數 學 學 報
第3卷第4期 1953年12月

有限可剖分空間的新拓撲不變量*

吳 文 俊
（中國科學院數學研究所）

導 言

我們所知道的拓撲空間的許多拓撲不變量，如同倫群、下同調群、上同調環，以及在這種群或環上可以定義的種種運算如 Whitehead 積、Steenrod 平方和冪、Понтрягин 平方之類，不但是這個空間的拓撲不變量，而且也是它的同倫不變量．直到現在，我們祇知道一些孤立的並非是同倫不變的拓撲不變量，例如空間的維數，一維可剖分空間（polyhedron）的分枝點數，和直到最近才證明是拓撲不變但非同倫不變的某種特殊三維流形的 Reidemeister 組合不變量之類[1]．可是，這種拓撲不變但非同倫不變的量的搜求是必要的，因為它們的發現可以使我們有希望去討論空間的拓撲分類問題，也就是古典拓撲上的主要問題，而不致再局限於空間的同倫分類問題．（參閱 [2]，§1）．

本文可視為這方面的一個嘗試．我們證明了這樣的一條定理，任何一個有限的可剖分空間 P 可配以許多可剖分空間的組，這種空間組的同倫型乃是 P 的拓撲不變量．因之，這些空間組的任一同倫不變量都是 P 的拓撲不變量，而且，祇要原來那個同倫不變量是可以計算的，那麼由此導出的拓撲不變量也是可以計算的．簡單的例子說明，這樣所得來的拓撲不變量一般說來都不是同倫不變的．這使我們得到了一個普遍的方法，可以從空間或空間組的同倫不變量以導出有限可剖分空間的一組拓撲不變而非同倫不變的量來．

這些新不變量中最簡單的一種是由 Euler-Poincaré 示性數（以後簡稱示性數）這個同倫不變量所導出的，乃是與大於 1 的整數 n 有關的一組整數值不變量．在本文中詳細地討論了這種不變量的計算方法，證明它們一般說來是非同倫不變的，

* 1953年6月30日收到．

甚至可據以區分兩個可以縮成一點的空間的拓撲型 (topological type). 但另一方面,在可剖分空間是一個複合的閉流形 (combinational closed manifold) 時, 它們完全由這個流形的示性數所定.

此外, 我們又證明一個有限可剖分空間的 Betti 數, 可由這種新不變量, 即拓撲不變而非同倫不變的量表示出來, 反過來自然不可能. 這說明那些新不變量至少要比一部份古典不變量如 Betti 數之類要更基本.

目前的一個重要問題, 乃是決定如果我們把所討論的空間範圍限制到閉流形時, 這些新不變量中是否還有非同倫不變者存在, 但於此我們尚不能作確切的回答.

§1. 一些名詞與記號的解釋

因為拓撲學上許多最基本的觀念如複合形, 可剖分空間之類的意義在流行的書刊中頗不一致; 因此在本節中, 我們將先明確一下在以後常要用到而用法有歧異的一些名詞(和記號)的意義.

在歐氏空間中的凸集、凸胞腔、凸胞腔的邊和維數、單純形和它們的有關名詞將如通常那樣定義.

在同一歐氏空間中的任兩凸集 A 和 B 可確定一個既包含 A 又包含 B 的最小凸集 X. 假設 A, B 不相交而 X 具有下列性質: 對於任一 $x \in X - A - B$, 有一個唯一的點 $a \in A$, 和一個唯一的點 $b \in B$, 使 x 在線段 ab 之上, 換言之, x 可唯一地表成 $x = (a, b, r) = ra + (1 - r)b$ 的形狀, 其中 $a \in A$, $b \in B$, $0 < r < 1$, $1 - r : r$ 為線段 ax 與 xb 之比. 這時我們就說 X 是 A, B 兩凸集的"聯合" (join), 記以 $X = A \circ B$.

我們將抽象地引進一個 -1 維的凸胞腔 ε, 並作下列規約: $\varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon$, 又對於任一凸集 A, $A \circ \varepsilon = \varepsilon \circ A = A$.

若 σ, τ 是任兩凸胞腔而 $\sigma \circ \tau$ 有定義, 則顯然

$$\dim(\sigma \circ \tau) = \dim \sigma + \dim \tau + 1,$$

此處 σ, τ 亦可為 ε.

在本文中所討論的"複合形"和"可剖分空間"都是有限的, 因之"有限"兩字將一概省去.

在以後所謂"歐氏(有限)複合形",是指一個在某一歐氏空間中的"有限"個凸胞腔的非空集合 K,滿足這樣的條件:這集合中任一凸胞腔的維數 $\geqq 0$ 的邊也是這個集合的元素,且這集合中任兩凸胞腔的交在非空集合的時候,必同時是這兩凸胞腔的邊,因之也屬於這個集合. K 中所有凸胞腔的和集成一空間,我們記作 $\overline{K}$. 我們叫 $\overline{K}$ 爲 K 的"空間",K 爲 $\overline{K}$ 的一個"剖分". 在 K 中的凸胞腔都是單純形時,K 就叫做一個"歐氏單純複合形",而是 $\overline{K}$ 的一個"單純剖分".

假定一個歐氏空間中的子空間 P 可以看做是其中一個歐氏複合形的空間時,也就是 P 可以有剖分時,我們就說 P 是一個"歐氏可剖分空間".

有時,我們把 -1 維胞腔 ε 也加入歐氏複合形 K 那個集合裏去,並把它看作 K 中任一凸胞腔的邊. 這時,我們就說 K 是被"擴大"了,而把這個擴大了的歐氏複合形記作 K_ε.

以後所謂"複合形",(或"單純複合形"),是指一個拓撲空間 Q,一個歐氏複合形(或歐氏單純複合形) K,以及一個從 $\overline{K}$ 到 Q 之上的拓撲映像 τ 的總和而言. 這個複合形將記作 τK,Q 叫做複合形 τK 的"空間": $Q \equiv \tau\overline{K}$,而 τK 叫做 Q 的一個"剖分"(或"單純剖分").

假定一個拓撲空間可以看做是一個複合形的空間時,也就是可以有剖分時,就叫做一個"可剖分空間". 如所久知,一個可剖分空間必然有單純剖分.

假定 K, L 是某同一歐氏空間中的兩個歐氏複合形,而 L 中每一凸胞腔同時也是 K 中的一個凸胞腔,那麼我們就說 L 是 K 的一個"子複合形",記作 $L \subset K$,此時顯然應有 $\overline{L} \subset \overline{K}$.

假定 K, L 是某同一歐氏空間中的歐氏複合形而 $L \subset K$,τ 是 $\overline{K}$ 到一拓撲空間 Q 上的拓撲映像,因而 τK 是一個複合形,以 Q 爲其空間,那麼 τL 也是一個複合形,以 $\tau(\overline{L}) = P(\subset Q)$ 爲其空間. 這時,我們就說 τL 是 τK 的一個"子複合形",記作 $\tau L \subset \tau K$.

若 K_1, K_2 都是同一歐氏空間中的兩個歐氏複合形,而對於每一 $\sigma_1 \in K_1$,$\sigma_2 \in K_2$,$\sigma_1 \circ \sigma_2$ 恒有定義,那麼一切凸胞腔 $\sigma_1 \circ \sigma_2$,$\sigma_1 \circ \varepsilon$ 或 $\varepsilon \circ \sigma_2$ $(\sigma_1 \in K_1, \sigma_2 \in K_2)$ 成一歐氏複合形. 我們將把它叫做 K_1 和 K_2 的"聯合複合形" (join complex),記作 $K_1 \circ K_2$.

§2. 正則的複合形偶與可剖分空間偶

假定 $_TK, _TL$ 是兩個複合形而 $_TL \subset {_TK}$, 此處 K, L 是某同一歐氏空間中的歐氏複合形 $(L \subset K)$, 那麼在下面的條件甲能滿足時, 我們就說 $(_TK, _TL)$ 成一"正則的複合形偶", 或說 $_TL$ 正則地浸沒於 $_TK$ 中, 記作 $_TL \Subset {_TK}$. 條件甲如次:

甲. K 中任意一個既有 $\bar{L}$ 的點也有不在 $\bar{L}$ 中的點的凸胞腔 σ 必是兩個凸胞腔 σ_1, σ_0 的聯合: $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_0$, 此處 $\sigma_0 \in L, \sigma_1 \in K$ 但不 $\in L$, 且 $\sigma_0 = \sigma \cap \bar{L}$.

在特別的情形, 假定 $_TK, _TL\,(_TL \subset {_TK})$ 都是單純複合形, 即 $K, L\,(L \subset K)$ 都是歐氏單純複合形時, 很容易證明條件甲就與下面的條件乙等值:

乙. K 中任意一個單純形 σ 的頂點若都屬於 L, 則單純形 σ 也屬於 L.

今設 $_TL \Subset {_TK}$. 我們將引入下面的一些記號.

K 中一切與 $\bar{L}$ 無公共交點的凸胞腔成一 K 的子複合形, 記作 $K_1^{(+)}(K, L)$ 或 $K_1^{(+)}$.

K 中一切與 $\bar{L}$ 有公共交點的凸胞腔以及所有它們的邊成一 K 的子複合形, 記作 $K_1^{(-)}(K, L)$ 或 $K_1^{(-)}$.

K 中一切既在 $K_1^{(+)}$ 內又在 $K_1^{(-)}$ 內的凸胞腔成一 K 的子複合形, 即 $K_1^{(+)}$ 和 $K_1^{(-)}$ 之交, 記作 $K_1^{(0)}(K, L)$ 或 $K_1^{(0)}$.

假定 x 是 $\bar{K}_1^{(-)}$ 中的一點, 但不 $\in \bar{L}$ 且不 $\in \bar{K}_1^{(0)}$, 那麼 x 必是 K 中某一凸胞腔 σ 的點, 而 σ 既有 $\bar{L}$ 中的點也有不在 $\bar{L}$ 中的點. 由條件甲, 應有 $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_0$, 此處 $\sigma_0 \in L$, $\sigma_0 = \sigma \cap \bar{L}$, $\sigma_1 \in K$ 但不 $\in L$, 顯然 $\sigma_1 = \sigma \cap \bar{K}_1^{(0)} \in K_1^{(0)}$. 由 §1 開首所述, 我們可表 x 成下列形狀 $x = (x_1, x_0, r) = r x_1 + (1 - r) x_0$, 此處 $x_1 \in \sigma_1$, $x_0 \in \sigma_0$, $0 < r < 1$. 要是 x 在另一 $\sigma' \in K$ 內, 而 σ' 也既有 $\bar{L}$ 中的點也有不在 $\bar{L}$ 中的點, 且 $\sigma' = \sigma'_1 \circ \sigma'_0$, $\sigma'_0 = \sigma' \cap \bar{L} \in L$, $\sigma'_1 = \sigma' \cap \bar{K}_1^{(0)} \in K_1^{(0)}$. 若表 x 為 $x = (x'_1, x'_0, r')$, $x'_1 \in \sigma'_1$, $x'_0 \in \sigma'_0$, $0 < r' < 1$, 那麼由於這種表示的幾何意義, 可以知道這兩種表示方法必然一致. 我們應有 $x'_1 = x_1 \in \sigma_1 \cap \sigma'_1 (\neq \varnothing)$, $x'_0 = x_0 \in \sigma_0 \cap \sigma'_0 (\neq \varnothing)$, $r' = r > 0$ 且 < 1. 此外, 我們將作下列記號上的規定. 若 $x_1 \in \bar{K}_1^{(0)}$ 而 $x_0 \in \bar{L}$, 我們將以 $(x_1, x_0, 0)$ 表 x_0 (x_1 任意), 而以 $(x_1, x_0, 1)$ 表 x_1 (x_0 任意). 這樣, 由前所述, 我們就可得到下面的一些結論:

1°. 在 $\bar{K}_1^{(-)}$ 中的任一點 x 必可表作形狀 $x = (x_1, x_0, r)$, 此處 $x_1 \in \bar{K}_1^{(0)}$, $x_0 \in \bar{L}$, $0 \leqq r \leqq 1$.

2°. 在 $x\in\overline{K}_1^{(-)}-\overline{L}-\overline{K}_1^{(0)}$ 時,這個表示是唯一的,且 $0<r<1$. 在 $x\in\overline{L}$ 時, $x_0=x$ 而 x_1 任意, $r=0$. 在 $x\in\overline{K}_1^{(0)}$ 時, $x_1=x$ 而 x_0 任意, $r=1$.

3°. 在這種表示之下,映像 $x\to r$ 是連續的. 而在 x 不 $\in\overline{L}$ 時,映像 $x\to x_1$ 也是連續的,在 x 不 $\in\overline{K}_1^{(0)}$ 時,則映像 $x\to x_0$ 是連續的.

