文章编号: 0583-1431(2006)03-0481-10 **文献标识码: A**

Marcinkiewicz 积分交换子的有界性

陆善镇 默会霞

北京师范大学数学科学学院 北京 100875
E-mail: lusz@bun.edu.cn; huixmo@163.com

摘 要 本文考虑了 Marcinkiewicz 积分交换子 μ_Ω^b 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 Hardy 空间的有界性, 其中 $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零次齐次函数且满足一类 L^q-Dini 条件, 因此改进了以往的结果.

关键词 Marcinkiewicz 积分; Triebel–Lizorkin 空间; Hardy 空间
MR(2000) 主题分类 42B25
中图分类 O174.2

The Boundedness of Commutators for the Marcinkiewicz Integrals

Shan Zhen LU Hui Xia MO

School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, *P. R. China*
E-mail: lusz@bun.edu.cn; huixmo@163.com

Abstract In this paper, the authors consider the boundedness of commutators for the Marcinkiewicz integral μ_Ω^b on $L^p(\mathbb{R}^n)$ and Hardy spaces, here Ω being a homogeneous function of degree zero on $\mathbb{R}^n$ and satisfying a class of L^q-Dini condition. The results in this paper are substantial improvements over some known results.

Keywords Marcinkiewicz integral; Triebel–Lizorkin space; Hardy space
MR(2000) Subject Classification 42B25
Chinese Library Classification O174.2

1 引言及定理

设 S^{n-1} 是 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 中的单位球面, 赋予通常的 Lebesgue 测度 $d\sigma = d\sigma(x')$, 这里 $x' = x/|x|$ (对任意 $x \neq 0$). 设 $\Omega \in L^1(S^{n-1})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零次齐次函数且满足

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0. \tag{1.1}$$

定义高维的 Marcinkiewicz 积分如下

$$\mu_\Omega(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_{\Omega,t}(x)|^2 \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$F_{\Omega,t}(x) = \frac{1}{t}\int_{|x-y|\leq t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} f(y)dy.$$

收稿日期: 2004-11-30; 接受日期: 2005-04-26
基金项目: 国家科委 973 资助项目 (19990751); 教育部博士点基金资助项目 (20040027001)

如果设 H 是 Hilbert 空间 $H=\{h:\|h\|_H=(\int_0^\infty|h(t)|^2\frac{dt}{t})^{1/2}<\infty\}$, 且 $\phi(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^{n-1}}\chi_{\{|x|<1\}}$, 则 μ_Ω 可被看作是 H 中的向量值函数, 即

$$\mu_\Omega(f)(x)=\left(\int_0^\infty|F_{\Omega,t}(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_0^\infty|\phi_t*f(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}}=\|\phi_t*f(x)\|_H.$$

众所周知高维 Marcinkiewicz 积分首先是由 Stein 在文 [1] 中引进的. 文 [1] 证明: 如果 Ω 是连续的且满足 Lip_α $(0<\alpha\le 1)$ 条件, 则 μ_Ω 是强 (p,p) $(1<p\le 2)$ 和弱 (1,1) 的. Benedek 等在文 [2] 中证明: 如果 $\Omega\in C^1(S^{n-1})$, 则 μ_Ω 是 L^p $(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 其中 $1<p<\infty$. 近来, 文 [3] 改进了以上结果并证明: 如果 $\Omega\in H^1(S^{n-1})$, 则 μ_Ω 是 L^p $(1<p<\infty)$ 有界的, 其中 $H^1(S^{n-1})$ 是 S^{n-1} 上的 Hardy 空间 (详见文 [4–6]).

另一方面, 设 $b\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则 Marcinkiewicz 积分交换子定义如下

$$\mu_\Omega^b(f)(x)=\left(\int_0^\infty|F_{\Omega,b,t}(x)|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中

$$F_{\Omega,b,t}(x)=\frac{1}{t}\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f(y)dy.$$

对 $\beta>0$, 齐次 Lipschitz 空间定义为

$$\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x,\,h\in\mathbb{R}^n,\,h\neq 0}\frac{|\Delta_h^{[\beta]+1}f(x)|}{|h|^\beta}<\infty\right\},$$

其中 Δ_h^k 表示 k 阶差分算子 (详见文 [7]).

当 $b\in\dot{\Lambda}_\beta$ $(\mathbb{R}^n)$ 且 Ω 满足 Lip_α $(0<\alpha\le 1)$ 条件时, 刘 [8] 和王 [9] 分别考虑了 μ_Ω^b 的 $(L^p,\dot{F}_p^{\beta,\infty})$ 和 (L^p,L^s) 有界性且得到了如下结果.

