數 學 學 報
第3卷第3期 1953年11月

論 $S^p \cup S^q$ 的同倫羣 II.*

張 素 誠
(中國科學院數學研究所)

§1. 緒 言

以 $E^{r_1}\times E^{r_2}\times E^{r_3}$ 表示三個歐氏腔胞的乘積. 那麼球 $(E^{r_1}\times E^{r_2}\times E^{r_3})^{\cdot}$ 上共分三部分, 即 $\dot{E}^{r_1}\times E^{r_2}\times E^{r_3}$, $E^{r_1}\times \dot{E}^{r_2}\times E^{r_3}$ 與 $E^{r_1}\times E^{r_2}\times \dot{E}^{r_3}$. 若 $f_i\in\alpha_i\in\pi_{r_i}(X)$, $i=1, 2, 3$, 則魏德海乘積 $[\alpha_i, \alpha_j]$ $(i, j=1, 2, 3, i\neq j)$ 退化時, 必有連續映像

$$\phi_i: E^{r_j}\times E^{r_k}\to X \quad (i, j, k=1, 2, 3)$$

存在, 使 $\phi_i|(E^{r_j}\times E^{r_k})^{\cdot}=[f_j, f_k]: (E^{r_j}\times X^{r_k})^{\cdot}\to X$. 以 $x_i\,(i=1, 2, 3)$ 表示 E^{r_i} 中一點. 定義一個連續映像 $F: (E^{r_1}\times E^{r_2}\times E^{r_3})^{\cdot}\to X$ 使

$$\begin{aligned} F(x_1\times x_2\times x_3)&=\phi_1(x_2\times x_3), \quad 當\ x_1\in \dot{E}_1^{r_1}, \\ &=\phi_2(x_1\times x_3), \quad 當\ x_2\in \dot{E}_2^{r_2}, \\ &=\phi_3(x_1\times x_2), \quad 當\ x_3\in \dot{E}_3^{r_3}. \end{aligned}$$

由 F 决定的 $\pi_{r_1+r_2+r_3-1}(X)$ 的元素, 用 $[\phi_1, \phi_2, \phi_3]$ 來表示, 這是同倫羣裏面一種新的結構.

取三個球 S^l, S^m, S^n, 使它們僅在一點 x^* 互相接觸, 構成 $S^l\cup S^m\cup S^n$. 取三個腔胞 e^{l+m}, e^{l+n}, e^{m+n}, 把它們按照魏德海乘法 $[S^l, S^m]$, $[S^l, S^n]$, $[S^m, S^n]$ 粘到 $S^l\cup S^m\cup S^n$ 上去, 造成一個空間 Y. 以 ψ^{l+m}, ψ^{l+n}, ψ^{m+n} 表示 e^{l+m}, e^{l+n}, e^{m+n} 的特徵函數. 在 §3 中將證明

定理 1. 若 + 號表示羣的直接和, 那麼

$$\pi_{l+m+n-1}(Y)=\pi_{l+m+n-1}(S^l)+\pi_{l+m+n-1}(S^m)+\pi_{l+m+n-1}(S^n)$$
$$+[\psi^{l+m}, \psi^{l+n}, \psi^{m+n}],$$

其中 $[\psi^{l+m}, \psi^{l+n}, \psi^{m+n}]$ 由一個母元素自由產生.

* 1953年6月11日收到.

在上篇中已證明準同態對應[1]

$$\varepsilon : \pi_{r+1}(S^p \times S^q,\ S^p \cup S^q) \to \pi_{r+1}(\{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q}, \{S^p \times S^q\})$$

於 $r \leqslant 2(p+q)-3$ 時，具有遮蓋性，即上式中 $\pi_{r+1}(\{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q},\ \{S^p \times S^q\})$ 的任何一個元素，都是 ε 的像．但於 $r \leqslant 2(p+q)-4$ 時，ε 爲同態對應．我們要檢查 $r=2(p+q)-3$ 時，ε 可否亦成爲同態對應．事實上我們可以證明當 $p+q=4$ 或 8 時，雖然 $r=2(p+q)-3$，但 ε 仍爲同態對應．一般 $r=2(p+q)-3$，而 $p+q$ 爲偶數時，ε 的核最多包含兩個元素．利用 §3 中關於 $[\psi^{l+m},\ \psi^{l+n},\ \psi^{m+n}]$ 的研究，還可以計算 $\pi_5(S^2 \cup S^2)$ 和 $\pi_{13}(S^p \cup S^{8-p})$．