以下暫設 r 是一個任意的固定實數, $\geqq 0$ 且 $\leqq 1$.

所有或 $\in\overline{K}_1^{(+)}$ 或 $\in\overline{K}_1^{(-)}$ 而在表示 $x=(x_1,x_0,r')$ 中 $r'\geqq r$ 的一切點 x 成一空間記作 $\overline{K}_r^{(+)}(K,L)$ 或 $\overline{K}_r^{(+)}$.

所有 $\in\overline{K}_1^{(-)}$ 而在表示 $x=(x_1,x_0,r')$ 中 $r'\leqq r$ 的一切點 x 成一空間記作 $\overline{K}_r^{(-)}(K,L)$ 或 $\overline{K}_r^{(-)}$.

所有 $\in\overline{K}_1^{(-)}$ 而在表示 $x=(x_1,x_0,r')$ 中 $r'=r$ 的一切點 x 成一空間記作 $\overline{K}_r^{(0)}(K,L)$ 或 $\overline{K}_r^{(0)}$.

在 $r=1$ 時,這裏所定義的 $\overline{K}_r^{(+)},\overline{K}_r^{(-)},\overline{K}_r^{(0)}$ 等顯然與以前所定義的 $\overline{K}_1^{(+)},\overline{K}_1^{(-)},\overline{K}_1^{(0)}$ 一致,又在 $r=0$ 時, $\overline{K}_0^{(+)}=\overline{K}$, $\overline{K}_0^{(-)}=\overline{L}$, $\overline{K}^{(0)}=\overline{L}$.

假定 σ 是 K 中任意一個既有 $\overline{L}$ 的點也有不在 $\overline{L}$ 中的點的凸胞腔. 不論 r 如何 $(0\leqq r\leqq 1)$, 命 $\sigma_r^{(+)}=\overline{K}_r^{(+)}\cap\sigma$, $\sigma_r^{(-)}=\overline{K}_r^{(-)}\cap\sigma$, $\sigma_r^{(0)}=\overline{K}_r^{(0)}\cap\sigma$, 那麼 $\sigma_r^{(+)}$, $\sigma_r^{(-)}$ 和 $\sigma_r^{(0)}$ 都是凸胞腔. 我們容易看出 $\overline{K}_r^{(+)},\overline{K}_r^{(-)},\overline{K}_r^{(0)}$ 都是可剖分空間. 各有一個如下所定義的剖分 $K_r^{(+)},K_r^{(-)}$ 和 $K_r^{(0)}$.

$K_r^{(+)}$ 是一切 $\in K_1^{(+)}$ 以及一切 $\sigma_r^{(+)}$ 和它們的邊所成的複合形 $(K_0^{(+)}=K)$.

$K_r^{(-)}$ 是一切 $\in L$ 以及一切 $\sigma_r^{(-)}$ 和它們的邊所成的複合形 $(K_0^{(-)}=L)$.

$K_r^{(0)}$ 是一切 $\sigma_r^{(0)}$ 所成的複合形 $(K_0^{(0)}=L)$.

我們還不難證實 $K_r^{(0)}$ 是複合形 $K_r^{(+)}$ 與 $K_r^{(-)}$ 的"交":

(1) $$K_r^{(0)}=K_r^{(+)}\cap K_r^{(-)}.\qquad(0\leqq r\leqq 1)$$

我們又有

(2) $$\overline{K}=\overline{K}_r^{(+)}\cup\overline{K}_r^{(-)},\qquad \overline{K}_r^{(0)}=\overline{K}_r^{(+)}\cap\overline{K}_r^{(-)}.\qquad(0\leqq r\leqq 1)$$

(2)′ $$T\overline{K}=T\overline{K}_r^{(+)}\cup T\overline{K}_r^{(-)},\qquad T\overline{K}_r^{(0)}=T\overline{K}_r^{(+)}\cap T\overline{K}_r^{(-)}.\qquad(0\leqq r\leqq 1).$$

從 $\overline{K}_r^{(+)}$ 等的定義,又可得下面兩項事實,證明因很簡單從略:

1. 對於任兩 >0 且 <1 的 r,r', $\overline{K}_r^{(+)},\overline{K}_r^{(-)},\overline{K}_r^{(0)}$ (或 $T\overline{K}_r^{(+)},T\overline{K}_r^{(-)},T\overline{K}_r^{(0)}$), 各與 $\overline{K}_{r'}^{(+)},\overline{K}_{r'}^{(-)},\overline{K}_{r'}^{(0)}$ (或 $T\overline{K}_{r'}^{(+)},T\overline{K}_{r'}^{(-)},T\overline{K}_{r'}^{(0)}$) 有相同的拓撲型,或簡稱"同拓" (homomorphic).

2. 對於任一 >0 且 <1 的 r, $\overline{K}_1^{(+)}$ (或 $\tau\overline{K}_1^{(+)}$) 是 $\overline{K}_r^{(+)}$ (或 $\tau\overline{K}_r^{(+)}$) 也是 $\overline{K}-\overline{L}$ (或 $\tau\overline{K}-\tau\overline{L}$) 的一個變狀收縮核 (deformation retract), $\overline{K}_0^{(-)}=\overline{L}$ (或 $\tau\overline{K}_0^{(-)}=\tau\overline{L}$) 是 $\overline{K}_r^{(-)}$ (或 $\tau\overline{K}_r^{(-)}$) 的一個變狀收縮核. 因之, $\tau\overline{K}_r^{(+)}$ 與 $\tau\overline{K}_1^{(+)}$ 或 $\tau\overline{K}-\tau\overline{L}$ 有相同的一切同倫同調性質, $\tau\overline{K}_r^{(-)}$ 與 $\tau\overline{L}$ 亦然.

今設 P,Q 是兩個可剖分空間, 其中 P 是 Q 的子空間. 假定 P,Q 各有剖分 τL 與 τK 存在, 使 K,L 在同一歐氏空間中而 $L\Subset K$, 那麼我們就說 (Q,P) 成一"正則的可剖分空間偶", 或說 P 正則地浸沒於 Q, 記作 $P\Subset Q$. 我們又說 $(\tau K,\tau L)$ 是 (Q,P) 的一個"正則剖分".

§3. 主要定理的敍述

在以下, 所提到的拓樸空間都假定屬於某一個固定的類型, 例如正常空間, 可剖分空間之類.

假定有有限個拓樸空間 $Q_1,\cdots Q_m\,(m\geqq 1)$, 具有這樣的性質: 其中任意兩個空間 Q_i,Q_j 有公共點時, $Q_{ij}=Q_i\cap Q_j$ 不論作爲 Q_i 或是 Q_j 的子空間看來, 乃是相同的拓樸空間. 這時我們就說這一組 (有一定次序的) 空間 $(Q_1,\cdots,Q_m)$ 成一 (對於某一固定類型的) 拓樸空間組或簡稱"空間組".

假定 $\mathbf{Q}=(Q_1,\cdots,Q_m)$, $\mathbf{R}=(R_1,\cdots,R_m)$ 是兩個 (屬於同一固定類型的) 具有同樣多個數的空間, 且祇要 $Q_i\,(i=1,\cdots,m)$ 的和與交之間有某種包含或相等的關係, 與之相當的 $R_i\,(i=1,\cdots,m)$ 之間也有相同的包含或相等的關係, 那麼我們說 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 是"相似"的.

在以下, $\mathbf{P}=(P_1,\cdots,P_m)$, $\mathbf{Q}=(Q_1,\cdots,Q_m)$ 和 $\mathbf{R}=(R_1,\cdots,R_m)$ 是指 (屬於同一類型的) 相似空間組. 假定 $f_i:Q_i\to R_i\,(i=1,\cdots,m)$ 是一組連續映像, 具有這樣的性質, 任兩空間 Q_i,Q_j 祇要有公共點時, 對於任一 $x\in Q_{ij}=Q_i\cap Q_j$ 有 $f_i(x)=f_j(x)\in R_{ij}=R_i\cap R_j\,(\neq\varnothing)$. 這時, 我們就說 $\mathbf{f}=(f_1,\cdots,f_m)$ 是 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{R}$ 中的一個連續映像, 記作 $\mathbf{f}:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$. 這種連續映像的存在, 自然須預先假定 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 兩空間組具有這樣的性質, 祇要 $Q_i\cap Q_j\neq\varnothing$, 一定也有 $R_i\cap R_j\neq\varnothing$.

在特別情形, 每一 R_i 與 $Q_i\,(i=1,\cdots,m)$ 相合, 而每一 $f_i:Q_i\to R_i$ 都是恒同變換即 $f_i=1\,(i=1,\cdots,m)$ 時, $\mathbf{1}=(1,\cdots,1)$ 是一個連續映像. 又若 $f_i:P_i\to Q_i$, $g_i:Q_i\to R_i\,(i=1,\cdots,m)$ 組成連續映像 $\mathbf{f}:\mathbf{P}\to\mathbf{Q}$, $\mathbf{g}:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$, 那麼 $h_i=g_if_i:P_i\to R_i\ (i=1,\cdots,m)$ 顯然也組成一個連續映像 $\mathbf{h}:\mathbf{P}\to\mathbf{R}$.

今以 T 表閉線段 $[0,1]$, 那麼 $\mathbf{Q}\times T=(Q_1\times T,\cdots,Q_m\times T)$ 顯然也是一個空間組.(我們假定 $Q_i\times T$ 仍屬於原來那個空間的類型). 假定對於每一 $t\in T$, 有一連續變換 $\mathbf{D}_t:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$, 此處 $\mathbf{D}_t=(D_{t,1},\cdots,D_{t,m})$, $D_{t,i}:Q_i\to R_i\,(i=1,\cdots,m)$, 滿足下面的條件: 定義 $D_i:Q_i\times T\to R_i$ 為 $D_i(x_i,t)=D_{t,i}(x_i)$, $x_i\in Q_i$, $t\in T$ 時, $\mathbf{D}=(D_1,\cdots,D_m):\mathbf{Q}\times T\to\mathbf{R}$ 是一個連續映像. 這時, 我們就說 $\mathbf{D}_t, t\in T$, 是 $\mathbf{D}_0$ 與 $\mathbf{D}_1$ 之間的一個"變狀". 如果對於兩個連續映像 $\mathbf{f},\mathbf{g}:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$ 有一變狀 $\mathbf{D}_t:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$, $t\in T$ 存在使 $\mathbf{D}_0=\mathbf{f}$, $\mathbf{D}_1=\mathbf{g}$, 那麼我們說 $\mathbf{f}$ 與 $\mathbf{g}$ "同倫", 記作 $\mathbf{f}\simeq\mathbf{g}$.

假定 $\mathbf{f}:\mathbf{Q}\to\mathbf{R}$, $\mathbf{g}:\mathbf{R}\to\mathbf{Q}$ 都是連續變換, 而有

$$\mathbf{f}\,\mathbf{g}\simeq 1,\qquad \mathbf{g}\,\mathbf{f}\simeq 1,$$

那麼我們說空間組 $\mathbf{Q}$ 與 $\mathbf{R}$ 有相同的"同倫型", 或簡稱"同倫", 記作 $\mathbf{Q}\simeq\mathbf{R}$. 顯然, 假定 $\mathbf{Q}'=(Q_{i_1},\cdots,Q_{i_s})$, $\mathbf{R}'=(R_{i_1},\cdots,R_{i_s})$, $1\leqq i_1,\cdots,i_s\leqq m$, 那麼 $\mathbf{Q}',\mathbf{R}'$ 也是空間組而從 $\mathbf{Q}\simeq\mathbf{R}$ 可得 $\mathbf{Q}'\simeq\mathbf{R}'$.

空間組間的同倫關係, 顯然是一個同值觀念, 因此, 我們可依常法定義所謂空間組的同倫不變性或同倫不變量等.

在 $m=1$ 時, 空間組祇有一個空間, 這時上面所引進的一些觀念與關於空間間的相當觀念符合.

今將空間的類型限制為(有限的)可剖分空間. 下面是這種空間組的一個同倫不變量的例子.

