{[\alpha]}\wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n}}. \tag{7}$$

公式 (5) 即变为著名的 Bochner–Martinelli 积分公式.

2 带权因子的积分表示的一个抽象公式

熟知, 在多复变数中, 具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的有界域上有很多积分表示, 从本质上看, 实际上都是由于它们所具有的单位分解形形色色, 互不相同而引起, 现从单位分解的角度考虑, 我们在具有这种边界的有界域上建立一种很一般的带权因子的积分表示式. 首先在这种有界域上引进一种抽象的普遍适用的单位分解, 具体如下:

设 D 是 C^n 中的有界域, 具有定义 1 意义下的逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界 ∂D, $u_\alpha^{(k)}(\zeta,z)$ $(\alpha=1,2,\dots,n)$ 为一可微函数, 满足

$$\langle u^{(k)}(\zeta,z),\zeta-z\rangle=1, \tag{8}$$

其中 $u^{(k)}(\zeta,z)=(u_1^{(k)}(\zeta,z),\dots,u_n^{(k)}(\zeta,z))$, $\zeta\in S_K$, $z\in D$, $k\in K$, $K=(k_1,\dots,k_l)$ 是严格增加的整数 $1\le k_1\le\cdots\le k_l\le N$ 的指标集, 现定义

$$\begin{aligned}&L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u)=\lambda_0\frac{(\bar{\zeta}_\alpha-\bar{z_\alpha})|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j-z_j|^m}+\sum_{k\in K}\lambda_k u_\alpha^{(k)}(\zeta,z),\\&\alpha=1,2,\dots,\ n,m=2,3,\dots,P(P<+\infty).\end{aligned} \tag{9}$$

式中 $\lambda_0,\lambda_k\ge 0$ 且 $\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1$, 易知 $L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u)$, $\alpha=1,2,\dots,n$ 为 D 上的一个抽象的单位分解. 事实上, 由 (8) 式, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u)\\&\quad=\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_0(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{(\bar{\zeta}_\alpha-\bar{z_\alpha})|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j-z_j|^m}+\sum_{k\in K}\lambda_k\sum_{\alpha=1}^{n}(\zeta_\alpha-z_\alpha)u_\alpha^{(k)}(\zeta,z)\\&\quad=\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1.\end{aligned}$$

显然, 由 (9) 式所定义的单位分解是一种相当抽象的单位分解, 其中 $u_\alpha^{(k)}(\zeta,z)$ 没有一定的形式, 只要满足 $\langle u^{(k)}(\zeta,z),\zeta-z\rangle=1$, $\zeta\in S_K$, $z\in D$. 此外, 类似文 [1] 中的证明易知, 当 $f(z)\in C^{(\infty)}(\bar{D})$ 时, 则对任一固定的 $z\in D$ 和整数 $1\le k_1<\cdots<k_l\le N$ 的每一严格增加的指标集 $K=(k_1,\dots,k_l)$, 在广义函数的意义下, 有

$$d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\omega_{\zeta,\lambda}{}'(L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u))\wedge d\zeta]=\bar{\partial}f(\zeta)\wedge\omega_{\zeta,\lambda}{}'(L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u))\wedge d\zeta, \tag{10}$$

其中

$$\omega'(\eta)=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha-1}\eta_\alpha d\eta_1\wedge\cdots\wedge[\alpha]\wedge\cdots\wedge d\eta_n.$$

(10) 式对所有 $\lambda\in\triangle_{0K}$ 和在 S_K 的某一邻域上的 ζ 都成立.

引进 C^∞ 映射 $\theta(\zeta,z)=(\theta_1(\zeta,z),\dots,\theta_n(\zeta,z)):\bar{D}\times\bar{D}\to C^n$. 对每一固定的 ζ, $\theta(\zeta,z)$ 关于 z 全纯, 其定义域包含映射 $C^n\times C^n\to C^1$, $(\zeta,z)\to\langle\theta(\zeta,z),\zeta-z\rangle$ 的像集, 且 $G(0)=1$, 仍用 θ 记作 $\langle\theta,d(\zeta,z)\rangle$, 这并不会引起混淆.

定义拓广的 Bochner–Martinelli 核的带权因子的微分形式为

$$\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,\zeta-z\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge\langle L_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle \wedge\langle\bar{\partial}L_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle^{n-k-1}. \tag{11}$$

记 $d\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)=(\bar{\partial}_{\zeta,z}+d_\lambda)\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z):=\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)$.

