第49卷第5期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.49, No.5
2006年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Sept., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)05-1075-10 **文献标识码: A**

离散空间 $\ell^2(Z)$ 中正交小波系的完备性

蒋英春 刘有明

北京工业大学应用数学系 北京 100022
E-mail: jiang2004@emails.bjut.edu.cn; liuym@bjut.edu.cn

摘 要 本文研究 $\ell^2(Z)$ 中正交小波系的完备性, 其主要目的是寻找一些容易验证的充分条件. 为此, 我们首先改进了 Frazier 的定理, 给出小波系完备的一个刻画, 然后在此基础上得到三个容易验证的充分条件.

关键词 小波系; 完备性; 离散傅立叶变换
MR(2000) 主题分类 42C15, 94A11
中图分类 O174.2

The Completeness of Orthogonal Wavelet Systems in $\ell^2(Z)$

Ying Chun JIANG You Ming LIU

Department of Applied Mathematics, Beijing University of Technology, Beijing 100022, P. R. China
E-mail: jiang2004@emails.bjut.edu.cn; liuym@bjut.edu.cn

Abstract This paper studies the completeness of orthogonal wavelet systems in $\ell^2(Z)$, the main purpose is to find some easily checked sufficient conditions. To do that, the construction for p stage wavelet bases is firstly revisited; then a characterization for a wavelet system to be complete is shown, which improves Frazier's theorem, three sufficient conditions are finally received from that characterization.

Keywords wavelet systems; completeness; discrete Fourier transform
MR(2000) Subject Classification 42C15, 94A11
Chinese Library Classification O174.2

1 引言及预备知识

小波分析在过去二十年取得了巨大的成就, 但大部分工作集中在函数空间, 尤其是 Hilbert 空间 $L^2(R^d)$. 然而, 从应用的角度来看, 研究离散空间中的小波更自然, 也更重要. 在这一领域有两类小波：周期小波和非周期小波, 我们对后者更感兴趣. 尽管可以在更大的空间中构造非周期小波 (如幂次增长序列空间, 见文 [1]), 本文只考虑 $\ell^2(Z)$ 中的小波. 这方面的许多工作可以参见文 [2–4] 等.

首先介绍一些符号, 我们尽量与文 [4] 保持一致：用 Z 表示整数集

$$\ell^2(Z)=\left\{z=(z(n)),\sum_{n\in Z}|z(n)|^2<\infty\right\}.$$

收稿日期: 2005-01-26; 修改日期: 2005-07-30
基金项目: 北京市教委基金资助项目 (KM200410005013)

它在通常的加法和数乘运算下构成复数域上的内积空间, 其复内积定义为

$$\langle z, \omega\rangle = \sum_{n\in Z} z(n)\overline{\omega(n)},$$

相应的范数是 $\|z\| = \sqrt{\sum_{n\in Z}|z(n)|^2}$. 为介绍 $\ell^2(Z)$ 上的傅立叶变换, 我们需要 Hilbert 空间 $L^2[a,b]$, 其内积为

$$\langle f, g\rangle =: \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

通常取 $a=0$, $b=2\pi$. 因为 $\{\mathrm{e}^{in\theta}, n\in Z\}$ 是 $L^2[0,2\pi]$ 的标准正交基, 所以对每一个 $z\in\ell^2(Z)$, $\sum_{n\in Z} z(n)\mathrm{e}^{in\theta}\in L^2[0,2\pi]$. 众所周知, $\ell^2(Z)$ 上的傅立叶变换是从 $\ell^2(Z)$ 到 $L^2[0,2\pi]$ 的一个可逆映射, 定义为

$$\widehat{z}(\theta) =: \sum_{n\in Z} z(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}.$$

给定 $k\in Z$, 定义平移算子 $R_k: \ell^2(Z)\longrightarrow\ell^2(Z)$ 为

$$(R_k z)(\cdot) =: z(\cdot - k).$$

容易验证 $(R_k z)\hat{}(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\hat{z}(\theta)$.

定义 1.1 设 $\{f_1, f_2, \dots, f_p, g_p\}\subseteq\ell^2(Z)$. 若 $\mathcal{B}(f_1, f_2, \dots, f_p, g_p) =: \{R_{2k}f_1, R_{2^2k}f_2, \dots, R_{2^pk}f_p, R_{2^pk}g_p\}_{k\in Z}$ 构成 $\ell^2(Z)$ 的标准正交基, 则称 $\mathcal{B}(f_1, f_2, \dots, f_p, g_p)$ 为 p 阶小波基. 当 p 无限增加时, 称 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N}) =: \{R_{2^\ell k}f_\ell,\ \ell\in N,\ k\in Z\}$ 为标准正交小波系, 其中 N 表示正整数集.

许多文献中讨论这种类型的小波基. 结果表明：一旦构造出一阶小波基 $\mathcal{B}(f_1, g_1)$, 在假设 $f_1, g_1\in\ell^1(Z)$ 下, p 阶小波基 $\mathcal{B}(f_1, f_2, \dots, f_p, g_p)$ 可自动生成 [4]. 我们将在假设 $f_1, g_1\in\ell^2(Z)$ 下证明相同的结论, 因为它是 $\ell^2(Z)$ 中小波分析的一个自然出发点. 现在引入下面的定义.

定义 1.2 设 $u, v\in\ell^2(Z)$. 若 $\mathcal{B}(u,v) =: \{R_{2k}u, R_{2k}v\}_{k\in Z}$ 构成 $\ell^2(Z)$ 的一阶小波基, 则称 (u,v) 为小波生成元.

定义

$$\delta_n(m) =: \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

和 $\delta =: \delta_0$, 则对 $z\in\ell^2(Z)$, 我们有 $z = \sum_{n\in Z} z(n)\delta_n$.

例 1.1 设 $u = a\delta + b\delta_N$, $v = c\delta + d\delta_N$, 其中 $|a|^2+|b|^2 = |c|^2+|d|^2 = 1$, $a\bar{c}+b\bar{d} = 0$, N 是奇数. 容易验证 (u,v) 是小波生成元, 称为 Haar 类小波生成元. 当 $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $d=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $N=1$ 时, 对应的 (u,v) 称为 Haar 小波生成元.