假定 Q_1, Q_2 都是 Q 的子空間而 $Q_{12}=Q_1\cap Q_2$. 設 $j_{i*}:H_k(Q_{12})\to H_k(Q_i)$, $i=1,2\,(k\geqq 0)$, 是由恒同變換 $j_i:Q_{12}\to Q_i, i=1,2$ 所引起的同構變換, 此處 H_k 是指對於以某同一固定數域為係數群的下同調群. 命 $N_k=j_{1*}^{-1}(0)\cap j_{2*}^{-1}(0)\subset H_k(Q_{12})$ 而以 q^k 表 N_k 的秩 (rank), 則 q^k 是空間組 $\mathbf{Q}=(Q,Q_1,Q_2,Q_{12})$ 的一個同倫不變量. 證之如次:

設 $\mathbf{Q}'=(Q',Q_1',Q_2',Q_{12}')$ 是與 $\mathbf{Q}$ 相似的一個空間組. 與 $\mathbf{Q}$ 同樣, 可定義 j_i', j_{i*}', N_k', q'^k 等. 假定 $\mathbf{Q}\simeq\mathbf{Q}'$, 而 $\mathbf{f}=(f,f_1,f_2,f_{12}):\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}'$, $\mathbf{f}'=(f',f_1',f_2',f_{12}'):\mathbf{Q}'\to\mathbf{Q}$ 是實現這個同倫關係的連續映像, 即 $\mathbf{f}\,\mathbf{f}'\simeq 1$, $\mathbf{f}'\mathbf{f}\simeq 1$. 從後二者可知 $f_if_i'\simeq 1$, $f_i'f_i\simeq 1$, $i=1,2$, 以及 $f_{12}f_{12}'\simeq 1$, $f_{12}'f_{12}\simeq 1$, 因之 $f_{i*}:H_k(Q_i)\approx H_k(Q_i')$, $f_{i*}':H_k(Q_i')\approx H_k(Q_i)$, $i=1,2$, 且 $f_{12*}:H_k(Q_{12})\approx H_k(Q_{12}')$, $f_{12*}':H_k(Q_{12}')\approx H_k(Q_{12})$. 又因 $f_{12}\equiv f_i/Q_{12}$, $f_{12}'\equiv f_i'/Q_{12}'$, $i=1,2$, 故 $j_i'f_{12}=f_ij_i$, $j_if_{12}'=f_i'j_i'$, $i=1,2$. 由此

知 $f_{12*}j_{i*}^{-1}(0)=j_{i*}'^{-1}(0)$, $f'_{12*}j_{i*}'^{-1}(0)=j_{i*}^{-1}(0)$, $i=1,2$, 即 $f_{12*}N_k=N'_k$, $f'_{12*}N'_k=N_k$. 因之 $N_k\approx N'_k$ 而 $q^k=q'^k$, 即所欲證.

今設 (Q,P) 是一個正則可剖分空間偶, $(\tau K,\tau L)$ 是 (Q,P) 的任意一個正則剖分. 依 §2, 對於任一 $\geqq 0$ 及 $\leqq 1$ 的 r, 我們可從 $(\tau K,\tau L)$ 作出一個空間組 $(Q,\tau\overline{K}_r^{(+)},\tau\overline{K}_r^{(-)},\tau\overline{K}_r^{(0)},P)$. 本文中的主要定理乃是:

定理 1. 假定 $(\tau K,\tau L)$ 是正則可剖分空間偶 (Q,P) 的一個正則剖分, 而 $0<r<1$, 那麼從 $(\tau K,\tau L)$ 作出的空間組 $(Q,\tau\overline{K}_r^{(+)},\tau\overline{K}_r^{(-)},\tau\overline{K}_r^{(0)},P)$ 的同倫型與所選擇的正則剖分 $(\tau K,\tau L)$ 無關. 換言之, 這個空間組的同倫型乃是正則可剖分空間偶 (Q,P) 的拓撲不變量.

從正則可剖分空間偶 (Q,P) 的同一個正則剖分 $(\tau K,\tau L)$ 所作出的不同空間組 $(Q,\tau\overline{K}_r^{(+)},\tau\overline{K}_r^{(-)},\tau\overline{K}_r^{(0)},P)$ 的同倫型之與 r $(0<r<1)$ 無關, 可以像下面那樣來證明它.

設 $0<r_1<r_2<1$. 由 §2, 在 $\tau\overline{K}_1^{(-)}$ 中的每一個點 x 都可表成 $x=\tau(x_1,x_0,r)$ 的形狀, 此處 $x_1\in\overline{K}_1^{(0)}$, $x_0\in\overline{L}$, $0\leqq r\leqq 1$, 而在 x 不 $\in\tau\overline{K}_1^{(0)}$ 或 P 時, 這種表示是唯一的, 且 $0<r<1$. 今定義 $f:Q\to Q$ 如次 $(\tau(x_1,x_0,r)\in\tau\overline{K}_1^{(-)})$:

$$
f:\begin{cases}
\tau(x_1,x_0,r)\to\tau\left(x_1,x_0,\dfrac{1-r_2}{1-r_1}\cdot r+\dfrac{r_2-r_1}{1-r_1}\right), & 1\geqq r\geqq r_1,\\[2ex]
\tau(x_1,x_0,r)\to\tau\left(x_1,x_0,\dfrac{r_2}{r_1}\cdot r\right), & r_1\geqq r\geqq 0,\\[2ex]
x\to x,\quad x\in\tau\overline{K}_1^{(+)}.
\end{cases}
$$

顯然 f 是 Q 到 Q 上的一個拓撲映像, 而且

$$
f(\tau\overline{K}_{r_1}^{(+)})=\tau\overline{K}_{r_2}^{(+)},\quad f(\tau\overline{K}_{r_1}^{(-)})=\tau\overline{K}_{r_2}^{(-)},\quad f(\tau\overline{K}_{r_1}^{(0)})=\tau\overline{K}_{r_2}^{(0)},\quad f(P)=P.
$$

因之在 f 之下空間組 $(Q,\tau\overline{K}_{r_1}^{(+)},\tau\overline{K}_{r_1}^{(-)},\tau\overline{K}_{r_1}^{(0)},P)$ 的各個空間與空間組 $(Q,\tau\overline{K}_{r_2}^{(+)},\tau\overline{K}_{r_2}^{(-)},\tau\overline{K}_{r_2}^{(0)},P)$ 的各相當空間同拓. 自然更應有

$$
(Q,\tau\overline{K}_{r_1}^{(+)},\tau\overline{K}_{r_1}^{(-)},\tau\overline{K}_{r_1}^{(0)},P)\simeq(Q,\tau\overline{K}_{r_2}^{(+)},\tau\overline{K}_{r_2}^{(-)},\tau\overline{K}_{r_2}^{(0)},P),
$$

即所欲證.

在一般的情形, 即空間組係從不同的正則剖分所作出的時候, 定理1的證明較

爲複雜．這個證明，我們將移至 §4 中來完成它，目前先列舉一些從定理 1 直接就可獲得的推論．

首先，定理 1 包括了下面的

定理 2. 在定理 1 的假定下，$_T\overline{K}_r^{(0)}\,(0<r<1)$ 的同倫型是 (Q,P) 的拓撲不變量．

因爲 $_T\overline{K}_r^{(-)}\,(0<r<1)$ 以 P 爲它的一個變狀收縮核，而 $_T\overline{K}_r^{(+)}\,(0<r<1)$ 與 $Q-P$ 都以 $_T\overline{K}_1^{(+)}$ 爲變狀收縮核，故 $_T\overline{K}_r^{(-)}\simeq P$, $_T\overline{K}_r^{(+)}\simeq Q-P\,(0<r<1)$，因而 $_T\overline{K}_r^{(+)}$ 和 $_T\overline{K}_r^{(-)}$ 的同倫型在 $0<r<1$ 時都是 (Q,P) 的拓撲不變量，甚爲明顯，但如定理 2 所述 $_T\overline{K}_r^{(0)}$ 的同倫型之爲拓撲不變量，則並不顯然．

從上面的一些定理可知：

定理 3. 在定理 1 的假定下，空間組 $(Q,\ _T\overline{K}_r^{(+)},\ _T\overline{K}_r^{(-)},\ _T\overline{K}_r^{(0)},\ P)$, $0<r<1$，的任一個同倫不變量必是 (Q,P) 的一個拓撲不變量．特別，$_T\overline{K}_r^{(+)}$ 或 $_T\overline{K}_r^{(0)}\,(0<r<1)$ 的任一同倫不變量必是 (Q,P) 的一個拓撲不變量．

特別，在 P 是可剖分空間 Q 的一個點時，(Q,P) 必是一個正則的可剖分空間偶．這時的定理 2，是一個很早就知道的定理，可參閱 [3] 的第五章．$_T\overline{K}_r^{(0)}$ 的下同調群是 $_T\overline{K}_r^{(0)}$ 的同倫不變量，因之是 (Q,P) 的拓撲不變量，這就是所謂 Q "在 P 點的下同調群."

§4. 主要定理的證明

像 §3 中那樣，假定 (Q,P) 是一個正則的可剖分空間偶，$(_TK,\ _TL)$ 和 $(_{T'}K',\ _{T'}L')$ 是它的任意兩個正則剖分．對於任一 $\geqq 0$ 而 $\leqq 1$ 的 s，從 $(_TK,\ _TL)$ 可以作出一個空間組 $(Q,\ _T\overline{K}_s^{(+)},\ _T\overline{K}_s^{(-)},\ _T\overline{K}_s^{(0)},\ P)$．同樣，從 $(_{T'}K',\ _{T'}L')$ 也可以作出一個空間組 $(Q,\ _{T'}\overline{K}_s'^{(+)},\ _{T'}\overline{K}_s'^{(-)},\ _{T'}\overline{K}_s'^{(0)},\ P)$．那麼，定理 1 無非是說在 $0<s<1$ 時，

$$\text{(I)}\qquad (Q,\ _T\overline{K}_s^{(+)},\ _T\overline{K}_s^{(-)},\ _T\overline{K}_s^{(0)},\ P)\simeq(Q,\ _{T'}\overline{K}_s'^{(+)},\ _{T'}\overline{K}_s'^{(-)},\ _{T'}\overline{K}_s'^{(0)},\ P).$$

定理 2 是說在 $0<s<1$ 時，

$$\text{(II)}\qquad _T\overline{K}_s^{(0)}\simeq\ _{T'}\overline{K}_s'^{(0)}.$$

雖然定理 2 祇是定理 1 的推論，但因爲它的證明比較簡單，所以我們先來證明定理 2，也就是證明 (II) 式．

令

(1) $$N = T\overline{K}_1^{(-)} - T\overline{K}_1^{(0)} - P, \quad N' = T'\overline{K}_1'^{(-)} - T'\overline{K}_1'^{(0)} - P,$$

則 $N \cup P$ 和 $N' \cup P$ 都是 P 在 Q 中的一個鄰域. 因爲 K, L, K', L' 都是"有限的"複合形, 故必有數 r_0', r_1', r_0 使

(2) $$0 < r_0' < r_1' < 1, \quad 0 < r_0 < 1;$$

(2)′ $$T'\overline{K}_{r_0'}'^{(-)} \subset T\overline{K}_{r_0}^{(-)} \subset T'\overline{K}_{r_1'}'^{(-)} \subset N \cup P.$$

由 §2, N 中的點可唯一地表成形狀 $T(x_1, x_0, r)$, 此處 $0 < r < 1$, $x_1 \in \overline{K}_1^{(0)}$, $x_0 \in \overline{L}$. 同樣 N' 中的點也可唯一地表成形狀 $T'(x_1', x_0', r')$, 此處 $0 < r' < 1$, $x_1' \in \overline{K}_1'^{(0)}$, $x_0' \in \overline{L}'$.