定理 A[8] 设 $1<p<\infty$, $0<\alpha\le 1$ 且 $0<\beta<\min\{\frac{1}{2},\alpha\}$. 如果 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$, $\Omega\in\mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$, 则存在常数 $C>0$, 使得 $\|\mu_\Omega^b(f)\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}}\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p}$.

定理 B[9] 设 $1<p<\infty, 0<\beta<1$, $1/p-1/q=\beta/n$. 如果 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $\Omega\in\mathrm{Lip}_\alpha(S^{n-1})$ $(0<\alpha\le 1)$, 则存在常数 $C>0$, 使得 $\|\mu_\Omega^b(f)\|_{L^q}\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p}$.

但是, 当 $n/(n+\beta)\le p\le 1$ 且 $1/q=1/p-\beta/n$ 时, μ_Ω^b 不是 (L^p,L^q) 有界的, 文 [10] 研究了 μ_Ω^b 在 Hardy 空间上的有界性, 得到了如下结论.

定理 C 设 $\Omega\in\mathrm{Lip}_\alpha$ (S^{n-1}) $(0<\alpha\le 1)$, $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ $(0<\beta\le\alpha/2)$. 如果 $n/(n+\beta)<p\le 1$ 且 $1/q=1/p-\beta/n$, 则存在常数 $C>0$, 使得 $\|\mu_\Omega^b(f)\|_{L^q}\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{H^p}$.

一个自然的问题是: 在定理 A–C 中, 加在 Ω 上的条件是否可以被减弱. 我们将对这一问题给出肯定的回答.

定义 1.1 对于 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$ $(q\ge 1)$, Ω 的 q 阶积分连续模定义为

$$\omega_q(\delta)=\sup_{|\rho|\le\delta}\left(\int_{S^{n-1}}|\Omega(\rho x')-\Omega(x')|^q d\delta(x')\right)^{\frac{1}{q}},$$

这里 ρ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转且 $|\rho|=\|\rho-I\|$. 若 $\omega_q(\delta)$ 满足

$$\int_0^1\frac{\omega_q(\delta)}{\delta}d\delta<\infty, \tag{1.2}$$

我们就称 $\Omega(x')$ 满足 L^q-Dini 条件.

本文的主要结果叙述如下.

定理 1 设 $1 \le q' < p < \infty$, 且 Ω 满足 (1.1) 和下面的条件

$$\int_0^1 \frac{\omega_q(\delta)}{\delta^{1+\varepsilon}} d\delta < \infty, \quad 对某\ 0 < \varepsilon \le 1, \tag{1.3}$$

则当 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \beta < \min\{1/2, \varepsilon\})$ 时, 存在常数 $C > 0$, 使得 $\|\mu_\Omega^b(f)\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \cdot \|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p}$, 其中 $\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$.

定理 2 设 $0 < \beta < 1, 1 < p < n/\beta, 1/s = 1/p - \beta/n$, $q \ge n/(n-\beta)$. 如果 $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 且 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ 满足条件 (1.1), 则存在常数 $C > 0$, 使得 $\|\mu_\Omega^b(f)\|_{L^s} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p}$.

定理 3 设 $0 < \beta < 1$, $b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$. 如果 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ $(q \ge n/(n-\beta))$ 且满足 (1.1), 则存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $\lambda > 0$,

$$|\{x \in \mathbb{R}^n:\ |\mu_\Omega^b(f)(x)| > \lambda\}| \le C(\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^1}/\lambda)^{n/(n-\beta)}.$$

定理 4 设 $0 < \varepsilon \le 1, b \in \dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ $(0 < \beta < \min\{\frac{1}{2}, \varepsilon\})$, $n/(n+\beta) < p \le 1$ 且 $1/r = 1/p - \beta/n$. 如果存在某 $q \ge \max\{r, n/(n-\beta)\}$, 使得 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ 且满足条件 (1.1) 和 (1.3), 则存在常数 $C > 0$, 使得 $\|\mu_\Omega^b(f)\|_{L^r} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{H^p}$.

注 1 易见, 加在 Ω 上的光滑条件被减弱了. 特别地, 在定理 2 和定理 3 中 Ω 不需要任何光滑性条件.

注 2 由于对任何 $q > 1$, 有 $L^q(S^{n-1}) \subset L\log^+ L(S^{n-1}) \subset H^1(S^{n-1}) \subset L^1(S^{n-1})$ (见文 [11]). 因此, 在定理 1 的条件下对 $f \in L^p$ $(1 < p < \infty)$, 有 $\|\mu_\Omega(f)\|_{L^p} \le C\|f\|_{L^p}$ (见文 [3]).

注 3 本文令 Q 代表 $\mathbb{R}^n$ 中边平行于坐标轴的方体, $M_r f(x) = \sup_{x\in Q}(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y)|^r dy)^{1/r}$, 其中 $r \ge 1$.