例 1.2 设

$$\hat{u}(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]+2\pi Z, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \hat{v}(\theta) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \theta\in\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]+2\pi Z, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

利用定理 2.1 可以验证 (u,v) 是小波生成元, 称为 Shannon 小波生成元. 注意到 $\hat{u}(\theta)$ 和 $\hat{v}(\theta)$ 不连续, 所以对应的 $u, v\notin\ell^1(Z)$.

一般地, 设 (u,v) 是小波生成元. 定义 $g_1 = u$, $f_1 = v$, 当 $\ell\geq 2$ 时, g_ℓ 和 f_ℓ 由

$$\hat{g}_\ell(\theta) =: \hat{g}_{\ell-1}(\theta)\hat{u}(2^{\ell-1}\theta), \quad \hat{f}_\ell(\theta) =: \hat{g}_{\ell-1}(\theta)\hat{v}(2^{\ell-1}\theta) \tag{1.1}$$

定义. 从第二部分可知 g_ℓ 和 f_ℓ 的定义是合理的. 进一步, $\{f_1, f_2, \dots, f_p, g_p\}$ 是 p 阶小波基 (推论 2.3). 基于此, 我们将证明第二部分的主要结果 (定理 2.4):

设 (u, v) 是小波生成元, 则由 (1.1) 定义的小波系 $\mathcal{B}(\{f_n\}_{n\in N})$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备当且仅当 $\bigcap_{\ell\in N} V_{-\ell} = \{0\}$, 其中 $V_{-\ell} = \{\sum_{k\in Z} z(k) R_{2^\ell k} g_\ell,\ z \in \ell^2(Z)\}$.

当 $u, v \in \ell^1(Z)$ 时, 上面的结果就是 Frazier 的定理. 为了说明这一点, 我们引入两个简单的算子：设 $z, \omega \in \ell^2(Z)$, z 和 ω 的卷积定义为

$$(z * \omega)(m) =: \sum_{n\in Z} z(m-n)\omega(n).$$

通过例子可以说明 $z * \omega$ 未必属于 $\ell^2(Z)$. 但是, 当 z 和 ω 属于 $\ell^1(Z)$ 时, $z * \omega$ 属于 $\ell^1(Z)$ 而且 $(z*\omega)\hat{}(\theta) = \hat{z}(\theta)\hat{\omega}(\theta)$. 这就是在 $\ell^2(Z)$ 中构造小波时总是假定 $u, v \in \ell^1(Z)$ 的原因 [2, 4]. 上采样算子 $U : \ell^2(Z) \longrightarrow \ell^2(Z)$ 定义为

$$U(z)(n) = \begin{cases} z\left(\dfrac{n}{2}\right), & n \text{ 是偶数}, \\ 0, & n \text{ 是奇数}. \end{cases}$$

容易验证 $[U(z)]\hat{}(\theta) = \hat{z}(2\theta)$. 假设 $u, v \in \ell^1(Z)$, 在 (1.1) 的两端同时取逆傅立叶变换得到

$$g_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(u), \quad f_\ell = g_{\ell-1} * U^{\ell-1}(v).$$

这正是 Frazier 定理中 f_ℓ 和 g_ℓ 的定义.

尽管我们的定理给出了小波系完备的充分必要条件, 然而 $\bigcap_{\ell\in N} V_{-\ell} = \{0\}$ 一般很难验证. Frazier 利用下列事实证明了 Haar 小波系的完备性：$z \in V_{-\ell}$ 当且仅当对 $k \in Z$, z 在 $k2^\ell, k2^\ell + 1, \dots, k2^\ell + 2^\ell - 1$ 上是常数. 不幸的是, 任何其它小波系都没有这样简单的结构, 所以我们不知道如何验证 $\ell^2(Z)$ 中其它小波系的完备性. $L^2(R^d)$ 中小波系的完备性已有很好的刻画 [5−8]. 关于 $L^2(R^d)$ 中 Gabor 系完备性的讨论可参见文 [9, 10] 等.

本文的主要目的是寻找容易验证的充分条件. 在第三部分将给出三个充分条件：第一个是频域上的；第二个是时域上的；最后一个是与 $L^2(R)$ 中的 MRA 有关的. 离散空间 $\ell^2(Z)$ 中许多小波系的完备性可用这些条件加以证明.

2 完备性的刻画

本节给出一个关于完备性的充分必要条件 (定理 2.4). 为此, 首先改进 $\ell^2(Z)$ 中 p 阶小波基的构造. 主要结果都可在文 [4] 中找到, 唯一的差别是：我们只假定 $u, v \in \ell^2(Z)$, 而不是 $u, v \in \ell^1(Z)$. 之所以这样做, 是因为一些重要的例子 (如 Shannon 小波生成元) 包含在我们的框架内. 更重要的是, 后面的讨论需要这些改进的结果. 首先引入下面的引理：

引理 2.1 设 $\omega, u \in \ell^2(Z)$, 则

(1) $\{R_{\ell k}\omega\}_{k\in Z}$ 标准正交当且仅当 $\sum_{k=0}^{\ell-1} |\hat{\omega}(\theta + \frac{2\pi k}{\ell})|^2 = \ell$, a.e.

(2) 对任意的 $k \in Z$, $\langle \omega, R_{\ell k} u\rangle = 0$ 当且仅当 $\sum_{k=0}^{\ell-1} \hat{\omega}(\theta + \frac{2\pi k}{\ell})\overline{\hat{u}(\theta + \frac{2\pi k}{\ell})} = 0$, a.e.

证明 因为 $\langle R_{\ell k_1}\omega, R_{\ell k_2}\omega\rangle = \langle \omega, R_{\ell(k_2-k_1)}\omega\rangle$, 所以 $\{R_{\ell k}\omega\}_{k\in Z}$ 标准正交当且仅当 $\langle \omega, R_{\ell k}\omega\rangle = \delta(k)$. 注意到

$$\langle \omega, R_{\ell k}\omega\rangle = \langle \hat{\omega}(\cdot), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell k\cdot}\hat{\omega}(\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\hat{\omega}(\theta)|^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell k\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\ell}} \sum_{k=0}^{\ell-1} \left|\hat{\omega}\left(\theta + \frac{2\pi k}{\ell}\right)\right|^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell k\theta} d\theta$$

以及 $\{e^{i\ell k\theta}, k \in Z\}$ 是 $L^2[0, \frac{2\pi}{\ell}]$ 的标准正交基, 所以 (1) 成立. 类似地

$$\langle \omega, R_{\ell k} u \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\ell}} \sum_{k=0}^{\ell-1} \hat{\omega}\Big(\theta + \frac{2\pi k}{\ell}\Big) \overline{\hat{u}\Big(\theta + \frac{2\pi k}{\ell}\Big)} e^{-i\ell k\theta} d\theta.$$

利用 Hölder 不等式可以验证

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} \hat{\omega}\Big(\theta + \frac{2\pi k}{\ell}\Big) \overline{\hat{u}\Big(\theta + \frac{2\pi k}{\ell}\Big)} \in L^1\Big[0, \frac{2\pi}{\ell}\Big].$$

因为 $\{e^{i\ell k\theta}, k \in Z\}$ 在 $L^1[0, \frac{2\pi}{\ell}]$ 中完备, 所以 (2) 成立.