引理 1 设 f 是 D 上一连续有界的 $(0,q)$ 形式, 则

$$d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]=\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)+(-1)^q f(\zeta)\wedge\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) -\bar{\partial}_z[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]. \tag{12}$$

证明

$$\begin{aligned}
&d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]\\
&\quad=(\bar{\partial}_{\zeta,z}+d_\lambda)[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]-\bar{\partial}_z[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]\\
&\quad=\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)+(-1)^q f(\zeta)\wedge\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)-\bar{\partial}_z[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)].
\end{aligned}$$

由此, 则可得到下面 $(0,q)$ 形式的带权因子的积分表示的一种抽象公式:

定理 1 设 D 是 C^n 中的有界域, 具有定义 1 意义下的逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界 ∂D, $u_\alpha^{(k)}(\zeta,z)$ $(\alpha=1,2,\dots,n)$ 为一可微函数, $\zeta\in S_K$, $z\in D$, $k\in K$, $K=(k_1,k_2,\dots,k_l)$ 是严格增加的整数 $1\le k_1<\cdots<k_l\le N$ 的指标集. 而 λ_0, $\lambda_k\ge 0$, 且 $\lambda_0+\sum_{k\in K}\lambda_k=1$. 又 $u^{(k)}(\zeta,z)=(u_1^{(k)}(\zeta,z),\dots,u_n^{(k)}(\zeta,z))$ 满足

$$\langle u^{(k)}(\zeta,z),\zeta-z\rangle=1,\quad \zeta\in S_K,\quad z\in D,\quad k\in K. \tag{13}$$

那么, 对所有 $\bar{D}$ 上连续有界的 $(0,q)$ 形式 f, 并且 $\bar{\partial}f$ 在 $\bar{D}$ 上也连续有界, 有如下带权因子的积分表示拓广式

$$\begin{aligned}
(-1)^q f(z)=&\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_K}f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\
&-\Bigg[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)+\int_{D\times\Delta_0}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\Bigg]\\
&+(-1)^{q+1}\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}f(\zeta)\wedge\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\
&+\bar{\partial}_z\Bigg[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)+\int_{D\times\Delta_0}f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\Bigg],
\end{aligned}\tag{14}$$

其中求和分别是对 $|K|\le n-q$ 和 $|K|\le n-q-1$ 的整数 $1\le k_1<\cdots<k_1\le N$ 的所有严格增加的指标集 $K=(k_1,\dots,k_l)$ 进行的, 并分别有 $l\le n$ 和 $l\le n-1$. 而 S_K, $\triangle_{0K}$, $\triangle_K$, $\triangle_0$ 及 $|K|$ 为上节所定义, $L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u)$ 为 (9) 式所示.

证明 由于 D 是 C^n 中的有界域, 并且具有逐块光滑边界, $L_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z,u)$ 是拓广的 B-M 核, 对于 $\bar{D}$ 上的每一个连续有界的 $(0,q)$ 形式 f 并且 $\bar{\partial}f$ 在 $\bar{D}$ 上也连续有界, $\bar{T}_{0,q}$ 表示 $\bar{T}$ 的关于 z 是 $(0,q)$ 型的分量, 因而类似于命题 2 的证明, 有拓广的 Koppelman 公式

$$\begin{aligned}(-1)^q f(z) = &\int_{\partial D\times\triangle_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) - \int_{D\times\triangle_0}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\ &+\bar{\partial}_z\int_{D\times\triangle_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{m},\zeta,z).\end{aligned}\tag{15}$$

在子流形 $\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}S_K\times\Delta_{0K}$ 上 (S_K,Δ_{0K} 由定义 1 给出), 对 $d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]$ 应用 Stokes 公式, 有

$$\begin{aligned}&\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]\\ &\quad=\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{\partial(S_K\times\Delta_{0K})} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z),\end{aligned}\tag{16}$$

由引理 1 的结论可得

$$\begin{aligned}&\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} d_{\zeta,\lambda}[f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)]\\ &\quad=\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\bigg[\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)+(-1)^q\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\ &\qquad-\bar{\partial}_z\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\bigg],\end{aligned}\tag{17}$$

由命题 1 可知 $\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\partial(S_K\times\triangle_{0K})=\sum_{|K|\le n}S_K\times\triangle_K-\partial D\times\Delta_0$, 所以有

$$\begin{aligned}&\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{\partial(S_K\times\Delta_{0K})} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\ &\quad=\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)-\int_{\partial D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z).\end{aligned}\tag{18}$$

因此由 (16)–(18) 式, 可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) = &\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\ &-\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\ &-(-1)^q\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\\ &+\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\bar{\partial}_z\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z),\end{aligned}\tag{19}$$

由 (15) 式, 我们有

$$
\begin{aligned}
(-1)^q f(z) = & \int_{\partial D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) - \int_{D\times\Delta_0}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& + \bar{\partial}_z\int_{D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
= & \sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) - \sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& - (-1)^q\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& + \sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\bar{\partial}_z\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) - \int_{D\times\Delta_0}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& + \bar{\partial}_z\int_{D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
= & \sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& - \left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) + \int_{D\times\Delta_0}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right] \\
& + (-1)^{q+1}\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& + \bar{\partial}_z\left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) + \int_{D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right], \qquad (20)
\end{aligned}
$$

所以定理 1 成立.