今定義映像 ($t \in T = [0, 1]$).

$$F_t: N \to N, \quad F_t': N' \to N'.$$

爲 ($T(x_1, x_0, r) \in N$, $T'(x_1', x_0', r') \in N'$)

(3) $$\begin{cases} F_t T(x_1, x_0, r) = T(x_1, x_0, t r_0 + \overline{1-t} \cdot r), \\ F_t' T'(x_1', x_0' r') = T'(x_1', x_0', t r_0' + \overline{1-t} \cdot r'). \end{cases}$$

像 §2 所指出的那樣, F_t, F_t' 都是連續映像且連續地依賴於 $t (\in T)$. 由 (3) 知

$$F_0 = 1, \quad F_1/T\overline{K}_{r_0}^{(0)} = 1, \quad F_1(N) \subset T\overline{K}_{r_0}^{(0)},$$

$$F_0' = 1, \quad F_1'/T'\overline{K}_{r_0'}'^{(0)} = 1, \quad F_1'(N') \subset T'\overline{K}_{r_0'}'^{(0)}.$$

又由 (1), (2), (2)′ 可知

$$F_t(T'\overline{K}_{r_0'}'^{(0)}) \subset F_t(T\overline{K}_{r_0}^{(-)} - P) \subset T\overline{K}_{r_0}^{(-)} - P \subset T'\overline{K}_{r_1'}'^{(-)} - P \subset N',$$

$$F_t'(T\overline{K}_{r_0}^{(0)}) \subset F_t'(T'\overline{K}_{r_1'}'^{(-)} - P) \subset T'\overline{K}_{r_1'}'^{(-)} - P \subset N.$$

因此, 如果我們如下定義一些映像 ($x \in T\overline{K}_{r_0}^{(0)}$, $x' \in T'\overline{K}_{r_0'}'^{(0)}$),

$$f(x) = F_1'(x), \quad f'(x') = F_1(x'),$$

$$D_t(x)=\begin{cases} F_1 F'_{2t}(x), & 0\leqq t\leqq \frac{1}{2}, \\ F_1 F'_1(x), & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1; \end{cases}$$

$$D'_t(x')=\begin{cases} F'_1 F_{2t}(x'), & 0\leqq t\leqq \frac{1}{2}; \\ F'_1 F_1(x'), & \frac{1}{2}\leqq t\leqq 1; \end{cases}$$

那麼

$$f: {}_T\overline{K}^{(0)}_{r_0}\to {}_{T'}\overline{K}'^{(0)}_{r'_0},\quad f': {}_{T'}\overline{K}'^{(0)}_{r'_0}\to {}_T\overline{K}^{(0)}_{r_0},$$

$$D_t: {}_T\overline{K}^{(0)}_{r_0}\to {}_T\overline{K}^{(0)}_{r_0},\quad D'_t: {}_{T'}\overline{K}'^{(0)}_{r'_0}\to {}_{T'}\overline{K}'^{(0)}_{r'_0}$$

都是連續映像且 D_t, D'_t 連續地依賴於 t ($\in T$). 顯然

$$D_0=1,\quad D_1=f'f,$$

$$D'_0=1,\quad D'_1=ff',$$

故

$$f'f\simeq 1,\quad ff'\simeq 1,$$

亦即

$${}_T\overline{K}^{(0)}_{r_0}\simeq {}_{T'}\overline{K}'^{(0)}_{r'_0}.$$

如 §2 末所指出, 從此式即得 (II) 式, 而定理 2 已證畢.

在證定理 1 時, 我們將先取數 r_i, r'_i $(i=0,1,2)$ 使

(4)　$$1>r_0>r_1>r_2>0,\quad 1>r'_0>r'_1>r'_2>0,$$

(5)　$${}_T\overline{K}^{(+)}_1\subset {}_{T'}\overline{K}'^{(+)}_{r'_0}\subset {}_T\overline{K}^{(+)}_{r_0}\subset {}_{T'}\overline{K}'^{(+)}_{r'_1}\subset {}_T\overline{K}^{(+)}_{r_1}\subset {}_{T'}\overline{K}'^{(+)}_{r'_2}\subset {}_T\overline{K}^{(+)}_{r_2},$$

或即

(5)′　$${}_T\overline{K}^{(-)}_1\supset {}_{T'}\overline{K}'^{(-)}_{r'_0}\supset {}_T\overline{K}^{(-)}_{r_0}\supset {}_{T'}\overline{K}'^{(-)}_{r'_1}\supset {}_T\overline{K}^{(-)}_{r_1}\supset {}_{T'}\overline{K}'^{(-)}_{r'_2}\supset {}_T\overline{K}^{(-)}_{r_2}.$$

因為我們的複合形都是"有限的", 故這樣的 r_i, r'_i 必然存在.

對於 $t\in T$ 及任意 $i,j=0,1,2$ 而 $i\neq j$ 定義

$$F_{ij,t}, F'_{ij,t}: Q\to Q$$

如次 ($T(x_1,x_0,r)\in T\overline{K}_1^{(-)}$, $T'(x_1',x_0',r')\in T'\overline{K}_1'^{(-)}$):

1°. $r_i>r_j$ 因而 $i<j$ 時,

$$F_{ij,t}:\begin{cases} T(x_1,x_0,r)\to T\left(x_1,x_0,(1-t)r+t\left(\dfrac{1-r_j}{1-r_i}\cdot r-\dfrac{r_i-r_j}{1-r_i}\right)\right), & r_i\leqq r\leqq 1,\\ T(x_1,x_0,r)\to T(x_1,x_0,(1-t)r+t\,r_j), & r_j\leqq r\leqq r_i,\\ x\to x,\quad x\in T\overline{K}_1^{(+)} \text{ 或 } T\overline{K}_{r_j}^{(-)}. \end{cases}$$

2°. $r_i<r_j$ 因而 $i>j$ 時,

$$F_{ij,t}:\begin{cases} T(x_1,x_0,r)\to T\left(x_1,x_0,(1-t)r+t\cdot\dfrac{r_j}{r_i}\cdot r\right), & 0\leqq r\leqq r_i,\\ T(x_1,x_0,r)\to T(x_1,x_0,(1-t)r+t\,r_j), & r_i\leqq r\leqq r_j,\\ x\to x,\quad x\in T\overline{K}_{r_j}^{(+)}. \end{cases}$$

3°. $r_i'>r_j'$ 因而 $i<j$ 時,

$$F'_{ij,t}:\begin{cases} T'(x_1',x_0',r')\to T'\left(x_1',x_0',(1-t)r'+t\left(\dfrac{1-r_j'}{1-r_i'}\cdot r'-\dfrac{r_i'-r_j'}{1-r_i'}\right)\right), & r_i'\leqq r'\leqq 1,\\ T'(x_1',x_0',r')\to T'(x_1',x_0',(1-t)r'+t\,r_j'), & r_j'\leqq r'\leqq r_i',\\ x'=x',\quad x'\in T'\overline{K}_1'^{(+)} \text{ 或 } T'\overline{K}_{r_j'}'^{(-)}. \end{cases}$$

4°. $r_i'<r_j'$ 因而 $i>j$ 時,

$$F'_{ij,t}:\begin{cases} T'(x_1',x_0',r')\to T'\left(x_1',x_0',(1-t)r'+t\cdot\dfrac{r_j'}{r_i'}\cdot r'\right), & 0\leqq r'\leqq r_i',\\ T'(x_1',x_0',r')\to T'(x_1',x_0',(1-t)r'+t\,r_j'), & r_i'\leqq r'\leqq r_j',\\ x'\to x',\quad x'\in T'\overline{K}_{r_j'}'^{(+)}. \end{cases}$$

上面這些映像, 容易知道都是連續的而且連續地依賴於 $t\,(\in T)$.

其次, 我們定義一些映像 $(t\in T)$

$$f, f', D_t, D_t': Q\to Q$$

如次:

$$f=F'_{12,1}F_{01,1},\qquad f'=F_{10,1}F'_{21,1},$$

$$D_t = \begin{cases} F_{20,6t}, & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{6}, \\ F_{20,1}\, F_{01,6t-1}, & \frac{1}{6} \leqq t \leqq \frac{1}{3}, \\ F_{20,1}\, F'_{12,6t-2}\, F_{01,1}, & \frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ F_{20,1}\, F'_{21,6t-3} f, & \frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{2}{3}, \\ F_{20,1}\, F_{10,6t-4}\, F'_{21,1} f, & \frac{2}{3} \leqq t \leqq \frac{5}{6}, \\ F_{20,6-6t} f' f, & \frac{5}{6} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

$$D'_t = \begin{cases} F'_{02,6t}, & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{6}, \\ F'_{02,1}\, F'_{21,6t-1}, & \frac{1}{6} \leqq t \leqq \frac{1}{3}, \\ F'_{02,1}\, F_{10,6t-2}\, F'_{21,1}, & \frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ F'_{02,1}\, F_{01,6t-3} f', & \frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{2}{3}, \\ F'_{02,1}\, F'_{12,6t-4}\, F_{01,1} f', & \frac{2}{3} \leqq t \leqq \frac{5}{6}, \\ F'_{02,6-6t} f f', & \frac{5}{6} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

這些映像，也都是連續的而且 D_t, D'_t 都連續地依賴於 $t\,(\in T)$.

由 (4), (5) 或 (5)′ 以及 $F_{ij,t}, F'_{ij,t}$ 的定義，我們不難驗算出下面的一些關係：

$$f(\tau \overline{K}^{(+)}_{r_0}) \subset \tau' \overline{K}'^{(+)}_{r'_2}, \quad f(\tau \overline{K}^{(-)}_{r_0}) \subset \tau' \overline{K}'^{(-)}_{r'_2}, \quad f(\tau \overline{K}^{(0)}_{r_0}) \subset \tau' \overline{K}'^{(0)}_{r'_2}, \quad f(P) \subset P.$$

因此，f 定義了下面的空間組間的連續映像，

$$\mathbf{f} : (Q, \tau \overline{K}^{(+)}_{r_0}, \tau \overline{K}^{(-)}_{r_0}, \tau \overline{K}^{(0)}_{r_0}, P) \to (Q, \tau' \overline{K}'^{(+)}_{r'_2}, \tau' \overline{K}'^{(-)}_{r'_2}, \tau' \overline{K}'^{(0)}_{r'_2}, P).$$

同樣, 我們經過一些煩長的驗算可以知道 f', D_t, D'_t 也定義了某些空間組間的連續映像如次:

$$\mathbf{f}:(Q, \tau'\overline{K}'^{(+)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(-)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(0)}_{r'_2}, P)\to(Q, \tau\overline{K}^{(+)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(-)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(0)}_{r_0}, P),$$

$$\mathbf{D}_t:(Q, \tau\overline{K}'^{(+)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(-)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(0)}_{r_0}, P)\to(Q, \tau\overline{K}^{(+)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(-)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(0)}_{r_0}, P),$$

$$\mathbf{D}'_t:(Q, \tau'\overline{K}'^{(+)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(-)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(0)}_{r'_2}, P)\to(Q, \tau'\overline{K}'^{(+)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(-)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(0)}_{r'_2}, P).$$

此外, 由 f, f', D_t, D'_t 的定義得

$$\mathbf{D}_0=1, \quad \mathbf{D}_1=\mathbf{f}'\mathbf{f},$$

$$\mathbf{D}'_0=1, \quad \mathbf{D}'_1=\mathbf{f}\mathbf{f}',$$

因此

$$\mathbf{f}\mathbf{f}'\simeq\mathbf{f}'\mathbf{f},$$

亦即

$$(Q, \tau\overline{K}^{(+)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(-)}_{r_0}, \tau\overline{K}^{(0)}_{r_0}, P)\simeq(Q, \tau'\overline{K}'^{(+)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(-)}_{r'_2}, \tau'\overline{K}'^{(0)}_{r'_2}, P).$$

依 §3 關於定理 1 的討論, 這一式的兩邊各與 (I) 式的兩邊同倫, 因而 (I) 式亦即定理 1 已完全證明.

§5. 可剖分空間的拓撲不變量

假定 P 是一個可剖分空間, n 是 >1 的正整數. P 的 n 次自乘的拓撲積將表以 $Q=P^n$, 它的對角空間即一切作 $(x_1, \cdots, x_n)$ 形狀而 $x_1=\cdots=x_n\in P$ 的點所成的子空間與 P 同拓, 我們將仍用 P 來表示. 我們有

定理 4. (Q, P) 是一個正則的可剖分空間偶.

在證明這一定理之先, 我們將先作一準備.

假定 L 是在 m 維歐氏空間 R^m 中的一個單純複合形, 那麼在 mn 維歐氏空間 $(R^m)^n=R^{mn}$ 中有一個複合形 $K'=L^n$, 即 L 自乘 n 次的積, 它的胞腔都是 $\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$ $(\sigma_i\in L)$ 形狀的凸集. $\overline{K}'=\overline{L}^n$ 的對角空間與 $\overline{L}$ 同拓, 因之有一與 L 同構的剖分, 這個對角空間與它的剖分將仍用 $\overline{L}$ 和 L 來表示. 在以下我們將定義一個以 L 爲子複合形的 $\overline{K}'$ 的"標準"剖分 K.