利用引理 2.1, 我们可以证明下面的定理. 由于 Frazier 的方法不再适合于 $u, v \in \ell^2(Z)\backslash\ell^1(Z)$, 因此我们的证明是完全不同的.

定理 2.1 设 $u, v \in \ell^2(Z)$, 则 (u, v) 是小波生成元当且仅当

$$A(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{u}(\theta) & \hat{v}(\theta) \\ \hat{u}(\theta+\pi) & \hat{v}(\theta+\pi) \end{pmatrix}$$

几乎处处是酉矩阵.

证明 在引理 2.1 中取 $\ell = 2$ 可得:$\mathcal{B}(u, v) =: \{R_{2k}u, R_{2k}v\}_{k\in Z}$ 标准正交当且仅当 $A(\theta)$ 几乎处处是酉矩阵. 因此只需证明: 当 $A(\theta)$ 几乎处处是酉矩阵时, $\mathcal{B}(u, v)$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备即可. 注意到 $A(\theta)$ 的酉性等价于下列三个条件:

$$\overline{\hat{u}(\theta)}\hat{v}(\theta) + \overline{\hat{u}(\theta+\pi)}\hat{v}(\theta+\pi) = 0 \quad \text{a.e.} \tag{2.1}$$

$$|\hat{u}(\theta)|^2 + |\hat{u}(\theta+\pi)|^2 = 2 \quad \text{a.e.} \tag{2.2}$$

$$|\hat{v}(\theta)|^2 + |\hat{v}(\theta+\pi)|^2 = 2 \quad \text{a.e.} \tag{2.3}$$

为了简单, 我们省略 “a.e.”, 容易验证 2π 周期函数

$$m(\theta) =: \begin{cases} -\dfrac{\hat{v}(\theta+\pi)}{\overline{\hat{u}(\theta)}}, & \hat{u}(\theta) \neq 0; \\ \dfrac{\hat{v}(\theta)}{\overline{\hat{u}(\theta+\pi)}}, & \hat{u}(\theta) = 0 \end{cases}$$

满足

$$m(\theta) + m(\theta+\pi) = 0; \tag{2.4}$$

$$\hat{v}(\theta) = m(\theta)\overline{\hat{u}(\theta+\pi)}; \tag{2.5}$$

$$|m(\theta)| = 1. \tag{2.6}$$

事实上, (2.4) 和 (2.5) 式由 $m(\theta)$ 的定义直接得到. 把 (2.5) 式代入 (2.3) 式, 得 $|m(\theta)|^2|\hat{u}(\theta+\pi)|^2 + |m(\theta+\pi)|^2|\hat{u}(\theta)|^2 = 2$. 最后, (2.6) 式可由 (2.2) 和 (2.4) 式直接得到.

令 $m(\theta) =: \sum_k c_k e^{ik\theta}$, 则 (2.4) 和 (2.6) 意味着

$$m(\theta) = e^{i\theta}\rho(2\theta), \text{ 其中 } \rho(\theta) = 1. \tag{2.7}$$

为了证明 $\mathcal{B}(u, v) =: \{R_{2k}u, R_{2k}v\}_{k\in Z}$ 的完备性, 只需证明

$$\mathcal{B}^\wedge(u, v) =: \{(R_{2k}u)^\wedge, (R_{2k}v)^\wedge\}_{k\in Z} = \{e^{i2k\theta}\hat{u}(\theta), e^{i2k\theta}\hat{v}(\theta)\}_{k\in Z}$$

在 $L^2[0,2\pi]$ 中完备：设 $f\in L^2[0,2\pi]$ 且 $\langle f(\theta),\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\theta}\hat{u}(\theta)\rangle=\langle f(\theta),\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\theta}\hat{v}(\theta)\rangle=0$, 则

$$\begin{aligned}0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\overline{\hat{u}(\theta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}f(\theta)\overline{\hat{u}(\theta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k\theta}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}f(\theta)\overline{\hat{u}(\theta)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k\theta}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}[f(\theta)\overline{\hat{u}(\theta)}+f(\theta+\pi)\overline{\hat{u}(\theta+\pi)}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k\theta}d\theta.\end{aligned}$$

因为 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\theta}\}_{k\in Z}$ 是 $L^2[0,\pi]$ 的标准正交基, 所以

$$f(\theta)\overline{\hat{u}(\theta)}+f(\theta+\pi)\overline{\hat{u}(\theta+\pi)}=0. \tag{2.8}$$

同理可证

$$f(\theta)\overline{\hat{v}(\theta)}+f(\theta+\pi)\overline{\hat{v}(\theta+\pi)}=0. \tag{2.9}$$

结合 (2.5) 和 (2.7) 式可得 $\hat{v}(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\rho(2\theta)\overline{\hat{u}(\theta+\pi)}$, 其中 $\rho(\theta)$ 是 2π 周期的且 $|\rho(\theta)|=1$. 代入 (2.9) 式, 便有

$$f(\theta)\hat{u}(\theta+\pi)-f(\theta+\pi)\hat{u}(\theta)=0. \tag{2.10}$$

易见 (2.8) 及 (2.10) 式蕴涵 $f(\theta)(|\hat{u}(\theta)|^2+|\hat{u}(\theta+\pi)|^2)=0$, 从而 $f=0$, 即 $\mathcal{B}^\wedge(u,v)$ 完备. 进而 $\mathcal{B}(u,v)$ 完备. 定理得证.