推论 1 在定理 1 的假设下, 如果截面对 $z\in D$ 是全纯的, 那么对每一 $\bar{D}$ 上的连续 $(0,q)$ 形式 f, 使得在 D 上 $\bar{\partial}f=0, 1\le q\le n$, 有

$$
g(z) = (-1)^q\left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z) + \int_{D\times\Delta_0} f\wedge\bar{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right]
$$

是 $\bar{\partial}g=f$ 在 D 中的带权因子连续解.

证明 如果截面关于 $z\in D$ 是全纯的, 那么对 $\{1,\dots,N\}$ 的每一严格增加的有序子集 $K=(k_1,k_2,\dots,k_l)$, 形式 $\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)$ 关于 $\bar{z}$ 的次数为零, 所以 $\hat{T}(L_\alpha^{(m)},\zeta,z)=0$. 如果 $q>0$, 由定理 1 立得推论 1.

3 有界域上带权因子的 Cauchy–Leray 公式的拓广式与强拟凸域上带权因子的 Leray–Norguet 公式的拓广式

由 (14) 式, 可以推出具有这种逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的许多区域上种种已有的带权因子的积分公式 (包括抽象的及具体的) 和它们的拓广式. 特别, 可得到有界域上带权因子的 $(0,q)$ 形式的 Cauchy–Leray 公式的拓广式, 和强拟凸域上带权因子的 $(0,q)$ 形式的 Leray–Norguet 公式的拓广式, 即有

定理 2 设 D 是 C^n 中有界域, 具有定义 1 意义下的逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界 ∂D 及 $S_K, \Gamma_K, \Delta_{0K}$, 如果 S_K 上的向量函数 $W^{(k)}(\zeta,z) \in C^{(1)}$ 且 $\langle W^{(k)}(\zeta,z), \zeta-z\rangle \neq 0$, 其中 $\zeta \in S_K$, $z \in D$, $\quad k \in K$, $k=(k_1,\dots,k_l)$ 是严格增加的整数 $1 \le k_1 < \cdots < k_l \le N$ 的指标集, G, Q 同引理 1, 那么对于所有 $\bar{D}$ 上的 $(0,q)$ 形式 f 都有下面带权因子的积分表示

$$
\begin{aligned}
(-1)^q f(z) = {} & \sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_K} f(\zeta)\wedge \bar{T}(H_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& - \left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge \bar{T}(H_\alpha^{(m)},\zeta,z) + \int_{D\times\triangle_0}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge \bar{T}(H_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right] \\
& + (-1)^{q+1}\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge \hat{T}(H_\alpha^{(m)},\zeta,z) \\
& + \bar{\partial}_z\left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge \bar{T}(H_\alpha^{(m)},\zeta,z) + \int_{D\times\triangle_0} f(\zeta)\wedge \bar{T}(H_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right], \quad (21)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& H_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z) = \lambda_0\frac{(\bar{\zeta}_\alpha-\bar{z}_\alpha)|\zeta_\alpha-z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^n|\zeta_j-z_j|^m} + \sum_{k\in K}\lambda_k\frac{W_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle}, \\
& \alpha=1,2,\dots,n, \quad m=2,3,\dots,P(P<+\infty), \qquad (22) \\
& \bar{T}(H_\alpha^{(m)},\zeta,z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}G^{(k)}(\langle Q,\zeta-z\rangle)(\bar{\partial}Q)^k\wedge\langle H_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle \\
& \qquad \wedge\langle\bar{\partial}H_\alpha^{(m)},d(\zeta-z)\rangle^{n-k-1}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

式中求和是展布在整数 $1\le k_1<\cdots<k_l\le N$ 的所有严格增加的指标集 $K=(k_1,\dots,k_l)$ 上, 并分别有 $l\le n$ 和 $l\le n-1$.

证明 只要在 (13) 式中, 令

$$
u_\alpha^{(k)}(\zeta,z) = \frac{W_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle}, \alpha=1,2,\dots,n, \qquad (24)
$$

由于

$$
\langle u^{(k)}(\zeta,z),\zeta-z\rangle = \sum_{\alpha=1}^n(\zeta_\alpha-z_\alpha)\frac{W_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\langle\zeta-z,W^{(k)}\rangle} = 1,
$$

则由 (14) 式即可立得 (21) 式成立. 证毕.