先設 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 是 L 中任意 n 個單純形, $\sigma_i(i=1, \cdots, n)$ 恰有 $r+1$ 個 $(r\geqq0)$ 頂點 $a_0, \cdots, a_r$ 公共:

$$(1)\qquad \sigma_j=(a_0,\cdots,a_r;b_1^{(j)},\cdots,b_{k_j}^{(j)}),\quad j=1,\cdots,n.$$

令　$(1)'\quad I=\{0,1,\cdots,r\},\quad J=\{1,\cdots,n\},\quad K_j=\{1,\cdots,k_j\},\quad j\in J.$

對於任一 $I'\subset I$, 令 $\sigma_{I'}=$ 由 $i\in I'$ 的一切 a_i 所成的單純形, 特別在 $I'=\varnothing$ 時, $\sigma_{I'}=\varepsilon$. 又令

$$(1)''\qquad \sigma_j'=(b_1^{(j)},\cdots,b_{k_j}^{(j)}),\quad j\in J,$$

特別在 $K_j=\varnothing$ 時, $\sigma_j'=\varepsilon$. 於是

$$\sigma_j=\sigma_I\circ\sigma_j',\quad j\in J.$$

假定對於每一 $j\in J$ 有一 $I_j\subset I$ 和一 $K_j'\subset K_j$ 而 $I_1\cap\cdots\cap I_n=\varnothing$ 且對於任一 $j\in J$, I_j 與 K_j' 不同時爲$\varnothing$, 則 (有次序的) 集合組 $(I_1,\cdots,I_n;K_1',\cdots,K_n')$ 將稱爲一個"分組." 對於每一分組 $(I_1,\cdots,I_n;K_1',\cdots,K_n')$ 在 R^{mn} 中有一凸胞腔

$$(2)\qquad \xi=(\sigma_{I_1}\circ\sigma'_{K_1'})\times\cdots\times(\sigma_{I_n}\circ\sigma'_{K_n'})\quad(\subset\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n).$$

所有這些胞腔ξ顯然成一複合形E. 又令 $\delta_{I'}(I'\subset I, I'\neq\varnothing)$ 表一切作 $(x_1,\cdots,x_n)$ 形狀而 $x_1=\cdots=x_n\in\sigma_{I'}$, 的點所成的凸胞腔, 則所有 $\delta_{I'}$ 顯然組成一 δ_I 的複合形 D. 我們有

預備定理 1. 對於每一作 (2) 形狀的 ξ 以及每一 $\subset I$ 而 $\neq\varnothing$ 的 I', $\delta_{I'}\circ\xi$ 有意義, 因而 D 和 E 的聯合複合形 $F=D\circ E$ 有定義且是 $\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$ 的一個剖分.

證. 很容易知道我們祇須證明下面的三點即可:

1°. 對於每一 $\bar{D}$ 的點 x 和 $\bar{E}$ 的點 y, 以及任一 $\geqq 0$ 且 $\leqq 1$ 的實數 t, $(1-t)x+ty\in\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$.

因爲 $\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$ 是一個凸集, 故 1° 甚顯然.

2°. 對於每一在 $\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$ 內的點 z, 必可找到一點 $x\in\bar{D}$ 和一點 $y\in\bar{E}$ 以及一數 $t\geqq 0$ 且 $\leqq 1$, 使 $z=(1-t)x+ty$.

3°. 對於在 $\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$ 內但不在 $\bar{D}$ 或 $\bar{E}$ 內的點 z, 2° 中所說的 x, y 和 t 乃是唯一地決定的, 且 $0<t<1$.

茲先證明 2°.

假定所與的點是

(3) $$z=(z_1,\cdots,z_n)\in\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n,$$

此處對於每一 $j\in J$, z_j 依重心坐標的表示是:

(3)′ $$z_j=\sum_{i\in I}\alpha_i^{(j)}a_i+\sum_{k\in K_j}\beta_k^{(j)}b_k^{(j)}\in\sigma_j,$$

(4) $$\begin{cases}\sum_{i\in I}\alpha_i^{(j)}+\sum_{k\in K_j}\beta_k^{(j)}=1,\\ 1\geqq\alpha_i^{(j)},\beta_k^{(j)}\geqq 0,\quad i\in I,k\in K_j.\end{cases}$$

令 (5) $$\alpha_i^*=\min_{j\in J}\alpha_i^{(j)},$$

並如下定義 $I_j\subset I$ $(j\in J)$:

(6) $$\begin{cases}i\in I_j \text{ 與 } \alpha_i^{(j)}>\alpha_i^* \quad \text{同義},\\ i \text{ 不} \in I_j \text{ 與 } \alpha_i^{(j)}=\alpha_i^* \text{ 同義}.\end{cases}$$

則 (7) $$I_1\cap\cdots\cap I_n=\varnothing.$$

對於任兩指數 $j,l\in J$, 有

$$\sum_{i\in I}\alpha_i^{(j)}+\sum_{k\in K_j}\beta_k^{(j)}=\sum_{i\in I}\alpha_i^{(l)}+\sum_{k\in K_l}\beta_k^{(l)}\quad(=1),$$

從此可得

$$\sum_{i\in I_j}(\alpha_i^{(j)}-\alpha_i^*)+\sum_{k\in K_j}\beta_k^{(j)}=\sum_{i\in I_l}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i^*)+\sum_{k\in I_l}\beta_k^{(l)}$$

今以 t 表這個與 $j\in J$ 無關的公共值:

(8) $$t=\sum_{i\in I_j}(\alpha_i^{(j)}-\alpha_i^*)+\sum_{k\in K_j}\beta_k^{(j)},\quad j\in J.$$

由 (4), 得

(9) $$0\leqq t\leqq 1.$$

情形一. $t=0.$

$t=0$ 成立的充要條件是:

$$I_j=\varnothing, j\in J;\qquad \beta_k^{(j)}=0, j\in J, k\in K_j.$$

從前者得

$$\alpha_i^{(j)}=\alpha_i^*,\qquad i\in I, j\in J$$

故
$$z_1 = \cdots = z_n = \sum_{i\in I} \alpha_i^* a_i \in \sigma_I = (a_0 \cdots a_r),$$
$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \overline{D},$$
因之 2° 成立.

情形二.
$$t = 1.$$

比較 (4) 與 (8), 可知 $t = 1$ 的充要條件是:
$$\alpha_i^{(j)} = \begin{cases} 0, & i \text{ 不} \in I_j, \\ a_i^{(j)} - \alpha_i^*, & i \in I_j. \end{cases}$$
這時 z_j 變爲
$$z_j = \sum_{i\in I_j} (\alpha_i^{(j)} - \alpha_i^*) a_i + \sum_{k\in K_j} \beta_k^{(j)} b_k^{(j)} \in \sigma_{I_j} \circ \sigma_j', \quad j \in J,$$

且由此可知 I_j, K_j 不能同時爲 $\varnothing$ 而 $(I_1, \cdots, I_n; K_1, \cdots, K_n)$ 爲一分組. 故
$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in (\sigma_{I_1} \circ \sigma_1') \times \cdots \times (\sigma_{I_n} \circ \sigma_n') \subset \overline{E},$$
而 2° 成立.

情形三.
$$0 < t < 1.$$

這時可用以下各式定義 $\lambda_i^{(j)}, \mu_k^{(j)}, \delta_i$:

$(10)_1$
$$t\,\lambda_i^{(j)} = \alpha_i^{(j)} - \alpha_i^*, \qquad i \in I_j, j \in J;$$
$(10)_2$
$$t\,\mu_k^{(j)} = \beta_k^{(j)}, \qquad k \in K_j, j \in J;$$
$(10)_3$
$$(1-t)\,\delta_i = \alpha_i^*, \qquad i \in I.$$
由此可知

$(11)_1$
$$0 \leqq \mu_k^{(j)}, \delta_i, \qquad i \in I, j \in J, k \in K_j.$$
$(11)_2$
$$\lambda_i^{(j)} > 0, \qquad i \in I_j, i \in J.$$
又由 (8) 與 $(10)_1$—$(10)_3$, 得
$$t = \sum_{i\in I_j} (\alpha_i^{(j)} - \alpha_i^*) + \sum_{k\in K_j} \beta_k^{(j)} = t \sum_{i\in I_j} \lambda_i^{(j)} + t \sum_{k\in K_j} \mu_k^{(j)}, \quad j \in J,$$

故 (12)
$$\sum_{i\in I_j} \lambda_i^{(j)} + \sum_{k\in K_j} \mu_k^{(j)} = 1, \quad j \in J.$$

$(11)_3$
$$\lambda_i^{(j)}, \mu_k^{(j)} \leqq 1, \quad j \in J, k \in K_j$$

特別 (12) 式說明 $I_j, K_j\,(j \in J)$ 不能同時爲 $\varnothing$ 而由 (7), $(I_1, \cdots, I_n; K_1, \cdots, K_n)$ 是一分組. 由 (11), (12) 又知

(13) $$y_j = \sum_{i\in I_j} \lambda_i^{(j)} a_i + \sum_{k\in K_j} \mu_k^{(j)} b_k^{(j)} \in \sigma_{I_j} \circ \sigma_j', \quad j \in J,$$

(13)′ $$y = (y_1, \cdots, y_n) \in (\sigma_{I_1} \circ \sigma_1') \times \cdots \times (\sigma_{I_n} \circ \sigma_n') \subset \overline{E}.$$

由 $(10)_1, (10)_3, (6)$,

(14) $$\begin{cases} t\lambda_i^{(j)} + (1-t)\delta_i = \alpha_i^{(j)}, & i \in I_j, \quad j \in J \\ (1-t)\delta_i = \alpha_i^{(j)}, & i \text{ 不} \in I_j, \quad j \in J. \end{cases}$$

將 (14) 各式相加, 並由 (4), $(10)_2$ 及 (12), 對於 $j \in J$, 得

$$\begin{aligned}(1-t)\sum_{i\in I} \delta_i &= \sum_{i\in I} \alpha_i^{(j)} - t\sum_{i\in I_j} \lambda_i^{(j)} \\ &= 1 - \sum_{k\in K_j} \beta_k^{(j)} - t\sum_{i\in I_j} \lambda_i^{(j)} \\ &= 1 - t\sum_{k\in K_j} \mu_k^{(j)} - t\sum_{i\in I_j} \lambda_i^{(j)} \\ &= 1 - t,\end{aligned}$$

因之

(15) $$\sum_{i\in I} \delta_i = 1,$$

$(11)_4$ $$\delta_i \leqq 1, \qquad i \in I,$$

(16) $$x_j = \sum_{i\in I} \delta_i a_i \in (a_0 \cdots a_r),$$

(16)′ $$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \overline{D}.$$

由 (3), (3)′, $(10)_2$, (13), (13)′, (14), (16), (16)′ 諸式, 得

(17) $$z = (1-t)x + ty,$$

此處 $x \in \overline{D}, y \in \overline{E}, 0 < t < 1$, 因之 2° 成立.

由情形一至三, 2° 已完全證明. 今證 3° 如次:

假定 z 如 (3), 3)′ 及 (4) 所示而可表成形狀 (17), 其中 $x \in \overline{D}$ 由 (16) 與 (16)′ 所定, 而 $y \in \overline{E}$ 則由 (13), (13)′ 所定. 我們並假定 z 不 $\in \overline{D}$ 也不 $\in \overline{E}$, 因而 $0<t<1$. 此外 $\mu_k^{(j)}, \delta_i$ 等滿足 $(11)_1, (11)_3, (11)_4, (12), (15)$ 等式, 且可假定 $(11)_2$ 也成立, 而無損於一般性, 因為若有不滿足於 $(11)_2$ 的 $\lambda_i^{(j)}$, 我們可把使 $\lambda_i^{(j)} = 0$ 的 i 從 I_j 中取

消，如果這種縮小的 $I_j(j \in J)$ 仍用 I_j 來表示，那麼 $(I_1, \cdots, I_n, K_1, \cdots, K_n)$ 仍是一個分組．這時，(7) 式成立．

對於每一 $i \in I$，用 (5) 式來定義 α_i^*．由 (17) 可得 (14)．若 $i \in I$ 已定，那麼由於 (7) 式，將至少有一個 $j \in J$ 使 i 不 $\in I_j$，而對於任意這樣的 j 由 (14) 可得

$$(18) \qquad (1-t)\,\delta_i = \alpha_i^{(j)}, \qquad i \text{ 不} \in I_j.$$

另外由 (14) 與 $(11)_2$ 又有

$$(19) \qquad (1-t)\,\delta_i < \alpha_i^{(j)}, \qquad i \in I_j.$$

因之

$$(20) \qquad (1-t)\,\delta_i = \min_{j \in J} \alpha_i^{(j)} = \alpha_i^*; \qquad j \in I,$$

而 (18), (19) 變爲

$$(21) \qquad \alpha_i^{(j)} \begin{cases} > \alpha_i^*, & i \in I_j, \\ = \alpha_i^*, & i \text{ 不} \in I_j. \end{cases}$$

(21) 式說明 $I_j, j \in J$ 乃是由所與的點 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 所唯一地決定的．

由 (14), (20) 可得 $(10)_1, (10)_3$．由 (13), (13)′, (16), (16)′ 和 (17) 可得 $(10)_2$．又由 $(10)_1, (10)_2$ 和 (12) 可得 (8)，而 (8) 式說明 t 也是由所與的點 z 所唯一地決定的．而由 (10), (13), (13)′, (16), (16)′ 諸式，$x \in \bar{D}$, $y \in \bar{E}$ 也由 z 所完全決定．

