數學學報
第3卷 第1期, 1953年8月

相對論的量子力學中一些算子的計算
第二篇*

張宗燧
(中國科學院數學研究所及北京師範大學物理學系)

一. 引 言

在本文第一篇內, 我們已說到相對論的量子力學與不齊次羅倫茲變換 (inhomogeneous Lorentz transformation) 的表示的關係, 也提起Wigner 已經解決了後面的問題[1]. 在這裏, 我們作了以下的工作:

(i) 用了Wigner 的方法, 證明如果波函數(即表示基)的獨立變數本身即是一個變換, 那麼所有的表示形式上完全與標準表示(standard representation)相同.

(ii) 用Wigner 的結果, 計算了第一篇中所提起的算子 I^{kl}, I^k.

(iii) 討論了一個在三度空間轉動下有已知性質的量子力學系統的性質.

二. 表示如何變爲標準表示

爲便於與Wigner 的工作比較起見, 我們用Wigner 的符號, 將不齊次羅倫茲變換寫爲

$$\left.\begin{array}{l} x^{\mu\prime}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}+a^{\mu}, \\ \left(\begin{array}{l} g^{00}=-g^{11}=-g^{22}=-g^{33}=1 \\ x^{\mu}=g^{\mu\nu}\, x_{\nu} \end{array}\right) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

而令 $T(a)$, $D(\Lambda)$ 分別代表

* 1952 年 9 月 17 日收到

$$x^{\mu\prime}=x^{\mu}+a^{\mu},$$
$$x^{\mu\prime}=\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}.$$

我們立即獲得

$$T(a)\ T(b)=T(a+b), \tag{2.1}$$
$$d(\Lambda)\ T(a)=T(\Lambda a)\ d(\Lambda), \tag{2.2}$$
$$d(\Lambda)\ d(I)=d(\Lambda I). \tag{2.3}$$

取一個表示基，使 $T(a)$ 等都爲對角方陣；因 $T(a)$ 等互換，每個表示是一度空間的. 令 p 爲各個一度空間的記號(label)，令 ζ 爲表示基的其他附標，$\varphi(p,\zeta)$ 爲表示基，得

$$T(a)\ \varphi(p,\zeta)=f(a,p)\ \varphi(p,\zeta).$$

由於(2.1)，我們得

$$T(a)\ \varphi(p,\zeta)=e^{i(pa)}\ \varphi(p,\zeta). \tag{3}$$
$$((pa)=p^{\mu}\, a_{\mu}=p_0\, a_0-p_1\, a_1-p_2\, a_2-p_3\, a_3)$$

令

$$P(\Lambda)\ \varphi(p,\zeta)=\varphi\,(\Lambda^{-1}\, p,\zeta),$$
$$Q(\Lambda)=d(\Lambda)\ P(\Lambda^{-1}),$$

我們立即證明 Q 與 T 互換. 因此

$$Q\,(\Lambda)\ \varphi(p,\xi)=\sum_{\eta} Q(p,\Lambda)_{\xi\eta}\ \varphi(p,\eta), \tag{4}$$

亦即

$$d(\Lambda)\ \varphi(p,\xi)=\sum Q(p,\Lambda)_{\xi\eta}\ \varphi(\Lambda^{-1}\, p,\eta). \tag{5}$$

代入(2.3)得

$$\sum_{\eta} Q(p,\Lambda)_{\xi\eta}\ Q(\Lambda^{-1}\, p,I)_{\eta\zeta}=Q(p,\Lambda I)_{\xi\zeta}. \tag{6}$$

$p_{\mu}\, p^{\mu}$ 顯然是不變量；有不同值的 $p_{\mu}\, p^{\mu}$ 的空間，不能互相變換. 因此我們可以分別地討論 $p_{\mu}\, p^{\mu}>0$, $p_{\mu}\, p^{\mu}<0$, $p_{\mu}\, p^{\mu}=0$ 的三種空間. 我們在此只討論第一種情形，因爲它相當於總能大於零的量子力學系統.