定理 3 设 f 为一具有逐块 $C^{(1)}$ 光滑边界的强拟凸域 $\bar{D}$ 上连续的 $(0,q)$ 形式, 使得形式 $\bar{\partial}f$ 在 $\bar{D}$ 上还是连续的, $1\le q\le n$, 其中 G,Q 同引理 1, 那么有

$$
\begin{aligned}
(-1)^q f(z) = {} & -\left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z) + \int_{D\times\triangle_0}\bar{\partial}_\zeta f(\zeta)\wedge\bar{T}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right] \\
& + \bar{\partial}_z\left[\sum_{|K|\le n}(-1)^{|K|}\int_{S_K\times\Delta_{0K}} f(\zeta)\wedge\bar{T}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right. \\
& \qquad \left. + \int_{D\times\Delta_0} f(\zeta)\wedge\bar{T}(E_\alpha^{(m)},\zeta,z)\right], \qquad (25)
\end{aligned}
$$

其中

$$E_\alpha^{(m)}(\lambda,\zeta,z) = \lambda_0 \frac{(\bar\zeta_\alpha - \bar z_\alpha)|\zeta_\alpha - z_\alpha|^{m-2}}{\sum_{j=1}^n |\zeta_j - z_j|^m} + \sum_{k\in K} \lambda_k \frac{P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}, \tag{26}$$

$$\bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} G^{(k)}(\langle Q,\zeta-z\rangle)(\bar\partial Q)^k \wedge \langle E_\alpha^{(m)}, d(\zeta-z)\rangle$$
$$\wedge \langle \bar\partial E_\alpha^{(m)}, d(\zeta-z)\rangle^{n-k-1},$$

$$\alpha = 1,2,\dots,n,\quad m = 2,3,\dots,P\quad (p<+\infty).$$

式中 $P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)$ 是 Henkin 和 Leiterer 在强拟凸域上所引进的支撑函数 [1, 10], 满足

$$\Phi^{(k)}(\zeta,z) = \sum_{\alpha=1}^n (\zeta_\alpha - z_\alpha) P_\alpha^{(k)}(\zeta,z).$$

特别地, 若 $\bar\partial f = 0$ 在 D 上, 则

$$g(z) = (-1)^q \left[\sum_{|K|\le n} (-1)^{|K|} \int_{S_K\times\Delta_{0K}} f\wedge \bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z) + \int_{D\times\Delta_0} f\wedge \bar T(E_\alpha^{(m)},\zeta,z) \right]$$

是 $\bar\partial g = f$ 在 D 中的带权因子连续解.

证明 只要在 (13) 式中, 令

$$u_\alpha^{(k)}(\zeta,z) = \frac{P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi^{(k)}(\zeta,z)},\quad \alpha = 1,2,\dots,n, \tag{27}$$

由于

$$\langle u^{(k)}(\zeta,z), \zeta-z\rangle = \sum_{\alpha=1}^n (\zeta_\alpha - z_\alpha) \frac{P_\alpha^{(k)}(\zeta,z)}{\Phi^{(k)}(\zeta,z)} = 1,$$

则由 (14) 式, 即可立得 (25) 式成立. 证毕.

参 考 文 献

[1] Zhong T. D., Huang S., Complex analysis in several variables, Shijiazhuang: Hebei Educational Press, 1990 (in Chinese).

[2] Range R. M. and Siu Y. T., Uniform estimates for the $\bar\partial$-equation on domains with piecewise smooth strictly pseudoconvex boundaries, *Math. Ann.*, 1973, **206**: 325–354.

[3] Yao Z. Y., Integral representation of bounded domain in C^n, *J. of Xiamen Univ., Natural Science*, 1986, **3**: 260–269 (in Chinese).

[4] Bochner S., Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, *Ann. of Math.*, 1943, **44**: 652–673.

[5] Yao Z. Y., An integral formula on bounded domain in C^n, *Sci. in China*, 1992, (1): 1–10 (in Chinese).

[6] Leray J., Le Calcul differential at integral suraue variate analytigue complex (Problem of cauchy), *Bull. Soc, Math. France*, 1959, **87**: 81–180 (Chen Z. H., Chinese Translation in Math. Translation Corpus, 1965, **5**: 40–87).

[7] Qiu C. H., Koppelman–Leray–Norguet formula with weight factors on complex manifold and its applications, *J. of Xiamen Univ.* (*Natural Science*), 1998, **37**(6): 807–813 (in Chinese).

[8] Wang Z. Q., Integral representation of (p,q) differential forms with weight factors on Stein manifolds, *J. of Xiamen Univ.* (*Natural Science*), 1994, **33**(2): 151–154 (in Chinese).

[9] Qiu C. H., Formula with weight factors for a strictly pseudoconvex polyhedron with non-smooth boundaries, *J. of Xiamen Univ.* (*Natural Science*), 1999, **38**(6): 797–803 (in Chinese).

[10] Laurent-Thiebaut C., Leiterer J., Uniform estimats for the Cauchy–Riemann equation on q-convex wedges. *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), 1993, **43**(2): 383–436.

[11] Henkin G. M. and Leiterer J., Theory of functions on complex manifolds, Berlin: Akademie Verlag, 1984.