因此，形狀如 (17) 的分解乃是唯一的，而 3° 得證．這樣，預備定理 1 已完全證明．

預備定理 2. $\bar{K}'$ 有一剖分 K，以對角複合形 L 爲一子複合形．

證．令 $K_1'^{(+)}$ 是 K' 中一切作 $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ 形狀的凸胞腔所成的複合形，此處 $\sigma_j \in L, (j = 1, \cdots, n)$，而 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 無公共頂點．另一面，對於 L 中具有公共頂點的任意 n 個（依照一定次序的）單純形 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$，可依預備定理 1 作一 $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ 的剖分 $F = D \circ E$，記之爲 $F(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$，$D$ 和 E 也各記之爲 $D(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 和 $E(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$．要證明預備定理 2，祇須證明 $K_1'^{(+)}$ 與所有的 $F(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 合成爲一個 $\bar{K}'$ 的剖分即可．

首先，對於一組有公共頂點的 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n \in L$ 所作成的 $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ 的剖分 $F = D \circ E$，與 $K_1'^{(+)}$ 的公共部份，就是屬於 E 的那些凸胞腔，而且 $\bar{E} = \bar{K}_1'^{(+)} \cap (\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n)$．

其次，假定 $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n \in K'$ 而 σ_j 如 (1) 所示，又 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n \in K'$ 而

$$\tau_j = (c_0 \cdots c_s d_1^{(j)} \cdots d_{l_j}^{(j)}), \qquad i \in J,$$

$$\tau_1 \cap \cdots \cap \tau_n = (c_0 \cdots c_s)$$

此處 $s \geqq 0$, 則 $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n$ 與 $\tau_1 \times \cdots \times \tau_n$ 有不屬於 $\bar{K}_1^{(+)}$ 的公共點的充要條件乃是 $(a_0 \cdots a_r)$ 與 $(c_0 \cdots c_s)$ 須有公共的點. 設 $(a_0 \cdots a_r)$ 與 $(c_0 \cdots c_s)$ 的公共邊爲 $(e_0 \cdots e_t)$, $t \geqq 0$, 而 σ_j 與 τ_j 的公共邊爲

$$\zeta_j = (e_0 \cdots e_t f_1^{(j)} \cdots f_{m_j}^{(j)}), \qquad j \in J.$$

那麼 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$ 的公共頂點就是 $e_0, \cdots, e_t$, 而

$$(\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_n) \cap (\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) = (\sigma_1 \cap \tau_1) \times \cdots \times (\sigma_n \cap \tau_n) = \zeta_1 \times \cdots \times \zeta_n,$$

我們在下面將證明 $F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 的每一胞腔, 必同時也是 $F(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 和 $F(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的胞腔 反之亦然, 即 $F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 是複合形 $F(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 與 $F(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的交. 爲這個目的, 假定 $(I_1', \cdots, I_n'; M_1', \cdots, M_n')$ 是對於 $I' = \{0, 1, \cdots, t\}$ 以及 $M_j = \{1, \cdots, m_j\}$ 所作的一個分組 $\zeta_j' = (f_1^{(j)} \cdots f_{m_j}^{(j)})$, 而

$$\zeta = (\zeta_{I_1'} \circ \zeta'_{M_1'}) \times \cdots \times (\zeta_{I_n'} \circ \zeta'_{M_n'}), \qquad (I_j' \subset I', M_j' \subset M_j)$$

是一個像 (2) 那樣的 $E(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 中的一個胞腔. 對於每一 $j \in J$, $\zeta_{I_j'} \circ \zeta'_{M_j'}$ 必作 $\sigma_{I_j} \circ \sigma'_{K_j'}$ 的形狀, 此處 $K_j' \subset K_j$, $I_j \subset I$, I, K_j 等依 (1) 那樣定義. 如果有一個 $i \in I_1 \cap \cdots \cap I_n$, 那麼 a_i 將是每一 $\zeta_{I_j'} \circ \zeta_j'$ 的頂點, 因而也是每一 $\zeta_{I_j'}$ 的頂點. 由 $(I_1', \cdots, I_n'; M_1', \cdots, M_n')$ 是對於 I' 和 $M_j (i \in J)$ 的分組的假定, 這不可能. 因此 $I_1 \cap \cdots \cap I_n = \varnothing$, 而對於每一 j, 因 I_j', M_j' 不同時爲 $\varnothing$, 故 I_j, K_j' 也不能同時爲 $\varnothing$, 由此知 $(I_1, \cdots, I_n; K_1', \cdots, K_n')$ 是對於 I 和 $K_j (j \in J)$ 的一個分組, 而 $\xi = (\sigma_{I_1} \circ \sigma'_{K_1'}) \times \cdots \times (\sigma_{I_n} \circ \sigma'_{M_n'})$ 乃是 $E(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 的一個胞腔. 這樣, 每個 $E(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 的胞腔也是 $E(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 的胞腔, 同樣也是 $E(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的胞腔, 顯然 $D(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 的胞腔必同時是 $D(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 和 $D(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的胞腔. 因此 $F(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) = D(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \circ E(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 的胞腔也必然同時是 $F(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = D(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \circ E(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 和 $F(\tau_1, \cdots, \tau_n) = D(\tau_1, \cdots, \tau_n) \circ E(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 的胞腔. 它的反面也容易看出. 這證明了上面所說的話.

從上面所說的兩點, 就得到了預備定理 2.

今如定理 2 設 P 是一個有限可剖分空間, τL 是 P 的一個單純剖分, $Q = P^n$ 而 $K' = L^n$. 定義 $\tau : \bar{K}' \to Q$ 如 $\tau(z_1, \cdots, z_n) = (\tau z_1, \cdots, \tau z_n)$, $z_j \in \bar{L}$. 從預備定理 2 中所說到的剖分 K 的定義, 顯然 K 和它的子複合形 L 成一個正則的複合形偶 而 $(\tau K, \tau L)$ 爲 (Q, P) 的一個正則剖分, 因此我們得到了定理 4. 剖分 τK (或 K) 以後將稱爲 $Q = P^n$ 的一個"標準剖分".

今設 G_n 是 n 個整數 $1,\cdots,n$ 上的置換群，對於每一 $\omega\in G_n$, $(z_1,\cdots,z_n)\to(z_{\omega(1)},\cdots,z_{\omega(n)})$, $z_j\in P$, 定義了一個 $Q=P^n$ 的拓撲變換 g_ω, 而且 g_ω 也引起了一個變換（仍記以 g_ω）把標準剖分 K 的胞腔變爲 K 的胞腔. 因之，對於 G_n 的任一子群 Γ, Q 有一個"法空間" Q_Γ,（即把 Q 中凡可用 Γ 的元素互相變換而得的點叠合成一點所得到的空間），K 也有一個"法複合形" K_Γ,（即把 K 中凡可用 Γ 的元素所引起的胞腔變換互相變換而得的胞腔叠合成一個胞腔所得到的複合形），而且 $\tau:\overline{K}\to Q$ 引起了一個拓撲映像 $\tau_\Gamma:\overline{K}_\Gamma\to Q_\Gamma$ 使 $\tau_\Gamma K_\Gamma$ 是 Q_Γ 的一個剖分. 在自然地定義的投影 $\pi:Q\to Q_\Gamma$（或 $K\to K_\Gamma$）之下，Q（或 K）的對角空間 P（或對角複合形 L）被投影而爲一個與 P（或 L）同拓（或同構）的子空間（或子複合形），茲仍記之爲 P（或 L）. 那麼定理 4 可作下列補充.

定理 4′. 對於任一 G_n 的子群 Γ, (Q_Γ,P) 是一個正則的可剖分空間，以 $(\tau_\Gamma K_\Gamma,\tau L)$ 爲一正則剖分，此處 $\tau_\Gamma:\overline{K}_\Gamma\to Q_\Gamma$ 定義如 $\tau_\Gamma\pi(z_1,\cdots,z_n)=(\tau z_1,\cdots,\tau z_n)$, 式中 π 爲 $\tau\overline{K}\to\tau_\Gamma\overline{K}_\Gamma$ 即 $Q\to Q_\Gamma$ 的投影.

在 $\Gamma=1$ 時，τ_Γ 將簡記爲 τ, 此處 $\tau:\overline{K}\to Q$ 定義如 $\tau(z_1,\cdots,z_n)=(z_1,\cdots,z_n)$, $z_j\in\overline{L}$.

根據 §4, 從 (Q_Γ,P) 所作的空間組 $(Q_\Gamma,\tau_\Gamma\overline{K}^{(+)}_{\Gamma,r},\tau_\Gamma\overline{K}^{(-)}_{\Gamma,r},\tau_\Gamma\overline{K}^{(0)}_{\Gamma,r},P)$, $(0<r<1)$, 的任一同倫不變量. 一定是 (Q_Γ,P) 的拓撲不變量. 因之也就是 P 的拓撲不變量. 下面的簡單的例，可以説明這種拓撲不變量，一般並非是同倫的不變量.

例：設 L 是一個一維單純複合形，有四個頂點 o,a,b,c, 三個一維胞腔 (oa), (ob) 和 (oc). 取 $n=2$, K 是 $K'=L^2=L\times L$ 的標準剖分，則對於正則複合形偶 (K,L) 而言，$K^{(+)}_1$ 是一個一維的複合形，有頂點 12, 一維胞腔 12. $K^{(+)}_1$ 的一維下同調群是一個無限的循環群. 下面的下閉鍊所定的下同調類作成這個一維同調群的一個母素（一維胞腔都已定向如記號所示）：

$$
\begin{aligned}
z=&a\times(bo)+a\times(oc)+b\times(co)+b\times(oa)+c\times(ao)+c\times(ob)\\
&+(bo)\times a+(oc)\times a+(co)\times b+(oa)\times b+(ao)\times c+(ob)\times c.
\end{aligned}
$$

其次. 假定 L 是一個一維的單純複合形，由一個一維單純形和它的兩個頂點所成. 取 $n=2$, K 是 $K'=L^2=L\times L$ 的標準剖分. 對於正則複合形偶 (K,L) 而言，$K^{(+)}_1$ 是一個 o 維的複合形，有頂點 2, 而 $K^{(+)}_1$ 的一維下同調群顯然是 o.

由此可見上面的兩個可剖分空間 $\overline{L}$ 雖有同樣的同倫型，甚至都可收縮成一個點，兩個 $\overline{K}_1^{(+)}$ 的一維同調群並不一一同構.

但據本節以及 §4 所論，若 L 是一個單純複合形，K 是 $L^2=L\times L$ 的標準剖分，則 $\overline{K}_1^{(+)}$ 的一切同倫不變量特別如下同調群乃是可剖分空間 $\overline{L}$ 的拓撲不變量. 上面的例說明，這樣的拓撲不變量通常並非同倫不變量.

§6. 可剖分空間的 n 乘 Euler-Poincaré 示性數

假定 P 是一個可剖分空間，整數 $n\geqq 1$ 而 $Q=P^n$. τL 是 P 的一個單純剖分，則由 §5, Q 有一個標準剖分 τK，以 τL 爲子複合形而 $\tau L\Subset \tau K$，此處 $\tau:\overline{K}\to Q$ 定義如 $\tau(z_1,\cdots,z_n)=(\tau z_1,\cdots,\tau z_n), z_j\in\overline{L}$. 對於任一 >0 且 <1 的 r，從正則可剖分空間偶 (Q,P) 所得出的空間 $\tau\overline{K}_r^{(+)},\tau\overline{K}_r^{(-)},\tau\overline{K}_r^{(0)}$ 的 Euler-Poincaré 示性數（以下簡稱示性數）都是 (Q,P) 因之也是 P 的拓撲不變量，我們將它們依次叫做 P 的"n 乘 Euler-Poincaré 外，內和中示性數"，或簡稱 P 的"n 乘外，內和中示性數"，並記之爲 $\chi_n^{(+)}(P),\chi_n^{(-)}(P)$ 和 $\chi_n^{(0)}(P)$. 本節的目的，在獲得一些計算這些不變量的約化公式.

首先，$\tau\overline{K}_r^{(-)}$ 以 $\tau\overline{L}$ 爲它的一個變狀收縮核，因之 $\tau\overline{K}_r^{(-)}$ 和 $\tau\overline{L}$ 即 P 的示性數相同，即

(I) $$\chi_n^{(-)}(P)=\chi(P),$$

此處 χ 表 Euler-Poincaré 示性數.