2 一些基本引理

引理 2.1[7] (a) 对 $0 < \beta < 1$, $1 \le q < \infty$,

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta} \approx \sup_Q \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |f - f_Q| \approx \sup_Q \frac{1}{|Q|^{\beta/n}} \bigg(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f - f_Q|^q\bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $q = \infty$ 时, 上式作相应修改.

(b) 对 $0 < \beta < 1$, $1 < p < \infty$,

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}} \approx \bigg\|\sup_{Q\ni\cdot} \frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}} \int_Q |f - f_Q|\bigg\|_{L^p},$$

其中 $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$.

引理 2.2[7] 设 $Q^* \subset Q$, 则 $|f_{Q^*} - f_Q| \le C\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}|Q|^{\beta/n}$.

引理 2.3[11] 设 $0 < \lambda < n$, $q > 1$, Ω 是零次齐次函数且满足条件 (1.2), 如果存在常数 $a_0 > 0$, 使得 $|x| < a_0 R$, 则

$$\bigg(\int_{R<|y|<2R} \bigg|\frac{\Omega(y-x)}{|y-x|^{n-\lambda}} - \frac{\Omega(y)}{|y|^{n-\lambda}}\bigg|^q dy\bigg)^{\frac{1}{q}} \le CR^{n/q-(n-\lambda)}\bigg(\frac{|x|}{R} + \int_{|x|/2R}^{|x|/R} \frac{\omega_q(\delta)}{\delta} d\delta\bigg),$$

其中 $C > 0$ 且不依赖于 R 和 x.

引理 2.4[12] 设 $0<\alpha<n, 1<p<n/\alpha, 1/s=1/p-\alpha/n$, $q\geq n/(n-\alpha)$. 如果 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$, 则分数次积分算子

$$T_{\Omega,\alpha}f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}}f(y)dy$$

是从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^s(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

引理 2.5[13] 设 $0<\alpha<n$, $q\geq n/(n-\alpha)$. 如果 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$, 则对任何 $\lambda>0$ 和 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $|\{x\in\mathbb{R}^n:\ |T_{\Omega,\alpha}f(x)|>\lambda\}|\leq C(\|f\|_{L^1}/\lambda)^{n/(n-\alpha)}$.

3 主要定理的证明

3.1 定理 1–3 的证明

对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 取定方体 $Q(x_Q,l)\ni x$, 其中 x_Q 表示 Q 的中心, l 是其半边长. 固定 $f\in L^p$ $(1<p<\infty)$, 设 $f_1=f\chi_{Q^*}, f_2=f-f_1$, 其中 $Q^*=4\sqrt{n}Q$ 表示 Q 的 $4\sqrt{n}$ 倍同心扩张. 易见存在常数 $N\in\mathbb{N}$, 使得 $2^N\leq 4\sqrt{n}<2^{N+1}$. 注意到 $\mu_\Omega^b(f)=\mu_\Omega^{b-b_Q}(f)$ 且 $(\mu_\Omega^b(f))_Q<\infty$, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|\mu_\Omega^b(f)(y)-(\mu_\Omega^b(f))_Q|dy\\
&=\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|\mu_\Omega^{b-b_Q}(f)(y)-(\mu_\Omega^{b-b_Q}(f))_Q|dy\\
&\leq\frac{2}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|\mu_\Omega^{b-b_Q}(f)(y)-\mu_\Omega((b-b_Q)f_2)(x_Q)|dy\\
&\leq\frac{2}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|(b(y)-b_Q)\mu_\Omega(f)(y)|dy+\frac{2}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|\mu_\Omega((b-b_Q)f_1)(y)|dy\\
&\quad+\frac{2}{|Q|^{\beta/n}}\sup_{y\in Q}\|F_{\Omega,t}((b-b_Q)f_2)(y)-F_{\Omega,t}((b-b_Q)f_2)(x_Q)\|\\
&:=I+II+III.
\end{aligned}$$

下面, 分别估计 I,II 和 III.

利用 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ 的定义

$$\begin{aligned}
I&=\frac{2}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|(b(y)-b_Q)\mu_\Omega(f)(y)|dy\leq\frac{2}{|Q|^{\beta/n}}\sup_{y\in Q}|b(y)-b_Q|\frac{1}{|Q|}\int_Q|\mu_\Omega(f)(y)|dy\\
&\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}M(\mu_\Omega(f))(x),
\end{aligned}$$

其中 M 是 Hardy–Littlewood 极大函数.

对 II, 我们需要下面的引理.

引理 3.1.1[7] $\|(b-b_Q)f_1\|_{L^r}\leq C|Q|^{1/r+\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}M_r(f)(x)$, 其中 $1\leq r<\infty, f_1$ 的定义如上所述.