定理 2.2 设 (u,v) 是小波生成元, 定义 $g_1=:u$, $f_1=:v$, 对 $\ell\geq 2$

$$\hat{g}_\ell(\theta)=:\hat{g}_{\ell-1}(\theta)\hat{u}(2^{\ell-1}\theta),\quad \hat{f}_\ell(\theta)=:\hat{g}_{\ell-1}(\theta)\hat{v}(2^{\ell-1}\theta);$$

定义 $V_0=:\ell^2(Z)$, 对 $\ell\geq 1$,

$$V_{-\ell}=:\left\{\sum_{k\in Z}z(k)R_{2^\ell k}g_\ell, z\in\ell^2(Z)\right\},\quad W_{-\ell}=:\left\{\sum_{k\in Z}z(k)R_{2^\ell k}f_\ell, z\in\ell^2(Z)\right\},$$

那么, 对 $\ell\geq 1$, (1) $\{R_{2^\ell k}f_\ell, R_{2^\ell k}g_\ell\}_{k\in Z}$ 标准正交; (2) $V_{-\ell}\oplus W_{-\ell}=V_{-\ell+1}$.

证明 因为 (u,v) 是小波生成元, 由定理 2.1 可知 $|\hat{u}(\theta)|\leq 2$, $|\hat{v}(\theta)|\leq 2$. 进一步, $\hat{f}_\ell,\hat{g}_\ell\in L^2[0,2\pi]$, 所以 $f_\ell,g_\ell\in\ell^2(Z)$.

下面利用数学归纳法证明 (1): 因为 (u,v) 是小波生成元, 所以 $\ell=1$ 时, (1) 成立. 假设对 $\ell-1$, (1) 成立, 则由引理 2.1 得

$$\sum_{k=0}^{2^{\ell-1}-1}\left|\hat{g}_{\ell-1}\left(\theta+\frac{2\pi k}{2^{\ell-1}}\right)\right|^2=2^{\ell-1}. \tag{2.11}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2^\ell-1}\hat{f}_\ell\left(\theta+\frac{2\pi k}{2^\ell}\right)\overline{\hat{g}_\ell\left(\theta+\frac{2\pi k}{2^\ell}\right)}&=\sum_{k=0}^{2^\ell-1}\left|\hat{g}_{\ell-1}\left(\theta+\frac{2\pi k}{2^\ell}\right)\right|^2\hat{v}(2^{\ell-1}\theta+\pi k)\overline{\hat{u}(2^{\ell-1}\theta+\pi k)}\\&=2^{\ell-1}[\hat{v}(2^{\ell-1}\theta)\overline{\hat{u}(2^{\ell-1}\theta)}+\hat{v}(2^{\ell-1}\theta+\pi)\overline{\hat{u}(2^{\ell-1}\theta+\pi)}]=0.\end{aligned}$$

同理可得

$$\sum_{k=0}^{2^\ell-1}\left|\hat{f}_\ell\left(\theta+\frac{2\pi k}{2^\ell}\right)\right|^2=\sum_{k=0}^{2^\ell-1}\left|\hat{g}_\ell\left(\theta+\frac{2\pi k}{2^\ell}\right)\right|^2=2^\ell.$$

由引理 2.1 知 (1) 成立.

下面证明 (2): 注意到 $(R_k h)^\wedge(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\hat{h}(\theta)$ 以及 $\hat{f}_\ell(\theta)=\hat{g}_{\ell-1}(\theta)\hat{v}(2^{\ell-1}\theta)$, 则

$$\sum_{m\in Z} v(m-2k)(R_{2^{\ell-1}m}g_{\ell-1})^\wedge(\theta)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^\ell k\theta}\hat{v}(2^{\ell-1}\theta)\hat{g}_{\ell-1}(\theta)=(R_{2^\ell k}f_\ell)^\wedge(\theta).$$

上式等价于 $R_{2^\ell k}f_\ell=\sum_{m\in Z}v(m-2k)R_{2^{\ell-1}m}g_{\ell-1}$. 因此 $W_{-\ell}\subseteq V_{-\ell+1}$. 同理

$$R_{2^\ell k}g_\ell=\sum_{m\in Z}u(m-2k)R_{2^{\ell-1}m}g_{\ell-1} \ \text{ 且 } \ V_{-\ell}\subseteq V_{-\ell+1}.$$

下面只需证明 $W_{-\ell}\oplus V_{-\ell}\subseteq V_{-\ell+1}$: 因为 (u,v) 是小波生成元, 所以对每个 $j\in Z$,

$$\delta_j=\sum_{k\in Z}a_{k,j}R_{2k}u+\sum_{k\in Z}b_{k,j}R_{2k}v,$$

其中 $a_{k,j},b_{k,j}\in\ell^2(Z)$. 两边取傅立叶变换, 我们有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}j\theta}=\sum_{k\in Z}a_{k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\theta}\hat{u}(\theta)+\sum_{k\in Z}b_{k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\theta}\hat{v}(\theta).$$

进一步, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\ell-1}j\theta}=\sum_{k\in Z}a_{k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^\ell k\theta}\hat{u}(\theta)+\sum_{k\in Z}b_{k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^\ell k\theta}\hat{v}(\theta)$. 两边同乘以 $\hat{g}_{\ell-1}(\theta)$, 上式转化为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^{\ell-1}j\theta}\hat{g}_{\ell-1}(\theta)=\sum_{k\in Z}a_{k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^\ell k\theta}\hat{g}_\ell(\theta)+\sum_{k\in Z}b_{k,j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^\ell k\theta}\hat{f}_\ell(\theta).$$

因此, $R_{2^{\ell-1}j}g_{\ell-1}=\sum_{k\in Z}a_{k,j}R_{2^\ell k}g_\ell+\sum_{k\in Z}b_{k,j}R_{2^\ell k}f_\ell$, 从而 $V_{-\ell+1}\subseteq V_{-\ell}\oplus W_{-\ell}$. (2) 得证.

推论 2.3 设 (u,v) 是小波生成元. 定义 f_ℓ, g_ℓ 同定理 2.2, 则 $\mathcal{B}(f_1,f_2,\dots,f_p,g_p)=:\{R_{2k}f_1,R_{2^2k}f_2,\dots R_{2^pk}f_p,R_{2^pk}g_p\}_{k\in Z}$ 是 p 阶小波基.

下面我们给出这部分的主要定理:

定理 2.4 设 (u,v) 是小波生成元. 定义 f_ℓ, g_ℓ 和 $V_{-\ell}$ 同定理 2.2, 则小波系 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备当且仅当 $\bigcap_{\ell\in N}V_{-\ell}=0$.