其次，由 §2 的 (1),(2),(2)′ 諸式，可得

$$\chi(\tau\overline{K}_r^{(+)})+\chi(\tau\overline{K}_r^{(-)})-\chi(\tau\overline{K}_r^{(0)})=\chi(\tau\overline{K}).$$

因 $\tau\overline{K}=Q=P^n, \chi(\tau\overline{K})=\chi(P^n)=[\chi(P)]^n$，故上式可由 (I) 書爲

(II) $$\chi_n^{(+)}(P)-\chi_n^{(0)}(P)=[\chi(P)]^n-\chi(P).$$

爲了求得 $\chi_n^{(+)}(P)$ 和 $\chi_n^{(0)}(P)$ 的約化公式，我們先定義任意一個單純複合形 L 以及它的擴大複合形 L_e 的 n 乘外示性數如次：首先，我們將定義 $\chi_n^{(+)}(L)$ 爲 $\chi_n^{(+)}(\overline{L})$. 如前令 K 爲 L^n 的標準剖分，$\overline{K}_r^{(+)},\overline{K}_r^{(-)},\overline{K}_r^{(0)}$ 也像前面那樣定義. 因爲 $\overline{K}_r^{(+)}$ $(0<r<1)$ 以 $\overline{K}_1^{(+)}$ 爲它的一個變狀收縮核，故 $\chi_n^{(+)}(L)=\chi_n^{(+)}(\overline{L})=\chi(\overline{K}_r^{(+)})$ $=\chi(\overline{K}_1^{(+)})$. 由 §5，複合形 $K_1^{(+)}$ 係由一切作 $\sigma_1\times\cdots\times\sigma_n$ 形狀的胞腔所組成，此處 $\sigma_j\in L$，而 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 無公共頂點. 因此，$\chi_n^{(+)}(L)$ 也可以用下面的方法來定

義它. 命一切 L (或 L_ε) 中 n 個單純形 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 所成的(有次序的)組的集合爲 $\mathfrak{N}(L)$ (或 $\mathfrak{N}(L_\varepsilon)$). 在 $\mathfrak{N}(L)$ (或 $\mathfrak{N}(L_\varepsilon)$) 中使 $\dim\sigma_1+\cdots+\dim\sigma_n=i$ 的組 $(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的子集記爲 $\mathfrak{N}_i(L)$, (或 $\mathfrak{N}_i(L_\varepsilon)$), 在 $\mathfrak{N}_i(L)$ (或 $\mathfrak{N}_i(L_\varepsilon)$) 中一切使 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 無公共頂點的那些組 $(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的個數爲 $h_{n,i}(L)$, (或 $h_{n,i}(L_\varepsilon)$), 那麼 $\chi_n^{(+)}(L)$ 顯然可定義爲

$$\chi_n^{(+)}(L)=\sum_{i\geqq 0}(-1)^i h_{n,i}(L). \tag{1}$$

同樣, 我們用類似的方法來定義 $\chi_n^{(+)}(L_\varepsilon)$, 即

$$\chi_n^{(+)}(L_\varepsilon)=\sum_{i\geqq -n}(-1)^i h_{n,i}(L_\varepsilon), \tag{2}$$

對於任意單純複合形 L, 有

$$\chi_n^{(+)}(L_\varepsilon)=\chi_n^{(+)}(L)+[\chi(L)-1]^n-[\chi(L)]^n. \tag{III}$$

證. 命 $\mathfrak{N}_i(L)$ 中的個數爲 $h'_{n,i}(L)$. 則 $\mathfrak{N}_i(L_\varepsilon)$ 中使 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 無公共頂點且其中恰有 j 個爲 ε 的組 $(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的個數顯然在 $j\geqq 1$ 時爲 $\binom{n}{j}h'_{n-j,i+j}(L)$, 在 $j=0$ 時爲 $h_{n,i}(L)$. 因之,

$$h_{n,i}(L_\varepsilon)=h_{n,i}(L)+\sum_{j\geqq 1}\binom{n}{j}h'_{n-j,i+j}(L). \tag{3}$$

由 (1), (2) 及 (3), 得

$$\begin{aligned}
\chi_n^{(+)}(L_\varepsilon)&=\sum_{i\geqq 0}(-1)^i h_{n,i}(L)+\sum_{j\geqq 1}\Big[(-1)^j\binom{n}{j}\sum_{i\geqq -n}(-1)^{i+j}h'_{n-j,i+j}(L)\Big]\\
&=\chi_n^{(+)}(L)+\sum_{j\geqq 1}\Big[(-1)^j\binom{n}{j}\sum_{i\geqq 0}(-1)^i h'_{n-j,i}(L)\Big]\\
&=\chi_n^{(+)}(L)+\sum_{j\geqq 1}(-1)^j\binom{n}{j}\chi(L^{n-j})\\
&=\chi_n^{(+)}(L)+\sum_{j\geqq 1}(-1)^j\binom{n}{j}[\chi(L)]^{n-j}\\
&=\chi_n^{(+)}(L)+[\chi(L)-1]^n-[\chi(L)]^n,
\end{aligned}$$

即 (III) 式.

今設 P, $Q=P^n$, 以及 $_TK$, $_TL$ 等如本節開首所示. 對於 L 中的每一單純形

σ, 命 L_σ 係由 L 中所有這樣的單純形 σ' 所組成的子複合形, σ' 與 σ 無公共頂點, 但 $\sigma\circ\sigma'$ 有意義且 $\in L$. 我們又以 $L_{\sigma\varepsilon}$ 表 L_σ 被擴大了的複合形, 則有[1]

$$\text{(IV)}\qquad \chi_n^{(+)}(P)=[\chi(P)]^n-\sum_{\sigma\in L}(-1)^{n(\dim\sigma+1)}\chi_n^{(+)}(L_{\sigma\varepsilon}),$$

$$\text{(V)}\qquad \chi_n^{(0)}(P)=\chi(P)-\sum_{\sigma\in L}(-1)^{n(\dim\sigma+1)}\chi_n^{(+)}(L_{\sigma\varepsilon}).$$

證. 由 (II) 式, 我們祇須證明 (IV) 式卽可.

顯然, 在 $\mathfrak{N}_i(L)$ 中使 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 恰有一個 r 維的、邊 σ 公共的一切組 $(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的個數是 $h_{n,i-n(r+1)}(L_{\sigma\varepsilon})$. 因之 L^n 中 i 維胞腔的個數是

$$h_{n,i}(L)+\sum_{\sigma\in L}h_{n,i-n(\dim\sigma+1)}(L_{\sigma\varepsilon}),$$

故
$$\chi(L^n)=\sum_{i\geqq 0}(-1)^i h_{n,i}(L)+\sum_{\sigma\in L}\sum_{i\geqq 0}(-1)^i h_{n,i-n(\dim\sigma+1)}(L_{\sigma\varepsilon})$$

或
$$[\chi(L)]^n=\chi_n^{(+)}(L)+\sum_{\sigma\in L}(-1)^{n(\dim\sigma+1)}\sum_{i\geqq -n}(-1)^i h_{n,i}(L_{\sigma\varepsilon}),$$

由 (2), 上式卽爲 (IV) 式.

在 (IV), (V) 中出現的 $\chi_n^{(+)}(L_{\sigma\varepsilon})$ 可由 (III) 式化爲 $\chi_n^{(+)}(L_\sigma)$ 去求, 而 L_σ 的維數顯較原來的 L 的維數爲低, 因之 (IV), (V) 可視爲一組求 $\chi_n^{(+)}(P)$ 和 $\chi_n^{(0)}(P)$ 的約化公式. 下節中將舉例說明這些公式的用法.

§7. 雜 例

例一. 一維複合形.

假定 L 是一個一維的單純複合形, 它的一維單純形的個數是 α', 恰爲 p 個一維單純形之端的頂點 (以下簡稱 p 枝點) 的個數是 $\alpha_p^0\ (p\geqq 0)$. 今求 $\chi_n^{(+)}(\bar{L})$ 與 $\chi_n^{(0)}(\bar{L})$ 如次:

對於每一一維的單純形 σ, $L_{\sigma\varepsilon}$ 祇有一個胞腔, 即 ε, 故 $\chi_n^{(+)}(L_{\sigma\varepsilon})=(-1)^n$.

對於每一 $p\geqq 1$ 的 p 枝點 σ, L_σ 係由 p 個孤立的點所組成, 因之 $\chi(L_\sigma)=p$, $\chi_n^{(+)}(L_\sigma)=p^n-p$, 而由 §6 (III),

1) 若 σ 不是 L 中任一維數更高的單純形的邊, 即 L_σ 不存在時, $L_{\sigma\varepsilon}$ 指祇含有一個 -1 維單純形 ε 的複合形.

$$\chi_n^{(+)}(L_{\sigma\varepsilon}) = \chi_n^{(+)}(L_\sigma) + [\chi(L_\sigma) - 1]^n - [\chi(L_\sigma)]^n = (p^n - p) + (p-1)^n - p^n,$$

或
$$\chi_n^{(+)}(L_{\sigma\varepsilon}) = (p-1)^n - p.$$

此式在 $p=0$ 時(亦即 σ 是 L 中孤立的頂點時)也顯然成立.

應用 §6 (V), 得

$$\chi_n^{(0)}(\bar{L}) = \chi(\bar{L}) - \sum_{p\geqq 0}(-1)^n[(p-1)^n - p]\alpha_p^0 - (-1)^n\alpha^1.$$

因 $\chi(\bar{L}) = -\alpha^1 + \sum_{p\geqq 0}\alpha_p^0$, 故上式亦可改書爲

$$\chi_n^{(0)}(\bar{L}) = [1+(-1)^n]\chi(\bar{L}) + (-1)^{n+1}\sum_{p\neq 2}(p-1)[(p-1)^{n-1} - 1]\alpha_p^0, \tag{1}$$

又由 §6 (IV) 或 (II) 得

$$\chi_n^{(+)}(\bar{L}) = [\chi(\bar{L})]^n + (-1)^n\chi(\bar{L}) + (-1)^{n+1}\sum_{p\neq 2}(p-1)[(p-1)^{n-1} - 1]\alpha_p^0. \tag{2}$$

根據 [3], 第五章, 在 $p\neq 2$ 時, α_p^0 都是 $\bar{L}$ 的拓撲不變量. (1), (2) 兩式說明一個一維可剖分空間的任一乘示性數, 可由它的示性數以及它的一切 $p\neq 2$ 和 1 的不變量 α_p^0 所完全決定. 反過來, 我們也可以證明任一 $p\neq 2$ 和 1 的不變量 α_p^0, 係由一切 n 乘中(或外)示性數和示性數及 α_1^0 所完全決定. 證之如下:

設 L 和 L' 是兩個一維單純複合形, 有相同的示性數, 相同的 1 枝點的個數, 而所有的 n 乘示性數也相同. 假定有一整數 $q>2$ 使 $p>q$ 時 $\alpha_p^0(\bar{L}) = \alpha_p^0(\bar{L}')$ 而 $\alpha_q^0(\bar{L}) > \alpha_q^0(\bar{L}') \geqq 0$, 因爲在 $p<q$ 時, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p-1}{q-1}\right)^n = 0$, 故可取 n 充分大使

$$\left|\sum_{2\neq p<q}(p-1)[(p-1)^{n-1} - 1][\alpha_p^0(\bar{L}) - \alpha_p^0(\bar{L}')]\right| < |(q-1)[(q-1)^{n-1} - 1][\alpha_q^0(\bar{L}) - \alpha_q^0(\bar{L}')]|.$$

因爲我們已假定 $\chi(\bar{L}) = \chi(\bar{L}')$, 故對於這樣的 n, 據 (1) 式及 (2) 式將有 $\chi_n^{(0)}(\bar{L}) \neq \chi_n^{(0)}(\bar{L}')$ 及 $\chi_n^{(+)}(\bar{L}) \neq \chi_n^{(+)}(\bar{L}')$, 與假設相反. 因之對於每一 $p>2$, 應有 $\alpha_p^0(\bar{L}) = \alpha_p^0(\bar{L}')$, 再從 (1) 和 (2) 又可得 $\alpha_0^0(\bar{L}) = \alpha_0^0(\bar{L}')$ 而證明完畢.

以上的結果說明一切 $p\neq 2$ 的不變量 α_p^0 以及示性數 χ 的集合與一切 $n>1$ 的 $\chi_n^{(+)}$ (或 $\chi_n^{(0)}$) 及 χ 與 α_1^0 等不變量所組成的集合"同值". 在這方面可參看 §8 末所舉的例.