因此利用 Hölder 不等式和 μ_Ω 的 L^r $(1<r<\infty)$ 有界性

$$\begin{aligned}
II&=\frac{2}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|\mu_\Omega((b-b_Q)f_1)(y)|dy\leq\frac{2}{|Q|^{1+\beta/n}}\|\mu_\Omega((b-b_Q)f)\|_{L^r}|Q|^{1-1/r}\\
&\leq C|Q|^{-\beta/n-1/r}\|\mu_\Omega((b-b_Q)f)\|_{L^r}\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}M_r(f)(x).
\end{aligned}$$

我们现在估计 III. 设 $D=\|F_{\Omega,t}((b-b_Q)f_2)(y)-F_{\Omega,t}((b-b_Q)f_2)(x_Q)\|$, 则

$$
\begin{aligned}
D=&\left\{\int_0^\infty\left|\frac{1}{t}\left\{\int_{|y-z|\le t}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}((b-b_Q)f_2)(z)dz\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.-\int_{|x_Q-z|\le t}\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}((b-b_Q)f_2)(z)dz\right\}\right|^2\frac{dt}{t}\right\}^{\frac12}\\
\le&\left\{\int_0^\infty\left|\frac{1}{t}\int_{\substack{|y-z|\le t\\|x_Q-z|>t}}\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}((b-b_Q)f_2)(z)dz\right|^2\frac{dt}{t}\right\}^{\frac12}\\
&+\left\{\int_0^\infty\left|\frac{1}{t}\int_{\substack{|y-z|>t\\|x_Q-z|\le t}}\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}((b-b_Q)f_2)(z)dz\right|^2\frac{dt}{t}\right\}^{\frac12}\\
&+\left\{\int_0^\infty\left|\frac{1}{t}\int_{\substack{|y-z|\le t\\|x_Q-z|\le t}}\left(\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}\right)((b-b_Q)f_2)(z)dz\right|^2\frac{dt}{t}\right\}^{\frac12}\\
:=&D_1+D_2+D_3.
\end{aligned}
$$

我们首先估计 D_2. 由于对 $z\in(Q^*)^c$, 有 $|z-x_Q|\sim|y-z|$. 因此利用 Minkowski 不等式

$$
\begin{aligned}
D_2\le& C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x_Q-z)|}{|x_Q-z|^{n-1}}|(b(z)-b_Q)f_2(z)|\left(\int_{|x_Q-z|}^{|y-z|}\frac{1}{t^3}dt\right)^{\frac12}dz\\
\le& C\int_{(Q^*)^c}\frac{|\Omega(x_Q-z)|}{|x_Q-z|^{n-1}}|(b(z)-b_Q)f(z)|\frac{l^{\frac12}}{|x_Q-z|^{3/2}}dz\\
\le& C\sum_{k=N}^\infty 2^{-k/2}(2^kl)^{-n}\int_{2^kl\le|x_Q-z|<2^{k+1}l}|\Omega(x_Q-z)|\,|b(z)-b_Q|\,|f(z)|dz.
\end{aligned}
$$

注意到当 $z\in Q_{k+1}$ 时, 由引理 2.2

$$
|b(z)-b_Q|=|b(z)-b_{Q_{k+1}}|+|b_{Q_{k+1}}-b_Q|\le C|Q_{k+1}|^{\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta},\tag{3.1.1}
$$

这里 $Q_{k+1}=2^{k+1}Q$. 再由 $\Omega\in L^q(S^{n-1})$, 易见

$$
\left(\int_{|x_Q-z|<2^{k+1}l}|\Omega(x_Q-z)|^q\right)^{\frac1q}\le C(2^{k+1}l)^{n/q}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})},\tag{3.1.2}
$$

故利用 Hölder 不等式

$$
\begin{aligned}
D_2\le& C\sum_{k=N}^\infty 2^{-k/2}(2^kl)^{-n}|Q_{k+1}|^{\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\left\{\int_{|x_Q-z|<2^{k+1}l}|f(z)|^{q'}dz\right\}^{\frac{1}{q'}}\\
&\times\left\{\int_{|x_Q-z|<2^{k+1}l}|\Omega(x_Q-z)|^q\right\}^{\frac1q}\\
\le& C\sum_{k=N}^\infty 2^{-k/2}(2^kl)^{-n}|Q_{k+1}|^{\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}(2^{k+1}l)^{n/q'}(2^{k+1}l)^{n/q}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}M_{q'}(f)(x)\\
\le& C|Q|^{\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}M_{q'}(f)(x).
\end{aligned}
$$

利用同样的方法

$$
D_1\le C|Q|^{\beta/n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}M_{q'}(f)(x).
$$

接下来我们估计 D_3.