§2. 論 $r=2(p+q)-3$ 的時候，準同態對應 ε 的性質

設 $p+q=4$ 或 8，那麼 $\pi_{2(p+q)-1}(S^{p+q})$ 中必有一元素存在，它的 Hopf 不變量[2]等於 1；以這個元素的代表爲

$$f : (S^{2(p+q)-1},\ x_0) \to (S^{p+q},\ y_0).$$

在 S^{p+q} 中取 E_1^{p+q} 與 E_2^{p+q} 爲南北兩半球．在 $\{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q}$ 中取兩個 $p+q$ 次元腔胞 e^{p+q} 與 e_1^{p+q}，以它們的特徵映像爲 $\phi_1 : E^{p+q} \to \{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q}$ 與 $\phi_2 : E^{p+q} \to \{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q}$．又取 $h_1 : (E_1^{p+q},\ \dot{E}_1^{p+q}) \to (E^{p+q},\ \dot{E}^{p+q})$，$h_2 : (E_2^{p+q}, \dot{E}_2^{p+q}) \to (E^{p+q}, \dot{E}^{p+q})$ 爲二個拓樸同態變換，使 h_1 保留序向但 h_2 改變序向，於是作一個映像

$$g : (S^{p+q},\ y_0) \to (\{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q}),$$

使 $g \mid E_1^{p+q} = \phi_1 h_1$，$g \mid E_2^{p+q} = \phi_2 h_2$．定義

$$\theta : S^{2(p+q)-1} \to \{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q},$$

使 $\theta = gf$．由此獲得 $\pi_{2(p+q)-1}(\{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q})$ 中一元素．以 x 爲 e_1^{p+q} 的內點，以 y 爲 e^{p+q} 的內點．那麼不妨假設 $\theta^{-1}x$ 和 $\theta^{-1}y$ 爲二個環 (cycle)，其間相聯係數是 1．

以 $F : E^{2(p+q)-2} \times I \to \{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q}$ 爲一連續映像，滿足下列條件：

(i) $F \mid E^{2(p+q)-2} \times 1 : E^{2(p+q)-2} \times 1 \to x_0 \in S^p \cup S^q$,

(ii) $F \mid \dot{E}^{2(p+q)-2} \times I : \dot{E}^{2(p+q)-2} \times I \to \{S^p \times S^q\}$,

(iii) $F \mid E^{2(p+q)-2} \times 0 : (E^{2(p+q)-2} \times 0,\ \dot{E}^{2(p+q)-2} \times 0) \to (S^p \times S^q,\ S^p \cup S^q)$.

---

1) 見 [1]．本文採用 [1] 中所用符號，不再說明．

2) 參考 [3] 及 [4]．

除適當的形變以外，(i) 和 (ii) 可以用下列兩條件代替：

(iv) $F|E^{2(p+q)-2}\times 1 : E^{2(p+q)-2}\times 1\to\{S^p\times S^q\}$,

(v) $F|\dot{E}^{2(p+q)-2}\times I : \dot{E}^{2(p+q)-2}\times I\to S^p\cup S^q$.

以 F 爲一星式映像且滿足 (iii), (iv) 與 (v). 選取在 e_1^{p+q} 及 e^{p+q} 中的二個單純形 τ^{p+q} 與 σ^{p+q}, 再在 τ^{p+q}與 σ^{p+q} 中各取一內點 x 與 y, 於是 $F^{-1}x$ 與 $F^{-1}y$ 均爲鏈[1]. 不妨假定 $F^{-1}x$ 與 $F^{-1}y$ 處於最一般的位置. 顯然

$$F^{-1}x\cap E^{2(p+b)-2}\times 0=\partial F^{-1}x,$$

$$F^{-1}y\cap E^{2(p+q)-2}\times 1=\partial F^{-1}y.$$

以 x' 及 y' 爲 $E^{2(p+q)-2}\times 0$ 及 $E^{2(p+q)-2}\times 1$ 之內點，從 x' 及 y' 各射影 $\partial F^{-1}x$ 及 $\partial F^{-1}y$ 而得 C_1^{p+q-1} 與 C_2^{p+q-1}. 由此獲得 $-C_1^{p+q-1}+F^{-1}x$ 及 $-C_2^{p+q-1}+F^{-1}y$ 等兩個環. 以 $-k$ 記這兩個兩環的相聯係數.