证明 任取 $f\in\bigcap_{\ell\in N}V_{-\ell}$, 因为 $\ell\geq 1$ 时, $V_{-\ell}\oplus W_{-\ell}=V_{-\ell+1}$, 所以 $f\perp W_{-\ell}$. 进一步, $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})$ 的完备性说明 $f=0$. 必要性得证. 反过来, 假设 $z\in\ell^2(Z)$ 且 $\langle z,R_{2^\ell k}f_\ell\rangle=0$, 即 $z\perp W_{-\ell}$. 由定理 2.2, $z\in\bigcap_{\ell\in N}V_{-\ell}=\{0\}$. 充分性得证.

注记 2.1 当 $u,v\in\ell^1(Z)$ 时, 定理 2.4 就是 Frazier 的定理 (见文 [4, 定理 4.55]).

3 完备性的充分条件

虽然定理 2.4 给出了小波系完备的充分必要条件, 但由于 $V_{-\ell}$ 的结构通常很复杂, 所以即使对简单的小波生成元, 条件 $\bigcap_{\ell\in N}V_{-\ell}=\{0\}$ 也难于验证. 下面给出几个容易验证的充分条件.

3.1 频域上的充分条件

注意到 $\hat{g}_\ell(\theta)=:\hat{g}_{\ell-1}(\theta)\hat{u}(2^{\ell-1}\theta)$ 以及 $g_1=u$, 那么, $\hat{g}_\ell(\theta)=\prod_{j=0}^{\ell-1}\hat{u}(2^j\theta)$. 下面的定理给出了判别小波系完备的充分条件:

定理 3.1 设 (u,v) 是小波生成元, 若 $\lim_{\ell\longrightarrow\infty}\hat{g}_\ell(\theta)=h(\theta)$ a.e. 且 $|h(\theta)|\leq c<1$, 则 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})=:\{R_{2^\ell k}f_\ell,\,k\in Z,\,\ell\in N\}$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备.

证明 用 $\hat{V}_{-\ell}$ 表示 $V_{-\ell}=:\{\sum_k z(k)R_{2^\ell k}g_\ell,\,z\in\ell^2(Z)\}$ 中所有元素的傅立叶变换. 由定理 2.4, 只需证明 $\bigcap_{\ell\in N}\hat{V}_{-\ell}=\{0\}$. 任取 $f\in\bigcap_{\ell\in N}\hat{V}_{-\ell}$, 则存在一列 $z_\ell\in\ell^2(Z)$, 使得

$$f(\theta)=\sum_{k\in Z}z_\ell(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2^\ell k\theta}\hat{g}_\ell(\theta)=\hat{g}_\ell(\theta)\hat{z}_\ell(2^\ell\theta). \tag{3.1}$$

因为 $\{R_{2^\ell k}g_\ell,\ k\in Z\}$ 是 $V_{-\ell}$ 的标准正交基, 所以 $||z_\ell||=||f||$. 进一步, $||\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)||=||U^\ell(z_\ell)||=||z_\ell||=||f||$. 由 Fatou 引理知

$$\int_0^{2\pi}\liminf_{\ell\longrightarrow\infty}|\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)|^2d\theta\le\liminf_{\ell\longrightarrow\infty}\int_0^{2\pi}|\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)|^2d\theta=||f||^2,$$

所以, $\liminf_{\ell\longrightarrow\infty}|\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)|<\infty$ 几乎处处成立. 由给定的条件 $\lim_{\ell\longrightarrow\infty}\hat{g}_\ell(\theta)=h(\theta)$ a.e. 和 (3.1) 式, 得

$$|f(\theta)|^2=\liminf_{\ell\longrightarrow\infty}[|\hat{g}_\ell(\theta)|^2|\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)|^2]=|h(\theta)|^2\liminf_{\ell\longrightarrow\infty}|\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)|^2\quad\text{a.e.}$$

因此

$$||f||^2=\int_0^{2\pi}|h(\theta)|^2\liminf_{\ell\longrightarrow\infty}|\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)|^2d\theta\le c^2\liminf_{\ell\longrightarrow\infty}\int_0^{2\pi}|\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)|^2d\theta=c^2||f||^2.$$

因为 $0<c<1$, 所以 $f=0$. 定理得证.

推论 3.2 设 (u,v) 是小波生成元, 若 $\hat{u}(\theta)=(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta})^m p(\theta)$, 其中 $m>0$, $n\neq 0$ 是整数, $|p(\theta)|=:|\sum_k c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}|\le\alpha<1$, 则 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})=:\{R_{2^\ell k}f_\ell,\ k\in Z,\ \ell\in N\}$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备.

证明 容易计算 $|\hat{u}(\theta)|=(2|\cos\frac{n\theta}{2}|)^m|p(\theta)|$. 进一步

$$|\hat{g}_\ell(\theta)|=\prod_{j=0}^{\ell-1}|\hat{u}(2^j\theta)|=\bigg(\prod_{j=0}^{\ell-1}2\bigg|\cos\frac{2^jn\theta}{2}\bigg|\bigg)^m\prod_{j=0}^{\ell-1}|p(2^j\theta)|\le\alpha^\ell\bigg(\prod_{j=0}^{\ell-1}2\bigg|\cos\frac{2^jn\theta}{2}\bigg|\bigg)^m.$$

因为 $0<\alpha<1$, 且 $\prod_{j=0}^{\ell-1}2|\cos\frac{2^jn\theta}{2}|=|\frac{\sin 2^\ell n\theta}{\sin\frac{n\theta}{2}}|\le|\frac{1}{\sin\frac{n\theta}{2}}|$, 所以 $\lim_{\ell\longrightarrow\infty}|\hat{g}_\ell(\theta)|=0$ a.e. 由定理 3.1, 推论得证.

例 3.1 设 (u,v) 是例 1.1 中的 Haar 小波生成元, 即 $u=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_1$, 那么 $\hat{u}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. Haar 小波系的完备性可由推论 3.1 得到.

推论 3.3 设 (u,v) 是小波生成元. 若 $\operatorname{supp}\hat{u}\cap[-\pi,\pi]\subseteq[a,b]$, 其中 $b\le\min\{2\pi+2a,\ \frac{1}{2}a+\pi\}$, 则 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})=:\{R_{2^\ell k}f_\ell,\ k\in Z,\ \ell\in N\}$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备.