由 Minkowski 不等式, Hölder 不等式和 (3.1.1) 式, 有

$$
\begin{aligned}
D_3 &\le C\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}\right||b(z)-b_Q|\,|f_2(z)|\left(\int_{\substack{|y-z|\le t\\|x_Q-z|\le t}}\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac12}\\
&\le C\sum_{j=N}^{\infty}\int_{2^kl\le|z-x_Q|<2^{k+1}l}\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}\right|\frac{|b(z)-b_Q|\,|f(z)|}{|y-z|}dz.\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^kl)^{-1}|Q_{k+1}|^{\beta/n}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\left\{\int_{|z-x_Q|<2^{k+1}l}|f(z)|^{q'}dz\right\}^{\frac{1}{q'}}\\
&\quad\times\left\{\int_{2^kl\le|z-x_Q|<2^{k+1}l}\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}\right|^q dz\right\}^{\frac1q}\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^kl)^{-1}(2^{k+1}l)^{n/q'+\beta}|Q|^{\beta/n}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}M_{q'}(f)(x)\\
&\quad\times\left\{\int_{2^kl\le|z-x_Q|<2^{k+1}l}\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}\right|^q dz\right\}^{\frac1q}.
\end{aligned}
$$

然而, 由引理 2.3 和条件 (1.3) 可知

$$
\begin{aligned}
&\left\{\int_{2^kl\le|z-x_Q|<2^{k+1}l}\left|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}}-\frac{\Omega(x_Q-z)}{|x_Q-z|^{n-1}}\right|^q dz\right\}^{\frac1q}\\
&\quad\le C(2^kl)^{n/q-(n-1)}\left\{\frac{|y-x_Q|}{2^kl}+\int_{\frac{|y-x_Q|}{2^{k+1}l}}^{\frac{|y-x_Q|}{2^kl}}\frac{\omega_q(\delta)}{\delta}d\delta\right\}\\
&\quad\le C(2^kl)^{n/q-(n-1)}\left\{2^{-k}+2^{-k\varepsilon}\int_0^1\frac{\omega_q(\delta)}{\delta^{1+\varepsilon}}d\delta\right\}\\
&\quad\le C(2^kl)^{n/q-(n-1)}(2^{-k}+2^{-k\varepsilon}),
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
D_3 &\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^kl)^{-1+n/q'+\beta}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}|Q|^{\beta/n}(2^kl)^{n/q-(n-1)}(2^{-k}+2^{-k\varepsilon})M_{q'}(f)(x)\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^{-k(1-\beta)}+2^{-k(\varepsilon-\beta)})|Q|^{\beta/n}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}M_{q'}(f)(x)\le C|Q|^{\beta/n}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}M_{q'}(f)(x).
\end{aligned}
$$

结合 D_1, D_2 和 D_3, 就得到 $D\le C|Q|^{\beta/n}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}M_{q'}f(x)$. 因此

$$III\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}M_{q'}f(x).$$

综合 I, II 和 III 的估计

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|\mu_\Omega^b(f)-(\mu_\Omega^b(f))_Q|\\
&\quad\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\big(M(\mu_\Omega(f))(x)+M_r(f)(x)+M_{q'}(f)(x)\big),
\end{aligned}
$$

其中 $1<r<p<\infty$.

在上面不等式中, 对所有包含 x 的方体取上确界, 则由 M, M_r 和 $M_{q'}$ 的 L^p 有界性

$$\begin{aligned}\|\mu_\Omega^b(f)\|_{\dot{F}_p^{\beta,\infty}} &\approx \left\|\sup_{Q\ni\cdot}\frac{1}{|Q|^{1+\beta/n}}\int_Q|\mu_\Omega^b(f)(y)-(\mu_\Omega^b(f))_Q|dy\right\|_{L^p}\\ &\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|f\|_{L^p}.\end{aligned}$$

下面证明定理 2 和定理 3.

由于 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(\mathbb{R}^n)$ $(0<\beta<1)$, 利用 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}\mu_\Omega^b(f)(x) &= \left\{\int_0^\infty\left|\frac{1}{t}\int_{|x-y|\leq t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))f(y)dy\right|^2\frac{dt}{t}\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|b(x)-b(y)|\,|f(y)|\left(\int_{|x-y|\leq t}^\infty\frac{1}{t^3}dt\right)^{\frac{1}{2}}dy\\ &\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\beta}}|f(y)|dy.\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

利用 (3.1.3) 式, 引理 2.4 和引理 2.5, 我们有

$$\|\mu_\Omega^b(f)\|_{L^s}\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|T_{|\Omega|,\beta}|f|\,\|_{L^s}\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^p}$$

和

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|\mu_\Omega^b(f)(x)|>\lambda\}|\leq|\{x\in\mathbb{R}^n:|T_{|\Omega|,\beta}|f|(x)|>\lambda/C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\}|\leq C(\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^1}/\lambda)^{\frac{n}{n-\beta}}.$$

3.2 定理 4 的证明

首先引入与 Hardy 空间相关的一些概念.