於是施用一種典型的步驟[2] 如下：在 $E^{2(p+q)-2}\times I$ 中取 $|k|$ 個內點 $\omega_i(i=1,\cdots\cdots,|k|)$. 不妨假定 $F\omega_i=x_0$, 而以 $V_i^{2(p+q)-1}$ 表示 ω_i 的充分小的球形的近旁，使各 $\overline{V}_i^{2(p+q)-1}$之間，沒有公共點. 不妨假定 $F|\overline{V}_i^{2(p+q)-1} : \overline{V}_i^{2(p+q)-1}\to x_0\in S^p\cup S^q$. 以

$$\psi_i : (\overline{V}_i^{2(p+q)-1}, \dot{V}_i^{2(p+q)-1})\to(S^{2(p+q)-1}, y_*)$$

表示 G. W. Whitehead[6] 所採用的，來實踐同態對應

$$H_{2(p+q)-1}(\overline{V}_i^{2(p+q)-1}, \dot{V}_i^{2(p+q)-1})\approx H_{2(p+q)-1}(S^{2(p+q)-1}, y_*)$$

的連續映像. 我們不妨更動 F 爲 F_0, 使

$$F_0x=Fx,\ 於\ x\in E^{2(p+q)-2}\times I-\bigcup_{i=1}^{k}\overline{V}_i^{2(p+q)-1}\ 時成立,$$

$$F_0x=\theta\,\psi_i x,\ 於\ x\in\overline{V}_i^{2(p+q)-1},\ i=1,\cdots\cdots,|k|,\ 時成立.$$

對於映像 F_0 有其對應的相聯係數，此時必定成爲零. 因此我們不妨假定 $-k=0$. 設 ξ 是 $E^{2(p+q)-2}\times I$ 的內點. 從 ξ 射影 $-C_2^{p+q-1}+F^{-1}y$ 而得一錐面 K. 因爲 $k=0$, 我們可以假定點集 $|K|$ 與點集 $|C_1^{p+q-1}|\cup|F^{-1}x|$ 中間的距離大於一個正數 ε. 在 $E^{2(p+q)-2}\times I$ 中，錐面 K 有一個 ε 近旁，$E^{2(p+q)-1}$, 這是一個歐氏腔胞. 在必要的時侯，可施行適當的形變，使 $E^{2(p+q)-1}\cap(E^{2(p+q)-2}\times I)^{\cdot}$ 即錐面 C_2^{p+q-1} 在 $E^{2(p+q)-2}\times 1$ 中的 ε 近旁 N. 顯然 N 是一個歐氏腔胞. 現在以 $\mathcal{J}(E^{2(p+q)-1})$ 表示 $E^{2(p+q)-1}$ 中內點的全體. 那麼 $E^{2(p+q)-2}\times I-\mathcal{J}(E^{2(p+q)-1})$ 是 $E^{2(p+q)-2}\times I$ 的

1) 參考 [2].

2) 參考 [5].

形變離屈． 除 e_1^{p+q} 中適當的形變外，我們可以把 F 變作 F_1 如下：

$$F_1 : E^{2(p+q)-2}\times I,\ (E^{2(p+q)-2}\times I)^{\cdot}\to S^p\times S^q,\ S^p\cup S^q,$$

$$F_1\,|\,E^{2(p+q)-2}\times 0 = F\,|\,E^{2(p+q)-2}\times 0,$$

$$F_1\,|\,\dot{E}^{2(p+q)-2}\times I\cup E^{2(p+q)-2}\times 1 : \dot{E}^{2(p+q)-2}\times I\cup E^{2(p+q)-2}\times 1\to S^p\cup S^q.$$

結果得到

定理 2. 若 $p+q=4$ 或 8，那麼

$$\varepsilon_{2(p+q)-2} : \pi_{2(p+q)-2}(S^p\times S^q,\ S^p\cup S^q)\to \pi_{2(p+q)-2}(\{S^p\times S^q\}\cup e_1^{p+q},\{S^p\times S^q\}) \qquad (1)$$

是遮蓋性的同態對應．

因為 $\pi_{4s-1}(S^{2s})$ 必具有 Hopf 不變量等於 2 的原素[1]，所以得到

定理 3. 若 $p+q$ 是偶數，那麼準同態對應 (1) 的核，至多包含兩個元素．

§3. 定理 1 的證明

在 §1 中曾導入一拓撲空間 Y. 以 $i: y\to S^l\times S^m\times S^n$ 及 $j: S^l\cup S^m\cup S^n\to Y$ 表示兩種投入變換，由此產生二個準同態對應