证明 因为 $\hat{g}_\ell(\theta)$ 是 2π 周期的, 所以由定理 3.1 知：只需证明

$$\operatorname{supp}\hat{g}_\ell\cap\ [-\pi,\pi]\subseteq\Big[\frac{a}{2^{\ell-1}},\ \frac{b}{2^{\ell-1}}\Big].$$

注意到 $\hat{g}_\ell(\theta)=\prod_{j=0}^{\ell-1}\hat{u}(2^j\theta)$, 则 $\operatorname{supp}\ \hat{g}_\ell\subseteq\operatorname{supp}\ \hat{u}$. 由题设条件知: $\operatorname{supp}\ \hat{g}_\ell\ \cap[-\pi,\pi]\subseteq[a,b]$. 进一步, $\operatorname{supp}\ \hat{g}_\ell\ \cap[-\pi,\pi]\subseteq\operatorname{supp}\hat{g}_\ell\ \cap[a,b]$, 所以只需证明

$$\operatorname{supp}\hat{g}_\ell\cap[a,b]\subseteq\Big[\frac{a}{2^{\ell-1}},\frac{b}{2^{\ell-1}}\Big].\tag{3.2}$$

当 $\ell=1$ 时, (3.2) 式显然成立. 假设 (3.2) 式成立, 下面证明 $\operatorname{supp}\hat{g}_{\ell+1}\cap[a,b]\subseteq[\frac{a}{2^\ell},\frac{b}{2^\ell}]$. 任取 $\eta\in\operatorname{supp}\hat{g}_{\ell+1}\cap\ [a,b]\subseteq\operatorname{supp}\hat{g}_\ell\cap[a,b]\subseteq[\frac{a}{2^{\ell-1}},\frac{b}{2^{\ell-1}}]$, 则 $2a\le 2^\ell\eta\le 2b$. 因为 $b\le\min\{2\pi+2a,\frac{1}{2}a+\pi\}$, 所以 $b-2\pi\le 2a\le 2^\ell\eta\le 2b\le a+2\pi$. 进一步注意到 $\eta\in\operatorname{supp}\hat{g}_{\ell+1}\subseteq\operatorname{supp}\hat{u}(2^\ell\cdot)$, 从而 $a\le 2^\ell\eta\le b$, $\eta\in[\frac{a}{2^\ell},\frac{b}{2^\ell}]$. 结论得证.

例 3.2 设 (u,v) 是例 1.2 中的 Shannon 小波生成元, 则

$$\hat{u}(\theta)=\begin{cases}\sqrt{2}, & \theta\in\Big[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big]+2\pi Z,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

显然 supp $\hat{u}\cap[-\pi,\pi]=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 满足推论 3.3 的条件, 从而 Shannon 小波系是完备的. 因为 $u,v\notin\ell^1(Z)$, 所以 Shannon 小波系的完备性不能根据 Frazier 的定理得到.

3.2 时域上的充分条件

若小波生成元 (u,v) 中的 u 具有有限支撑, 则相应小波系的完备性可由下述定理判别：

定理 3.4 设 (u,v) 是小波生成元且 $u=\sum_{k=n}^{n+N}a_k\delta_k$, $a_n,a_{n+N}\neq 0$. 若

$$\lim_{\ell\longrightarrow\infty}\max_{k\in Z}|g_\ell(k)|=0,$$

则 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})=:\{R_{2^\ell k}f_\ell,\,k\in Z,\,\ell\in N\}$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备.

证明 因为 $\hat{g}_\ell(\theta)=\hat{g}_{\ell-1}(\theta)\hat{u}(2^{\ell-1}\theta)$ 且 $u\in\ell^1(Z)$, 所以 $g_\ell=g_{\ell-1}*U^{\ell-1}(u)$. 证明分两步：首先讨论 $n=0$ 的情形；其次推广到一般情形.

第一步 设 $u=\sum_{k=0}^{N}a_k\delta_k$, 其中 $a_0\neq 0$, $a_N\neq 0$. 可以证明：

$$\operatorname{supp}g_\ell\subseteq\{0,1,\dots,N(2^\ell-1)\}.\tag{3.3}$$

事实上, supp $g_1=\operatorname{supp}u\subseteq\{0,1,\dots,N\}$. 假设 $\operatorname{supp}g_{\ell-1}\subseteq\{0,1,\dots,N(2^{\ell-1}-1)\}$, 则容易验证 $g_\ell=U^{\ell-1}(u)*g_{\ell-1}=\sum_{k=0}^{N}a_k\delta_{2^{\ell-1}k}*g_{\ell-1}$ 满足 (3.3) 式.

对任意固定的 $m\in Z$, 至多存在 N 个整数 $k\in Z$, 使得 $m-2^\ell k\in\operatorname{supp}g_\ell$. 事实上, $0\le m-2^\ell k\le N(2^\ell-1)$ 等价于

$$\frac{m-N(2^\ell-1)}{2^\ell}\le k\le\frac{m}{2^\ell}.$$

而 $0\le\frac{m}{2^\ell}-\frac{m-N(2^\ell-1)}{2^\ell}<N$, 所以满足条件的 $k\in Z$ 至多有 N 个.

下面证明 $\bigcap_{\ell\in N}V_{-\ell}=\{0\}$. 任取 $\omega\in\bigcap_{\ell\in N}V_{-\ell}$, 则存在一列 $z_\ell\in\ell^2(Z)$, 使得 $\omega=\sum_k z_\ell(k)R_{2^\ell k}g_\ell$, 所以对任意的 $m\in Z$,

$$|\omega(m)|=\left|\sum_{k\in Z}z_\ell(k)g_\ell(m-2^\ell k)\right|\le N\max_{k\in Z}|z_\ell(k)|\max_{k\in Z}|g_\ell(k)|\le N||\omega||_2\cdot\max_{k\in Z}|g_\ell(k)|.$$

因为 $\lim_{\ell\longrightarrow\infty}\max_{k\in Z}|g_\ell(k)|=0$, 所以 $\omega=0$.