定义 3.2.1[14] 设 $0<p\leq1\leq q\leq\infty$, $p<q$, $s\geq s_0$, 其中 $s_0=[n(1/p-1)]$. 称函数 a 是一个 (p,q,s) 原子, 如果 $a\in L^q(\mathbb{R}^n)$ 且满足下面的条件:

(1) $\mathrm{supp}a\subset Q$;

(2) $\|a\|_{L^q}\leq|Q|^{1/q-1/p}$;

(3) $\int_{\mathbb{R}^n}a(x)x^\alpha dx=0$, 对所有 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$, 且 $0\leq|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i\leq s$.

定义 3.2.2[14] 设 $0<p\leq1\leq q$, $p<q$, 则原子 Hardy 空间 $H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n):f=\sum_{j=1}^\infty\lambda_ja_j,\text{其中}\,a_j\,\text{是一个}\,(p,q,s)\,\text{原子, 且}\,\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|^p<\infty\right\},$$

其中记

$$\|f\|_{H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)}=\inf\left\{\left(\sum_{j=1}^\infty|\lambda_j|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{对所有分解}\ f=\sum_{j=1}^\infty\lambda_ja_j\right\}.$$

引理 3.2.1[14] 设 $0<p\leq1\leq q$, $p<q$, 则

$$H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)=H^p(\mathbb{R}^n),\quad\|f\|_{H_a^{p,q,s}(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{H^p(\mathbb{R}^n)}.$$

由于在定理 4 中 $s_0=[n(1/p-1)]\geq[n((n+\beta)/n)-1]=0$, 因此利用引理 3.2.1, 仅需证明存在常数 $C>0$, 使得对任意 $(p,t,0)$ 原子 a, 有 $\|\mu_\Omega^b(a)\|_{L^r}\leq C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}$, 其中 $t\geq n/\beta$.

设 supp $a \subset Q = Q(x_0, l)$, $Q^* = 4\sqrt{n}Q$. 易见存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $2^N \le 4\sqrt{n} < 2^{N+1}$. 因此

$$\begin{aligned}
\|\mu_\Omega^b(a)\|_{L^r} &\le \left(\int_{Q^*} |\mu_\Omega^b(a)(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_{(Q^*)^c} |\mu_\Omega^b(a)(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\le \left(\int_{Q^*} |\mu_\Omega^b(a)(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + \left\{\int_{(Q^*)^c} \left(\int_0^{|x-x_0|+2l} \left|\int_{|x-y|\le t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} (b(x)-b(y))a(y)dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{r}{2}} dx\right\}^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + \left\{\int_{(Q^*)^c} \left(\int_{|x-x_0|+2l}^\infty \left|\int_{|x-y|\le t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}} (b(x)-b(y))a(y)dy\right|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{r}{2}} dx\right\}^{\frac{1}{r}} \\
&:= I + II + III.
\end{aligned}$$

选取 p_1, s_1, 满足 $1 < p_1 < n/\beta$, $1/s_1 = 1/p_1 - \beta/n$, 易见 $r < s_1$. 因此利用 Hölder 不等式和 μ_Ω^b 的 (L^{p_1}, L^{s_1}) 有界性 (见定理 2),

$$\begin{aligned}
I &\le C\|\mu_\Omega^b(a)\|_{L^{s_1}} |Q^*|^{1/r-1/s_1} \le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta} \|a\|_{L^{p_1}} |Q^*|^{(1/r-1/s_1)} \\
&\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta} \|a\|_{L^t} |Q|^{(1/p_1-1/t)} |Q^*|^{(1/r-1/s_1)} \\
&\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta} |Q|^{(1/t-1/p)} |Q|^{(1/p_1-1/t)} |Q^*|^{(1/r-1/s_1)} \le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}.
\end{aligned}$$