$$\tilde{i} : \pi_r(Y)\to\pi_r(S^l\times S^m\times S^n),$$

$$\tilde{j} : \pi_r(S^l\cup S^m\cup S^n)\to\pi_r(Y).$$

此外尚有非遮蓋性的同態對應

$$\tilde{k} : \pi_r(S^l\times S^m\times S^n)\to\pi_r(S^l\cup S^m\cup S^n)$$

存在，使 $\tilde{i}\,\tilde{j}\,\tilde{k}=1$. 故知

$$\pi_r(Y)=\pi_r(S^l)+\pi_r(S^m)+\pi_r(S^n)+\tilde{i}_r^{-1}(0).$$

由 [2] 可以知道 $r\leqslant l+m+n-2+\mathrm{Min}(l,\ m,\ n)$ 時，$\tilde{i}_r^{-1}(0)$ 由某幾個顯著的元素產生． 特別 $\tilde{i}_{l+m+n-1}(0)$ 由 $[\psi^{l+m},\psi^{l+n},\psi^{m+n}]$ 產生． 現在利用映像 $[S^l, S^m]$: $\dot{E}_1^{l+m}\to Y$ 把腔胞 E_1^{l+m} 粘到 Y 上去，造成一個叢 $Y\cup e_1^{l+m}$，以 $\phi_1: E_1^{l+m}\to e_1^{l+m}\cup Y$ 表示 e_1^{l+m} 的特徵映像． 從 $Y\cup e_1^{l+m}$ 的參考點 x^* 到室 e_1^{l+m} 和 e^{l+m} 的中心[2]，各作連線，共二條，然後把這二條線縮成一點 x^*． 另造一個空間 $Y\cup S^{l+m}$，把一個球 S^{l+m} 粘在 Y 上的 x^* 點． 以 $\psi: E^{l+m}\to Y\cup S^{l+m}$ 表示球 S^{l+m} 的特徵映像． 又以 $(r,\ z)$，$0\leqslant r\leqslant 1$，$z\in S^{l+m-1}$，表示 E^{l+m} 中各點的極坐標． 定義一個映像

1) 見 [4].

2) 設 E_1^{l+m} 表示滿足 $|y_i|\leq 1$ $(i=1,\cdots\cdots,\ l+m)$ 的點 $(y_1,\cdots\cdots,\ y_{l+m})$ 全體，則 e_1^{l+m} 的心即點 $\phi_1(0,0,\cdots\cdots,0)$.

$\rho: E^{l+m} \to E^{l+m}$ 使得

$$\rho(r, z) = (2r, z), \qquad 當\ 0 \leqq r \leqq \frac{1}{2},$$
$$= (2r-1, z), \qquad 當\ \frac{1}{2} < r \leqq 1.$$

於是一個連續映像 $w: e_1^{l+m} \cup Y \to Y \cup S^{l+m}$, 由下列諸式決定:

$$w \mid Y - e^{l+m} = 1 : Y - e^{l+m} \to Y - e^{l+m},$$
$$w\, x = \psi_{l+m}\, \phi_1^{-1} x \qquad 當\ x \in e_1^{l+m}\ 時成立,$$
$$w\, x = \psi_{l+m}\, \rho\, \psi_{l+m}^{-1} x \qquad 當\ x \in e^{l+m},\ \psi_{l+m}^{-1} x = (r, z)\ 而\ r > \frac{1}{2}\ 時成立,$$
$$w\, x = \psi\, \rho\, \psi_{l+m}^{-1} x, \qquad 當\ x \in e^{l+m},\ \psi_{l+m}^{-1} x = (r, z)\ 而\ r \leqq \frac{1}{2}\ 時成立.$$

顯然 w 是 $e_1^{l+m} \cup Y$ 與 $Y \cup S^{l+m}$ 間的同倫對等. 根據[7]中一定理[1]可知

$$w \circ [\psi^{l+m}, \psi^{l+n}, \psi^{m+n}] = [\psi^{l+m}, \psi^{l+n}, \psi^{m+n}] \pm [S^n, S^{l+m}], \qquad (2)$$

其中"+"號或"−"號由序向的選取法決定. 顯然 $[\psi^{l+m}, \psi^{l+n}, \psi^{m+n}]$ 與 $[S^n, S^{l+m}]$ 在 $\pi_{l+m+n-1}(Y \cup S^{l+m})$ 中線性獨立.

以 Z 表示把 $Y \cup S^{l+m}$ 中的球 S^l 與 S^m 填滿後所獲得的空間. 於是 Z 和 $S^n \cup S^{l+m} \cup S_1^{l+m} \cup S_1^{l+n} \cup S_1^{m+n}$ 同倫對等, 此處 S^n, S^{l+m}, S_1^{l+m}, S_1^{l+n}, S_1^{m+n} 五個球祇是在一點 x^* 兩兩互相接觸而已. 易知 $[S^n, S^{l+m}]$ 在 $\pi_{l+m+n-1}(Z)$ 中產生自由子羣, 所以 $[S^n, S^{l+m}]$ 在 $\pi_{l+m+n-1}(Y \cup S^{l+m})$ 中具備自由性. 從 (2) 可知 $[\psi^{l+m}, \psi^{l+n}, \psi^{m+n}]$ 產生 $\pi_{l+m+n-1}(Y)$ 中的自由子羣. 定理 1 證畢.