第二步 设 (u,v) 是小波生成元, 其中 $u=\sum_{k=n}^{n+N}a_k\delta_k$. 容易验证 $(u',v')=(R_{-n}u,R_{-n}v)$ 仍是小波生成元, 而且 $u'=\sum_{k=0}^{N}a_{n+k}\delta_k$. 因为 $\hat{u}'(\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\hat{u}(\theta)$, 所以

$$\hat{g}'_\ell(\theta)=\prod_{k=0}^{\ell-1}\hat{u}'(2^k\theta)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(2^\ell-1)\theta}\hat{g}_\ell(\theta).$$

进一步, $g'_\ell=R_{-(2^\ell-1)n}g_\ell$, 从而 $\lim_{\ell\longrightarrow\infty}\max_{k\in Z}|g'_\ell(k)|=\lim_{\ell\longrightarrow\infty}\max_{k\in Z}|g_\ell(k)|=0$. 定义

$$V_{-\ell}=:\left\{\sum_{k\in Z}z(k)R_{2^\ell k}g_\ell,z\in\ell^2(Z)\right\}\ \text{ 和 }\ V'_{-\ell}=:\left\{\sum_{k\in Z}z(k)R_{2^\ell k}g'_\ell,z\in\ell^2(Z)\right\}.$$

由第一步知 $\bigcap_{\ell\in N}V'_{-\ell}=\{0\}$. 为证 $\bigcap_{\ell\in N}V_{-\ell}=\{0\}$, 只需证明 $\hat{V}_{-\ell}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\hat{V}'_{-\ell}$. 事实上

$$\begin{aligned}\hat{V}_{-\ell}&=\{\hat{z}(2^\ell\theta)\hat{g}_\ell(\theta),\,z\in\ell^2(Z)\}=\{\hat{z}(2^\ell\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(2^l-1)\theta}\hat{g}'_\ell(\theta),\ z\in\ell^2(Z)\}\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\{(R_nz)^\wedge(2^\ell\theta)\hat{g}'_\ell(\theta),\,z\in\ell^2(Z)\}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\hat{V}'_{-\ell}.\end{aligned}$$

最后一个等式用到了 $z\in\ell^2(Z)$ 当且仅当 $R_nz\in\ell^2(Z)$.

例 3.3 设 (u,v) 是例 1.1 中的 Haar 类小波生成元, 即 $u=a\delta_0+b\delta_N$, 其中 $a,b\neq 0$, $|a|^2+|b|^2=1$, 则对应的小波系是完备的. 事实上, 令 $c=\max\{|a|,|b|\}$, 则 $0<c<1$. 由定理 3.4, 我们只需证明

$$|g_\ell(n)|\leq c^\ell. \tag{3.4}$$

因为 $g_1=u$, 所以 (3.4) 对 $\ell=1$ 成立. 假设 $|g_{\ell-1}(n)|\leq c^{\ell-1}$, 则

$$g_\ell(n)=g_{\ell-1}*U^{\ell-1}(u)(n)=\sum_{m\in Z}U^{\ell-1}(u)(n-m)g_{\ell-1}(m)=ag_{\ell-1}(n)+bg_{\ell-1}(n-2^{\ell-1}N).$$

因为 $\operatorname{supp} g_\ell \subseteq\{0,1,2,\ldots N(2^\ell-1)\}$, 所以当 $n<0$ 或 $n>N(2^\ell-1)$ 时, $g_\ell(n)=0$, 从而 (3.4) 式成立; 当 $0\leq n\leq N(2^{\ell-1}-1)$ 时, $n-2^{\ell-1}N<0$, 故 $g_{\ell-1}(n-2^{\ell-1}N)=0$, 从而 $g_\ell(n)=ag_{\ell-1}(n)$. 再利用归纳假设即得 (3.4) 式. 当 $N(2^{\ell-1}-1)<n\leq N(2^\ell-1)$ 时, $g_{\ell-1}(n)=0$, 从而 $g_\ell(n)=bg_{\ell-1}(n-2^{\ell-1}N)$, 因而 (3.4) 式成立.

3.3 与 MRA 有关的充分条件

在本文的最后, 我们将证明: 多尺度分析 (MRA) 决定的小波系是完备的 (推论 3.6). 首先, $f\in L^2(R)$ 的傅立叶变换由范数意义下的极限定义

$$\hat{f}(\theta)=\lim_{N\longrightarrow\infty}\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}dx.$$

下面的引理取自文献 [11].

引理 3.1 设 $\phi\in L^2(R)$ 满足 $0<\alpha\leq\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\theta+2k\pi)|^2\leq\beta<\infty$ a.e. 定义 $\phi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-k)$ 和 $V_j'=\{\sum_{k\in Z}z(k)\phi_{j,k}:z\in\ell^2(Z)\}$, 则 $\bigcap_{j\in Z}V_j'=\{0\}$.

定理 3.5 设 (u,v) 是小波生成元, 并且满足 $\phi(x)=\sum_{k\in Z}u(k)\phi_{1,k}(x)$, 其中 $\phi\in L^2(R)$. 若 $0<\alpha\leq\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\theta+2k\pi)|^2\leq\beta<\infty$ a.e., 则 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})=:\{R_{2^\ell k}f_\ell,\,k\in Z,\,\ell\in N\}$ 在 $\ell^2(Z)$ 中完备.

证明 对任意的 $j\in Z$, 定义 $\phi_{j,k}(x)=2^{\frac{j}{2}}\phi(2^jx-k)$ 以及

$$V_j'=:\left\{\sum_{k\in Z}z(k)\phi_{j,k}:z=(z(k))_{k\in Z}\in\ell^2(Z)\right\},\quad \hat{V}_j'=:\{\hat{f},f\in V_j'\}.$$

引理 3.1 蕴涵着 $\bigcap_{j\in Z}V_j'=\{0\}$. 由条件 $\phi(x)=\sum_{k\in Z}u(k)\phi_{1,k}(x)$ 和 $\phi_{j,k}$ 的定义知 $V_j'\subseteq V_{j+1}'$, 从而 $\bigcap_{j\in N}V_{-j}'=\{0\}$. 进一步可得

$$\bigcap_{\ell\in N}\hat{V}_{-\ell}'=\{0\}. \tag{3.5}$$

可以证明

$$\hat{V}'_{-\ell}=\{\hat{z}(-2^\ell\theta)\hat{g}_\ell(-\theta)\hat{\phi}(\theta),z\in\ell^2(Z)\}. \tag{3.6}$$