由于对任意 $y \in Q$, $x \in (Q^*)^c$, 有 $|x-y| \sim |x-x_0| \sim |x-x_0| + 2l$, 因此利用 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}
II &\le C\left\{\int_{(Q^*)^c} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|x-y|}^{|x-x_0|+2l} \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{|\Omega(x-y)|\,|a(y)|}{|x-y|^{n-1}} |b(x)-b(y)|dy\right)^r dx\right\}^{\frac{1}{r}} \\
&\le C\left\{\int_{(Q^*)^c} \left(\int_Q \frac{|l|^{\frac{1}{2}}|\,|\Omega(x-y)|\,|a(y)|}{|x-y|^{n+\frac{1}{2}}} |b(x)-b(y)|dy\right)^r dx\right\}^{\frac{1}{r}} \\
&\le C\sum_{k=N}^\infty \left\{\int_{2^k l\le|x-x_0|<2^{k+1}l} \left(\int_Q \frac{|l|^{\frac{1}{2}}|\,|\Omega(x-y)|\,|a(y)|}{|x-y|^{n+\frac{1}{2}}} |b(x)-b(y)|dy\right)^r dx\right\}^{\frac{1}{r}} \\
&\le C\sum_{k=N}^\infty 2^{-k/2}(2^k l)^{-n}(2^{k+1}l)^\beta \|b\|_{\dot\Lambda_\beta} \int_Q \left\{\int_{|x-x_0|<2^{k+1}l} |\Omega(x-y)|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}} |a(y)|dy.
\end{aligned}$$

由 $|x-x_0| \sim |x-y|$ 且 $\Omega \in L^q(S^{n-1})$, 可知对任意 $q \ge r \ge 1$,

$$\left\{\int_{|x-x_0|<2^{k+1}l} |\Omega(x-y)|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}} \le C(2^{k+1}l)^{n/r}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}, \tag{3.2.1}$$

并且

$$\|a\|_{L^1} \le C\|a\|_{L^t}|Q|^{1-1/t} \le C|Q|^{1-1/p} = Cl^{n(1-1/p)}, \tag{3.2.2}$$

故

$$\begin{aligned}
II &\le C\sum_{k=N}^\infty 2^{-k/2}(2^k l)^{-n}(2^{k+1}l)^\beta (2^{k+1}l)^{n/r} \|b\|_{\dot\Lambda_\beta} \|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})} \|a\|_{L^1} \\
&\le C\sum_{k=N}^\infty 2^{-k/2}(2^k l)^{-n}(2^{k+1}l)^\beta (2^{k+1}l)^{n/r} |Q|^{-1/p+1} \|b\|_{\dot\Lambda_\beta} \|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})} \\
&\le C\sum_{k=N}^\infty 2^{-k[(1/2-\beta)+n(1-1/r)]} \|b\|_{\dot\Lambda_\beta} \|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})} \le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta} \|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.
\end{aligned}$$

下面估计 III.

注意到对任意 $y\in Q$, 有 $t\ge |x-x_0|+2l\ge |x-x_0|+|y-x_0|\ge |x-y|$. 因此

$$\begin{aligned}
&\left\{\int_{|x-x_0|+2l}^{\infty}\left|\int_{|x-y|\le t}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))a(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right\}^{\frac12}\\
&\quad=\left\{\int_{|x-x_0|+2l}^{\infty}\left|\int_Q\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))a(y)dy\right|^2\frac{dt}{t^3}\right\}^{\frac12}\\
&\quad=\left|\int_Q\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(x)-b(y))a(y)dy\right|\left(\int_{|x-x_0|+2l}^{\infty}\frac{dt}{t^3}\right)^{\frac12}\\
&\quad\le\left|\int_Q(b(x)-b(x_0))\left(\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right)a(y)dy\right|\frac{1}{|x-x_0|+2l}\\
&\qquad+\left|\int_Q\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}(b(y)-b(x_0))a(y)dy\right|\frac{1}{|x-x_0|+2l}\\
&\quad\le\int_Q\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right|\frac{|b(x)-b(x_0)|\,|a(y)|}{|x-x_0|+2l}dy\\
&\qquad+\int_Q\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}\frac{|b(y)-b(x_0)|\,|a(y)|}{|x-x_0|+2l}dy.
\end{aligned}$$

事实上, 在上面第一个不等式中用到了 a 的消失矩条件.

令 $III_1=\left\{\int_{(Q^*)^c}\left(\int_Q\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right|\left|\frac{|b(x)-b(x_0)|\,|a(y)|}{|x-x_0|+2l}dy\right)^r dx\right\}^{\frac1r}$,

$$III_2=\left\{\int_{(Q^*)^c}\left(\int_Q\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}\frac{|b(y)-b(x_0)|\,|a(y)|}{|x-x_0|+2l}dy\right)^r dx\right\}^{\frac1r},$$

则 $III\le C(III_1+III_2)$.