假定 $\phi_1: E^{r_2} \times E^{r_3} \to X$ 用另一映像 $\phi_1': E^{r_2} \times E^{r_3} \to X$ 代替, 其中 $\phi_1 \mid (E^{r_2} \times E^{r_3})^{\bullet} = \phi_1' \mid (E^{r_2} \times E^{r_3})^{\bullet}$, 那麼 $[\phi_1, \phi_2, \phi_3]$ 成爲 $[\phi_1', \phi_2, \phi_3]$. 由 [8] 獲得 $\pi_{r_2+r_3}(X)$ 中的一元素 $d(\phi_1, \phi_1')$. 以 (r, z) $(0 \leqslant r \leqslant 1,\ z \in S^{r_2+r_3-1})$ 表示 $E^{r_2} \times E^{r_3}$ 中一點, 我們造一個形變

$$\theta_t: E^{r_2} \times E^{r_3}, (E^{r_2} \times E^{r_3})^{\bullet} \to E^{r_2} \times E^{r_3}, (E^{r_2} \times E^{r_3})^{\bullet},$$

使得

$$\theta_t(r, z) = \left(\frac{2r}{2-t}, z\right), \qquad 0 \leqq r \leqq \frac{2-t}{2},$$
$$= (-4r + 5 - 2t, z), \qquad \frac{2-t}{2} \leqq r \leqq \frac{4-t}{4},$$
$$= (4r - 3, z), \qquad \frac{4-t}{4} \leqq r \leqq 1.$$

---

1) 參考 [6] 中 (3.5) 至 (3.9).

對於 $[\phi_1, \phi_2, \phi_3]$ 又造一形變 $\Theta_t: S^{r_1+r_2+r_3-1} \to X$，使得

$$\Theta_t | E^{r_1} \times \dot{E}^{r_2} \times E^{r_3} = \phi_2(E^{r_1} \times E^{r_3}),$$
$$\Theta_t | E^{r_1} \times E^{r_2} \times \dot{E}^{r_3} = \phi_3(E^{r_1} \times E^{r_2});$$
$$\Theta_t | \dot{E}^{r_1} \times E^{r_2} \times E^{r_3} = \phi_1 \theta_t(r, z), \quad 0 \leqq r \leqq \frac{2-t}{2},$$
$$\phi_1' \theta_t(r, z), \quad \frac{2-t}{2} \leqq r \leqq 1.$$

再利用 [7] 中一定理，可知 $\Theta_1: S^{r_1+r_2+r_3-1} \to X$ 代表 $[\phi_1', \phi_2, \phi_3] \pm [\alpha_1, d(\phi_1 \phi_1')]$. 總之得

定理 4.　　$[\phi_1, \phi_2, \phi_3] = [\phi_1', \phi_2, \phi_3] \pm [\alpha_1, d(\phi_1, \phi_1')]$,

其中 $\pm$ 號與序向之選取有關.

§4. 論 $\pi_{2(p+q)-3}(S^p \cup S^q)$

按照 [1] 中已得的結果，我們知道

$$\pi_{2(p+q)-2}(\{S^p \times S^q\} \cup e_1^{p+q}, \{S^p \times S^q\}) \approx \pi_{2(p+q)-2}(S^{p+q}) + $$
$$+ \pi_{2(p+q)-1}(S^p \times S^q \times S^{p+q}, S^p \times S^q \cup S^{p+q}), \tag{3}$$

而且

$$\pi_{2(p+q)-1}(S^p \times S^q \times S^{p+q}, S^p \times S^q \cup S^{p+q})$$
$$\approx \pi_{2(p+q)-1}(S^p \times S^q \times S^{p+q} \cup e^{2p+q} \cup e^{p+2q} \cup e^{2(p+q)}, S^p \times S^q \times S^{p+q}), \tag{4}$$

其中 $e^{2(p+q)}$ 是利用映像 $[\psi^{p+q}, \psi^{2p+q}, \psi^{p+2q}]$ 粘到叢 $e^0 \cup S^p \cup S^q \cup S^{p+q} \cup e^{p+q} \cup e^{2p+q} \cup e^{p+2q}$ 上去的. 以 $S^p \times S^q \times S^{p+q}$ 中 $2p+q$ 及 $p+2q$ 次元的室 e_1^{2p+q}, e_1^{p+2q} 的特徵映像爲 ψ_1^{2p+q} 及 ψ_1^{p+2q}，那麼根據定理 4 可知：

$$[\psi^{p+q}, \psi_1^{2p+q}, \psi_1^{p+2q}] = [\psi^{p+q}, \psi^{2p+q}, \psi^{p+2q}]$$
$$\pm([S^p, d(\psi^{p+2q}, \psi_1^{p+2q})] \pm [S^q, d(\psi^{2p+q}, \psi_1^{2p+q})].$$