事实上, 因为 $\hat{\phi}_{j,k}(\theta)=2^{-\frac{j}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}k\theta}{2^j}}\hat{\phi}(\frac{\theta}{2^j})$, 所以

$$\hat{V}'_{-\ell}=\left\{\sum_k z(k)2^{\frac{\ell}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k2^\ell\theta}\hat{\phi}(2^\ell\theta),\,z\in\ell^2(Z)\right\}=\{2^{\frac{\ell}{2}}\hat{z}(-2^\ell\theta)\hat{\phi}(2^\ell\theta),\,z\in\ell^2(Z)\}.$$

由 $\phi(x)=\sum_{k\in Z}u(k)\phi_{1,k}(x)$ 可得 $\hat{\phi}(\theta)=2^{-\frac{1}{2}}\hat{\phi}(\frac{\theta}{2})\hat{u}(-\frac{\theta}{2})$. 进一步

$$\hat{\phi}(2^\ell\theta)=2^{-\frac{1}{2}}\hat{\phi}(2^{\ell-1}\theta)\hat{u}(-2^{\ell-1}\theta)=\cdots=2^{-\frac{\ell}{2}}\hat{\phi}(\theta)\hat{g}_\ell(-\theta).$$

因此, (3.6) 式得证.

下面推出 $\mathcal{B}(\{f_\ell\}_{\ell\in N})$ 的完备性：由定理 2.4, 只需证明 $\bigcap_{\ell\in N} V_{-\ell}=\{0\}$, 其中 $V_{-\ell}=\{\sum z(k)R_{2^\ell k}g_\ell, z\in\ell^2(Z)\}$, 或等价地

$$\bigcap_{\ell\in N}\hat{V}_{-\ell}=\{0\}, \tag{3.7}$$

其中 $\hat{V}_{-\ell}=\{\hat{z}(2^\ell\theta)\hat{g}_\ell(\theta), z\in\ell^2(Z)\}$. 任取 $h\in\bigcap_{\ell\in N}\hat{V}_{-\ell}$, 存在一列 $z_\ell\in\ell^2(Z)$, 使得 $h(\theta)=\hat{z}_\ell(2^\ell\theta)\hat{g}_\ell(\theta)$. 由 (3.6) 式知, $h(-\theta)\hat{\phi}(\theta)\in\bigcap_{\ell\in N}\hat{V}'_{-\ell}=\{0\}$, 故 $h(-\theta)\hat{\phi}(\theta)=0$. 因为 $h(\theta)$ 是 2π 周期的, 所以 $|h(-\theta)|^2\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\theta+2k\pi)|^2=0$. 最后利用 $0<\alpha\le\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\theta+2k\pi)|^2\le\beta<\infty$ a.e. 可得 $h(\theta)=0$ a.e., 从而 (3.7) 式得证.

$L^2(R)$ 中的多尺度分析 (MRA) 是一列子空间 $\{V_j\}_{j\in Z}\subseteq L^2(R)$ 且满足

(1) $V_j\subseteq V_{j+1}$, $j\in Z$;

(2) $f(\cdot)\in V_j$ 当且仅当 $f(2\cdot)\in V_{j+1}$;

(3) $\bigcap_{j\in Z}V_j=\{0\}$ 和 $\overline{\bigcup_{j\in Z}V_j}=L^2(R)$;

(4) 存在 $\phi\in V_0$, 使得 $\{\phi(x-n)\}$ 构成 V_0 的标准正交基.

由条件 (1), (2) 和 (4) 可知：存在 $u\in\ell^2(Z)$, 使得 $\phi(x)=\sum_{k\in Z}u(k)\phi_{1,k}(x)$ 且 $\{R_{2k}u,\ k\in Z\}$ 在 $\ell^2(Z)$ 中标准正交. 称 $u\in\ell^2(Z)$ 为多尺度分析的尺度序列. 若 (u,v) 是小波生成元, 其中 $u\in\ell^2(Z)$ 为多尺度分析的尺度序列, 则称 (u,v) 是由多尺度分析决定的小波生成元, 对应的小波系是由多尺度分析决定的小波系. 由于 $\{\phi(x-n)\}_{n\in Z}$ 标准正交当且仅当 $\sum_{k\in Z}|\hat{\phi}(\theta+2\pi k)|^2=1$ a.e., 所以由定理 3.5 可推出下面的结论：

推论 3.6 多尺度分析决定的小波系是完备的.

注记 3.1 推论 3.6 告诉我们, 多尺度分析决定的小波系都是完备的, 下面的例子表明其逆不成立. 设 $u=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_3$, $v=\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_3$, 则 (u,v) 是小波生成元. 例 3.3 说明其对应的小波系是完备的. 另一方面, 设

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & 0\le x<3,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x\ge 3,\end{cases}$$

则 $\phi(x)=\phi(2x)+\phi(2x-3)$. 但是容易验证 $\{\phi(x-k),\ k\in Z\}$ 不是正交的.

参 考 文 献

[1] Pevnyi A. and Zheludev V., Construction of wavelet analysis in the space of discrete splines using Zak transform, *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2002, **8**(1): 55–77.

[2] Aldroubi A. and Unser M., Oblique projections in discrete signal subspaces of ℓ^2 and the wavelet transform, Proc. SPIE, 2303, Wavelet Appl. in Signal and Image Processing II, 1994, 36–45.

[3] Averbuch A., Pevnyi A. and Zheludev V., Biorthogonal Butterworth wavelet transforms derived from discrete interpolatory splines, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, **49**(11): 2682–2692.

[4] Frazier M., An Introduction to wavelets through linear algebra, New York: Springer, 1999.

[5] Laugesen R., Completeness of orthonormal wavelet systems for arbitrary real dilations, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2001, **11**: 455–473.

[6] Mallat S., Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases in $L^2(R)$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, **315**: 69–87.

[7] Rzeszotnik Z., Calderon's condition and wavelets, *Collect. Math.*, 2001, **52**(2): 181–191.

[8] Zhang Z., Characterization of compact support of Fourier transform for orthonormal wavelets of $L^2(R^d)$, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 2005, **21**(4): 855–864.

[9] Liu Y., Stability and Completeness of Gabor systems, *Chin. Ann. of Math.*, 2003, **24A**(2): 225–230.

[10] Wang Y., Sparse complete Gabor systems on a lattice, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 2004, **16**(1): 60–87.

[11] Daubechies I., Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadephia, 1992.