例二. P_m 是一個 m 維的單純形, 則

$$\chi_n^{(0)}(P_m)=\chi_n^{(+)}(P_m)=1+(-1)^{m(n+1)+1}. \tag{3}$$

證. 在 $m=0$ 時此式顯然成立, 又由例 1, 在 $m=1$ 時此式也成立. 今假定上式在 $m<r$ 時成立.

取 P_r 的一個剖分 τL, 此處 L 即由一 r 維的歐氏單純形及其邊所組成. 若 σ 爲 L 中一個 s 維的單純形 $(r\geqq s\geqq 0)$, 則 $\bar{L}_\sigma$ 爲一 $r-s-1$ 維的單純形, 由歸納假定得 $(r>s\geqq 0)$

$$\chi_n^{(+)}(L_\sigma)=\chi_n^{(+)}(\bar{L}_\sigma)=1+(-1)^{(r-s-1)(n+1)+1},$$

又由 §6 (III),

$$\chi_n^{(+)}(L_{\sigma e})=\chi_n^{(+)}(L_\sigma)+[\chi(L_\sigma)-1]^n-[\chi(L_\sigma)]^n$$
$$=(-1)^{(r-s-1)(n+1)+1}.$$

而此式不特在 $r>s\geqq 0$ 時, 即在 $s=r$ 時也顯然成立. 在 L 中 s 維單純形的個數是 $\binom{r+1}{s+1}$, 故由 §6 (V),

$$\begin{aligned}\chi_n^{(0)}(P_r)&=\chi(P_r)-\sum_{\sigma\in L}(-1)^{n(\dim\sigma+1)}\chi_n^{(+)}(L_{\sigma e})\\&=1-\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r(n+1)+s}\binom{r+1}{s+1}\\&=1+(-1)^{r(n+1)}\Big[\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\binom{r+1}{i}-1\Big]\\&=1+(-1)^{r(n+1)+1},\end{aligned}$$

又因 $\chi(P_r)=1$, 由 §6 (II),

$$\chi_n^{(+)}(P_r)=\chi_n^{(0)}(P_r).$$

故由歸納法得知 (3) 式普遍成立.

例三. P_m 是一個 m 維球面, 則

$$\chi_n^{(0)}(P_m)=0, \tag{4}$$

$$\chi_n^{(+)}(P_m)=[1+(-1)^m]^n+(-1)^{mn+1}[1+(-1)^m]. \tag{5}$$

證. 在 $m=0$ 或 1 (例 1) 時, 上兩式易見其成立. 現假定在 $m<r$ 時 (4), (5) 已成立.

取 P_r 的一個剖分 τL, 此處 L 爲一 $r+1$ 維歐氏單純形的維數 $\leqq r$ 的邊所成的複合形. 對於 L 中任一 s 維的複合形 $\sigma(r \geqq s \geqq 0)$, $\overline{L}_\sigma$ 是一個 $r-s-1$ 維的球面, 故由歸納假定 $(r > s \geqq 0)$

$$\chi_n^{(+)}(L_\sigma) = \chi_n^{(+)}(\overline{L}_\sigma) = [1+(-1)^{r-s-1}]^n + (-1)^{(r-s-1)n+1}[1+(-1)^{r-s-1}],$$

此外 $\chi(L_\sigma) = 1+(-1)^{r-s-1}$, 故由 §6(III) 得

$$\chi_n^{(+)}(L_{\sigma s}) = (-1)^{(r-s-1)n+r-s}.$$

而此式不特在 $r > s \geqq 0$ 時, 即在 $r = s$ 時也成立. 因 L 中 s 維單純形的個數是 $\binom{r+2}{s+1}$, $r \geqq s \geqq 0$, 故由 §6(V),

$$\begin{aligned}\chi_n^{(0)}(P_r) &= \chi(P_r) - \sum_{s=0}^{r}(-1)^{n(s+1)}\binom{r+2}{s+1}\cdot(-1)^{(r-s-1)n+r-s}\\ &= 1+(-1)^r + (-1)^{r(n+1)}\sum_{s=0}^{r}(-1)^{s+1}\binom{r+2}{s+1}\\ &= [1+(-1)^r][1+(-1)^{r(n+1)+1}].\end{aligned}$$

若 r 爲奇數, 則 $1+(-1)^r = 0$, 若 r 爲偶數, 則 $1+(-1)^{r(n+1)+1} = 0$, 故 $\chi_n^{(0)}(P_r)$ 恒爲 0, 而 (4) 式成立. 由 (4) 及 §6(II) 可得 (5) 式.

例四. 假定 M 是一個 m 維的閉流形, 具有單純剖分 τL 使對於 L 中任一 r 維的單純形 $\sigma(m > r \geqq 0)$, $\overline{L}_\sigma$ 是一個 $m-r-1$ 維的球面, 則

$$\chi_n^{(0)}(M) = 0, \tag{6}$$

$$\chi_n^{(+)}(M) = [\chi(M)]^n - \chi(M). \tag{7}$$

證. 設 L 中 r 維單純形的個數爲 a_r. 對於每一這樣的 r 維單純形 $\sigma, (r < m)$ $\overline{L}_\sigma$ 爲一 $m-r-1$ 維球面, 故由 §6(III) 及例 3, 得

$$\chi_n^{(+)}(L_{\sigma s}) = (-1)^{(m+r+1)(n+1)+1}$$

而此式即在 $r = m$ 也顯然眞確. 由 §6(V),

$$\begin{aligned}\chi_n^{(0)}(M) &= \chi(M) - \sum_{r=0}^{m}(-1)^{(r+1)n}\cdot(-1)^{(m+r+1)(n+1)+1}a_r\\ &= \chi(M) - (-1)^{m(n+1)}\sum_{r=0}^{m}(-1)^r a_r\\ &= \chi(M) + (-1)^{m(n+1)+1}\chi(M).\end{aligned}$$

在 m 爲單數時, $\chi(M)=0$, m 爲偶數時, $1+(-1)^{m(n+1)+1}=0$, 故 $\chi_n^{(0)}(M)$ 恒 $=0$, 而 (6) 式得證. 由 §6 (II) 及 (6) 式可得 (7) 式.

我們不難看出, (5) 式亦可書爲 $\chi_n^{(+)}(P_m)=[\chi(P_m)]^n-\chi(P_m)$, 而爲 (7) 式的特例.

§8. 古典不變量 Betti 數與新不變量的關係

在本節中, 所有下同調群的係數群是一個固定的域.

假定 P 是一個可剖分空間, $Q=P^n(n>1)$, r 是一個 >0 而 <1 的實數. 像 §5 那樣, 設 $P=_T\overline{L}$, $Q=_T\overline{K}$, 此處 K 是被 L 所定的標準剖分, (L 是 P 的單純剖分). 令 $Q_1=_T\overline{K}_r^{(+)}$, $Q_2=_T\overline{K}_r^{(-)}$, $Q_{12}=_T\overline{K}_r^{(0)}$, 此處

$$(1) \qquad Q=Q_1\cup Q_2, \qquad Q_{12}=Q_1\cap Q_2,$$

則據 §3 中所論, 空間組 (Q,Q_1,Q_2,Q_{12}) 有一組同倫不變量 $q^k(k\geqq 0)$, 因之, 照 §4 的主要定理, q^k 是 (Q,P) 也是 P 的拓樸不變量.

應用 Mayer-Vietoris 定理於 (1) 式, 得 $(q^{-1}=0)$

$$(2) \qquad p^k(Q)=p^k(Q_1)+p^k(Q_2)-p^k(Q_{12})+q^k+q^{k-1}, \qquad k\geqq 0.$$

令

$$p^k(_T\overline{K}_r^{(+)})=p_{(+)}^{k,n}, \quad p^k(_T\overline{K}_r^{(-)})=p_{(-)}^{k,n}, \quad p^k(_T\overline{K}_r^{(0)})=p_{(0)}^{k,n}, \quad p^k(P)=p^k,$$

又改書 q^k 爲 $q^{k,n}$, 則 $p_{(-)}^{k,n}=p^k$. 又由 Künneth 公式得

$$p^k(P^n)=\sum_{(k)}p^{k_1}p^{k_2}\cdots p^{k_n}, \qquad k\geqq 0,$$

此處和號 $\sum_{(k)}$ 展開在所有 $\geqq 0$ 的 (有一定次序的) 整數組 $k_1,\cdots,k_n$ 上面, 而 $k_1+\cdots+k_n=k$. 因之, (2) 式亦可書爲 $(q^{-1,n}=0)$

$$(3) \qquad \sum_{(k)}p^{k_1}p^{k_2}\cdots p^{k_n}=p_{(+)}^{k,n}+p^k-p_{(0)}^{k,n}+q^{k,n}+q^{k-1,n}, \qquad k\geqq 0.$$

今取 $n=2$, 則從上式可得

$$(4) \qquad (2p^0-1)p^k=p_{(+)}^{k,2}-p_{(0)}^{k,2}+q^{k,2}+q^{k-1,2}-\sum_{i=1}^{k-1}p^ip^{k-i}, \qquad k\geqq 0.$$

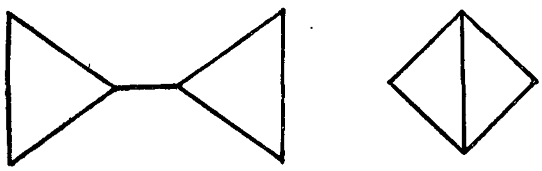
因 $2p^0-1\geqq 1$, 故由對 k 的歸納可將 p^k 用這些新不變量 $p_{(+)}^{i,2}, p_{(0)}^{i,2}$ 和 $q^{i,2}(i\geqq 0)$ 表示出來, 得

$$(5) \qquad p^k=P_k(p_{(+)}^{i,2}, p_{(0)}^{i,2}, q^{i,2}), \qquad k\geqq 0,$$

其中 P_k 在 $p^0=1$ 時是一個多項式.

從下面的例可以知道 $p^{i,n}_{(+)}, p^{i,n}_{(-)}, q^{i,n}$ 一般說來並不是 P 的同倫不變量，而 p^k 則不但是 P 的拓撲不變量，而且也是 P 的同倫不變量，因之那些新不變量不能由那些古典的不變量如 p^k 之類表示出來．因此，(3) 的意義是說，新不變量要比那些古典不變量至少是 Betti 數（係數群是任意一個域）要來得更"基本"．例如下：

令 P_1, P_2 是兩個一維的可剖分空間，如附圖所示．



(P_1)　　　　(P_2)

由直接計算，可得

$$
\begin{aligned}
p^{2,2}_{(+)}(P_1) &= 2, & p^{2,2}_{(+)}(P_2) &= 0,\\
p^{1,2}_{(+)}(P_1) &= 7, & p^{1,2}_{(+)}(P_2) &= 5,\\
p^{0,2}_{(+)}(P_1) &= 1, & p^{0,2}_{(+)}(P_2) &= 1,\\
p^{1,2}_{(0)}(P_1) &= 7, & p^{1,2}_{(0)}(P_2) &= 7,\\
p^{0,2}_{(0)}(P_1) &= 1, & p^{0,2}_{(0)}(P_2) &= 1,\\
q^{1,2}(P_1) &= 2, & q^{1,2}(P_2) &= 4.
\end{aligned}
$$

這兩個空間的 $p^{i,2}_{(+)}, p^{i,2}_{(-)}, q^{i,2}$ 等並不一致．但 P_1, P_2 有相同的一維的 Betti 數，因之有同樣的同倫型，雖然它們的拓撲型並不相同．這說明了這些新不變量都不是同倫不變量．

另一面，P_1, P_2 的三枝點數同樣是 2，而其餘的 p 枝點數 $(p \neq 2)$ 都是 0，因之僅由 p 枝點數 $(p \neq 2)$ 這些已知拓撲不變量不能區分 P_1, P_2 的拓撲型，而新不變量可能．這說明在一維可剖分空間的情形，新的不變量也要比已知的那些不變量强．（參閱 §7 例 1）．

参　考　文　獻

[1] Moise, Affine Structures in 3-manifolds, V. *Annals of Mathematics*, 1952, **56**, 96—114.

[2] Eilenberg, S., On Problems of Topology, *ibid.*, 1949, **50**, 247—260.

[3] Seifert, H., and Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie.

TOPOLOGICAL INVARIANTS OF NEW TYPE OF FINITE POLYHEDRONS

WU WEN-TSÜN

(*Institute of mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

We describe in this paper a general method of deducing from homotopy invariants of spaces or systems of spaces invariants of a finite polyhedron which are invariants of the topological type of the polyhedron but are in general not invariants of homotopy type. It is shown that the betti numbers of a finite polyhedron may be expressed in terms of such new type invariants but, as is evident, not vice versa. It follows that these new type invariants are of more fundamental character than at least those classical invariants like betti numbers.