換一句話說，$e_1^{2(p+q)}$ 是利用 $\pm([S^p, d(\psi^{p+2q}, \psi_1^{p+2q})] \pm [S^q, d(\psi^{2p+q}, \psi_1^{2p+q})])$ 粘到 $S^p \times S^q \times S^{p+q} \cup e^{2p+q} \cup e^{p+2q}$ 上去的. $S^p \times S^q \times S^{p+q} \cup e^{2p+q} \cup e^{p+2q} \cup e^{2(p+q)}$ 與叢 $S^p \times S^q \times S^{p+q} \cup S^{2p+q} \cup S^{p+2q} \cup e_0^{2(p+q)}$ 有相同的倫類，所可特別注意的地方就是 $e_0^{2(p+q)}$ 是利用映像 $\pm([S^p, S^{p+2q}] \pm [S^q, S^{2p+q}])$ 粘到 $S^p \times S^q \times S^{p+q} \cup S^{2p+q} \cup S^{p+2q}$ 上去而構成的.

假使 $p > q \geqq 2$，根據 [2] 可知

$$\pi_{2p+2q-1}(S^p \times S^q \times S^{p+q} \cup S^{2p+q} \cup S^{p+2q}) = \pi_{2p+2q-1}(S^{2p+q})$$

$$+[S^q, S^{2p+q}]+\pi_{2p+2q-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q}). \qquad (5)$$

大家知道

$$\pi_{2p+2q-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q})=\pi_{2p+2q-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q})+\pi_{2p+2q-1}(S^{p+2q})$$
$$+\pi_{2p+2q}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q}) \qquad (6)$$

再利用 [1] 中所介紹的辦法，可以知道

$$\pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q})$$
$$\approx\pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}\cup e^{2p+2q}\cup e^{p+3q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}), \qquad (7)$$

其中 e^{2p+2q} 和 e^{p+3q} 是利用魏德海乘積 $[S^p, S^{p+2q}]$ 及 $[S^q, S^{p+2q}]$ 粘到 $S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}$ 上去的兩個腔胞. 以

$$k: S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}\cup e^{2(p+q)}\cup e^{p+3q}\to$$
$$S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}\cup S^{2(p+q)}\cup S^{p+3q}$$

爲一同倫對等，以 k 的逆對等爲 k'，使

$$k\,k'\cong 1,\quad \text{rel. } S^q\times S^p\times S^{p+q}\times S^{p+2q},$$
$$k'k\cong 1,\quad \text{rel. } S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}.$$

利用 [1] 中所採用的方法，可知

$$\pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}\cup S^{2p+2q}\cup S^{p+3q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q})$$
$$\approx\pi_{2(p+q)}(S^{2p+2q})+\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{2p+2q+i}(S^{p+(3+i)q}). \qquad (8)$$

由 (6), (7) 及 (8) 知

$$\pi_{2p+2q-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q})\approx\pi_{2p+2q-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q})$$
$$+\pi_{2p+2q-1}(S^{p+2q})+\beta\, i\,\bar{k}'[\pi_{2(p+q)}(S^{2p+2q})$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{2p+2q+i}(S^{p+(3+i)q})],$$

其中

$$\bar{k}': \pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}\cup S^{2(p+q)}\cup S^{p+3q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q})$$
$$\to\pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}\cup e^{2(p+q)}\cup e^{p+3q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q})$$

是由映像 k' 所導出的同態對應；又

$$i: \pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q}\cup e^{2(p+q)}\cup e^{p+3q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q})$$
$$\to\pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q})$$

是按照 [1] 中所論意義下的同態對應；又

$$\beta: \pi_{2(p+q)}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\times S^{p+2q},\ S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q})\to$$

$$\to\pi_{2(p+q)-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{p+2q})$$

表同倫境界對應．由 k' 的定義易知在同態 $\beta i\overline{k'}$ 的對應下把 $\pi_{2(p+q)}(S^{2(p+q)})$ 對應於 $[S^p,\ S^{p+2q}]$ 所產生的羣．從(5)可知

$$\pi_{2(p+q)-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{2p+q}\cup S^{p+2q})\approx\pi_{2(p+q)-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q})$$
$$+\pi_{2p+2q-1}(S^{p+2q})+\pi_{2p+2q-1}(S^{2p+q})+[S^q,\ S^{2p+q}]+[S^p,\ S^{p+2q}]$$
$$+\beta i\overline{k'}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{2p+2q+i}(S^{p+(3+i)q})\right).$$