对 III_1, 由 Minkowski 不等式, Hölder 不等式, (3.1.2) 和 (3.2.2) 式, 有

$$\begin{aligned}
III_1&\le C\int_Q\left\{\int_{(Q^*)^c}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right|^r\left(\frac{|b(x)-b(x_0)|}{|x-x_0|+2l}\right)^r dx\right\}^{\frac1r}|a(y)|dy\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^kl)^{\beta-1}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\int_Q\left\{\int_{2^kl\le|x-x_0|<2^{k+1}l}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right|^r dx\right\}^{\frac1r}|a(y)|dy\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^kl)^{\beta-1}(2^{k+1}l)^{n(1/r-1/q)}\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\\
&\quad\times\int_Q\left\{\int_{2^kl\le|x-x_0|<2^{k+1}l}\left|\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}-\frac{\Omega(x-x_0)}{|x-x_0|^{n-1}}\right|^q dx\right\}^{\frac1q}|a(y)|dy\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^kl)^{\beta-1}(2^kl)^{n/r-n+1}(2^{-k}+2^{-k\varepsilon})\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\|a\|_{L^1}\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}(2^kl)^{\beta-1}(2^kl)^{n/r-n+1}(2^{-k}+2^{-k\varepsilon})\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}l^{n(1-1/p)}\\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty}2^{-kn(1-1/r)}(2^{-k(1-\beta)}+2^{-k(\varepsilon-\beta)})\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}\le C\|b\|_{\dot\Lambda_\beta}.
\end{aligned}$$

另外, 注意到对任意 $y \in Q$, $x \in (Q^*)^c$, $|x-y| \sim |x-x_0|$, 故

$$\begin{aligned}
III_2 &\le C\int_Q\left\{\int_{(Q^*)^c}\left(\frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}\right)^r\left(\frac{|b(y)-b(x_0)|}{|x-x_0|+2l}\right)^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}|a(y)|dy \\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty} l^\beta(2^kl)^{-n}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\int_Q\left\{\int_{2^kl\le|x-x_0|<2^{k+1}l}|\Omega(x-y)|^r dx\right\}^{\frac{1}{r}}|a(y)|dy \\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty} l^\beta(2^kl)^{-n}(2^{k+1}l)^{n/r}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}\|a\|_{L^1} \\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty} l^\beta(2^kl)^{-n}(2^{k+1}l)^{n/r}l^{n(1-1/p)}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})} \\
&\le C\sum_{k=N}^{\infty} 2^{-k(1-1/r)}\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.
\end{aligned}$$

因此

$$III \le C(III_1+III_2) \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

综合 I, II 和 III,

$$\|\mu_\Omega^b(a)\|_{L^r} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|\Omega\|_{L^q(S^{n-1})}.$$

这样就完成了定理 4 的证明.

致谢 本文作者对丁勇教授提出的建议表示衷心的感谢!

参 考 文 献

[1] Stein E. M., On the function of Littlewood-Paley, Lusin and Marcinkiewicz, *Tran. Amer. Math. Soc.,* 1958, **88**: 430–466.
[2] Benedek A., Calderón A. P., Panzone R., Convolution operators on Banach space valued functions, *Proc. Nat. Acad. Sci,* 1962, **48**: 356–365.
[3] Ding Y., Fan D., Pan Y., L^p-boundedness of Marcinkiewacz integrals with Hardy space function kernel, *Acta. Math. Scinica, English Series*, 2000, **16**: 593–600.
[4] Colzani L., Hardy spaces on sphere, Phd. thesis, Washington University, St. Louis, Mo, 1982.
[5] Colzani L., Taibleson M., Weiss G., Maximal estimate for Cesáro and Riesz means on sphere, *Indiana. Univ. Math. J.,* 1984, **33**: 837–889.
[6] Fan D, Pan Y., Singular integral operator with rough kernel supported by subvarieties, *Amer. J. Math.,* 1997, **119**: 21–34.
[7] Paluszynski M., Characterization of the Besov spaces via the commutator operator of Coifman, Rochberg and Weiss, *Indiana Univ Math. J.,* 1995, **44**(1): 1–18.
[8] Liu L., The continuity of commutator on Triebel–Lizorkin spaces, *Integr. Equ. Oper. Theory,* 2004, **49**: 65–75.
[9] Wang Y., A note on commutator of Marcinkiewicz integral, *J. Zhejing Univ. Sci. Ed.,* 2003, **30**(6): 606–608 (in Chinese).
[10] Xu L., Some boundedness of singular integrals and Marcinkiewicz integrals, Master Degree Dissertation, Beijing Normal University, 2003.
[11] Ding Y., Lu S., Xue Q., On Marcinkiewicz integral with homogeneous kernels, *J. Math. Anal. Appl.,* 2000, **245**: 471–488.
[12] Ding Y., Lu S., Weighted norm inequalities for fractional integral operators with rough kernel, *Can. J. Math.,* 1998, **50**(1): 29–39.
[13] Chanillo S., Waton D., Wheeden R. L., Some intergal and maximal operator related to starlike sets, *Studia Math.,* 1993, **107**: 223–255.
[14] Lu S., Four lectures on Real H^p spaces, Singapore: World scientific, 1995.