用典型的方法，可以知道

$$\pi_{2(p+q)-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q}\cup S^{2p+q}\cup S^{p+2q}\cup e_0^{2p+2q})\approx\pi_{2(p+q)-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q})$$
$$+\pi_{2p+2q-1}(S^{p+2q})+\pi_{2p+2q-1}(S^{2p+q})+[S^q,\ S^{2p+q}]$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{2p+2q+i}(S^{p+(3+i)q}).$$

按照(4)可以求 $\pi_{2(p+q)-1}(S^p\times S^q\times S^{p+q},S^p\times S^q\cup S^{p+q})$．利用 §2 的結果，可以知道當 $p+q$ 是偶數的時候

$$\pi_{2(p+q)-3}(S^p\cup S^q)/\varepsilon^{-1}_{2(p+q)-3}(0)\approx\pi_{2(p+q)-3}(S^p)+\pi_{2(p+q)-3}(S^q)$$
$$+\pi_{2(p+q-1)}(S^{p+q})+\pi_{2(p+q)-1}(S^{2p+q})+\pi_{2(p+q)}(S^{2p+2q})$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{2(p+q)+i}(S^{p+(2+i)q}),\quad p>q\geqq 2,\tag{9}$$

這裏 $\varepsilon^{-1}(0)$ 至多包含兩個元素．特別 $p+q=8$ 的時候，(9) 成爲

$$\pi_{13}(S^p\cup S^{8-q})\approx\pi_{13}(S^p)+\pi_{13}(S^{8-p})+\pi_{14}(S^8)+\pi_{15}(S^{8+p})$$
$$+\pi_{16}(S^{16})+\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{16+i}(S^{16-p+i(8-p)}),\quad p=6,5.\tag{10}$$

若 $p=q$，爲便於識別起見，以 $S^p=S^p_1$，$S^q=S^p_2$．於是

$$\pi_{4p-1}(S^p_1\times S^p_2\times S^{2p}\cup S^{3p}_1\cup S^{3p}_2)\approx\pi_{4p-1}(S^{3p}_1)+\pi_{4p-1}(S^{3p}_2)+[S^p_1,\ S^{3p}_1]$$
$$+[S^p_2,\ S^{3p}_1]+[S^p_1,\ S^{3p}_2]+[S^p_2,\ S^{3p}_2]+\pi_{4p-1}(S^p_1\times S^p_2\times S^{2p}).$$

由此

$$\pi_{4p-3}(S^p\cup S^p)/\varepsilon^{-1}(0)\approx\pi_{4p-3}(S^p)+\pi_{4p-3}(S^p)+\pi_{4p-2}(S^{2p})+\pi_{4p-1}(S^{3p})$$
$$+\pi_{4p-1}(S^{3p})+\pi_{4p}(S^{4p})+\pi_{4p}(S^{4p})+\pi_{4p}(S^{4p}),\tag{11}$$

其中 $\varepsilon^{-1}(0)$ 至多包含兩個元素．特別

$$\pi_5(S^2\cup S^2)\approx\pi_5(S^2)+\pi_5(S^2)+\pi_6(S^4)+\pi_7(S^6)+\pi_7(S^6)+$$

$$+\pi_8(S^8)+\pi_8(S^8)+\pi_8(S^8), \tag{12}$$

$$\pi_{13}(S^4 \cup S^4) \approx \pi_{13}(S^4)+\pi_{13}(S^4)+\pi_{14}(S^8)+\pi_{15}(S^{12})$$
$$+\pi_{15}(S^{12})+\pi_{16}(S^{16})+\pi_{16}(S^{16})+\pi_{16}(S^{16}). \tag{13}$$

參 考 文 獻

[1] 張素誠, 論 $S^p \cup S^q$ 的同倫羣 I, 數學學報, 1953, **3**, 186—189.

[2] 張素誠, Some Suspension Theorems, *Quart. J. Marth.* (Oxford) (2), 1950, **1**, 310—317.

[3] Hopf, H., Über die Abbildungen der drei dimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Annalen*, 1931, **104**, 637—665.

[4] ———, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, *Fund. Math.*, 1935, **25**, 427—440.

[5] Freudenthal, H., Über die Klassen der Sphärenabbildungen, *Compositio Math.*, 1937, **5**, 299—314.

[6] Whitehead, G. W., A Generalization of the Hopf invariant, *Annals of Math.*, 1950, **51**, 192—237.

[7] ———, On products in homotopy groups, *ibid.*, 1946, **47**, 460—475.

[8] Eilenbarg, S., Cohomology and continuous mappings, *ibid.*, 1940, **41**, 231—251.

ON THE HOMOTOPY GROUPS OF $S^p \cup S^q$, II.

S. C. Chang

(Institute of Mathematics, Academia Sinica)

Abstract

Let $E^{r_1} \times E^{r_2} \times E^{r_3}$ be the product of three euclidean cells and let $f_i \in \alpha_i \in \pi_{r_i}(X)$, $i=1, 2, 3$. If the Whitehead products $[\alpha_1, \alpha_2]$, $[\alpha_2, \alpha_3]$ and $[\alpha_1, \alpha_3]$ are trivial, there exist extensions $\phi_1 : E^{r_2} \times E^{r_3} \to X$, $\phi_2 : E^{r_1} \times E^{r_3} \to X$, and $\phi_3 : E^{r_1} \times E^{r_2} \to X$ of the Whitehead products $[f_2, f_3]$, $[f_1, f_3]$ and $[f_1, f_2]$ respectively. Define a map

$$F : (E^{r_1} \times E^{r_2} \times E^{r_3})^{\cdot} \to X$$

such that

$$\begin{aligned} F(x \times y \times z) &= \phi_1(y \times z), \text{ if } x \in \dot{E}^{r_1}, \quad y \in E^{r_2}, \quad z \in E^{r_3}, \\ &= \phi_2(x \times z), \text{ if } x \in E^{r_1}, \quad y \in \dot{E}^{r_2}, \quad z \in E^{r_3}, \\ &= \phi_3(x \times y), \text{ if } x \in E^{r_1}, \quad y \in E^{r_2}, \quad z \in \dot{E}^{r_3}. \end{aligned}$$

The map F contributes an element in $\pi_{r_1+r_2+r_3-1}(X)$, namely, $[\phi_1, \phi_2, \phi_3]$.

Let Y be the topological space obtained from $S^{r_1}\times S^{r_2}\times S^{r_3}$ by removing the top dimensional cell. Let $\Psi_i (i=1, 2, 3)$ denote the characteristic maps of the r_2+r_3, r_1+r_3 and r_1+r_2 dimensional cells of Y respectively. Then it is proved that

$$\pi_{r_1+r_2+r_3-1}(Y)=\pi_{r_1+r_2+r_3-1}(S^{r_1})+\pi_{r_1+r_2+r_3-1}(S^{r_2})+\pi_{r_1+r_2+r_3-1}(S^{r_3})$$
$$+[\Psi_1, \Psi_2, \psi_3],$$

where the sign $+$ denotes direct summation and $[\psi_1, \psi_2, \Psi_3]$ is a free group generated by one generator only.

In the space X there may be another extension ϕ' of $[f_2, f_3]$ $(=0)$. Then it is proved that

$$[\phi_1, \phi_2, \phi_3]=[\phi_1', \phi_2, \phi_3]+\epsilon[f_1, d(\phi_1, \phi_1')],$$

ϵ being $+1$ or -1 determined by the orientation concerned.

The complexes $\{S^p\times S^q\}$ and $S^p\times S^q$ are distinguished by their $p+q$ dimensional cells e^{p+q} and e_1^{p+q} only. The injection

$$j: S^p\times S^q,\ S^p\cup S^q\to\{S^p\times S^q\}\cup e_1^{p+q},\ \{S^p\times S^q\}$$

induces the homomorphism

$$\varepsilon_{r+1}:\pi_{r+1}(S^p\times S^q,\ S^p\cup S^q)\to\pi_{r+1}(\{S^p\times S^q\}\cup e_1^{p+q},\ \{S^p\times S^p\}).$$

Here $\varepsilon^{-1}_{2(p+q)-2}(0)$ is proved to be at most a 2-group, if $p+q$ is even. Particularly, $\varepsilon_{2(p+q)-2}$ is an isomorphism onto if $p+q=4$ or 8. In virtue of the arguments in [1] together with the new technique about $[\phi_1, \phi_2, \phi_3]$, the author calculated $\pi_5(S^2\cup S^2)$ and $\pi_{13}(S^p\cup S^{8-p})$. They are

$$\pi_{4r-3}(S^r\cup S^r)=\pi_{4r-3}(S^r)+\pi_{4r-3}(S^r)+\pi_{4r-2}(S^{2r})+\pi_{4r-1}(S^{3p})$$
$$+\pi_{4r-1}(S^{3p})+\pi_{4r}(S^{4p})+\pi_{4r}(S^{4p})+\pi_{4r}(S^{4p}),\quad \text{if } r=2 \text{ or } 4,$$

and

$$\pi_{13}(S^p\cup S^{8-p})=\pi_{13}(S^p)+\pi_{13}(S^{8-p})+\pi_{14}(S^8)+\pi_{15}(S^{8-p})+\pi_{16}(S^{16})$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{16+i}(S^{16-p+i(8-p)}),\quad p=5 \text{ or } 6.$$