令 $p_{(0)}$ 爲$(m,0,0,0)$. 令 α_p 爲一齊次羅倫茲變換，使

$$\alpha_p\, p_{(0)}=p. \tag{7}$$

此變換顯然爲 p 的函數，但是它不是單値的. 這有二個理由：第一，齊次羅倫茲變換羣本身即是雙連接的 (doubly-connected)；第二，(7)式中的 α_p 含有六個參數

(parameters) 而 (7) 式只供給三個條件． 我們現在引入波函數 $\varphi'(\alpha_p, \zeta)$，它的獨立變數之一是一個變換 α_p，它的定義是

$$\varphi'(\alpha_p, \zeta) = \sum Q(p_{(0)}, \alpha_p^{-1})_{\zeta\eta}\, \varphi(\alpha_p\, p_{(0)}, \eta); \tag{8}$$

因此

$$\varphi'(1, \zeta) = \sum Q(p_{(0)}, 1)_{\zeta\eta}\, \varphi(p_0\, \eta) = \varphi(p_{(0)}, \eta).$$

一個像

$$\varphi_f(p, \zeta) = d(\alpha_p)\, \varphi(p, \zeta)$$

的關係，用 φ' 來表達時得

$$\begin{aligned}\varphi_f'(\alpha_p, \zeta) &= \sum Q(p_{(0)}, \alpha_p^{-1})_{\zeta\eta}\, \varphi_f(p, \eta)\\ &= \sum Q(p_{(0)}, \alpha_p^{-1})_{\zeta\eta}\, Q(p, \alpha_p)_{\eta\xi}\, \varphi(\alpha_p^{-1} p, \xi)\\ &= \sum Q(p_{(0)}, \alpha_p^{-1})_{\zeta\eta}\, Q(p, \alpha_p)_{\eta\xi}\, \varphi(p_{(0)}, \xi)\\ &= \sum Q(p_{(0)}, \alpha_p^{-1})_{\zeta\eta}\, Q(p, \alpha_p)_{\eta\xi}\, \varphi'(1, \xi)\\ &= \sum Q(p_{(0)}, \alpha_p^{-1}\alpha_p)_{\zeta\xi}\, \varphi'(1, \xi)\\ &= \varphi'(1, \zeta),\end{aligned}$$

亦即是

$$d(\alpha_p)\, \varphi'(\alpha_p, \zeta) = \varphi'(1, \zeta). \tag{9}$$

一個像

$$\varphi_f(p_{(0)}, \zeta) = d(\alpha_p^{-1})\, \varphi(p_{(0)}, \zeta)$$

的關係，用 φ' 來表達時得

$$\begin{aligned}\varphi_f'(1, \zeta) &= \varphi_f(p_{(0)}, \zeta)\\ &= d(\alpha_p^{-1})\, \varphi(p_{(0)}, \zeta)\\ &= \sum_{\zeta\xi} Q(p_{(0)}, \alpha^{-1})_{\zeta\xi}\, \varphi(\alpha_p\, p_{(0)}, \xi)\\ &= \varphi'(\alpha_p, \zeta),\end{aligned}$$

亦即

$$\varphi'(\alpha_p, \zeta) = d(\alpha_p^{-1})\, \varphi'(1, \zeta). \tag{10}$$

因此將 Λ 寫為

$$\alpha_p(\alpha_p^{-1}\Lambda),$$

得

$$
\begin{aligned}
d(\Lambda)\,\varphi'(\alpha_p,\zeta) &= d(\alpha_p)\,d(\alpha_p^{-1}\Lambda)\,\varphi'(\alpha_p,\zeta) \\
&= d(\alpha_p^{-1}\Lambda)\,\varphi'(1,\zeta) \\
&= \varphi'([\alpha_p^{-1}\Lambda]^{-1},\zeta) \\
&= \varphi'(\Lambda^{-1}\alpha_p,\zeta).
\end{aligned} \tag{11}
$$

換句話說，$d(\Lambda)$ 在 φ' 上作用時，正如一個標準表示.

如此的 φ' 的計算，無庸多說，是極不方便的. 照表面看來，似乎一切都簡單了，與在量子力學中旋轉等於 $\frac{1}{2}h$, $\frac{3}{2}h$, ……的事實相當的現象也不見了；但是這些簡單化只是表面的. 所有的複雜性，都在 α_p 爲 p 的多值函數的事實中出現.

三. I^{kl}, I^k 的計算

上面的理論，如果設法令 α_p 爲 p 的單值函數，再加以適當補充，便可以讓我們算出第一篇中所提出的 I^{kl}, I^k.

令 p^μ 爲

$$(p^0,\ P\sin\theta\ \cos\varphi,\ P\sin\theta\ \sin\varphi,\ P\cos\theta); \tag{12}$$

令

$$p^\mu p_\mu > 0,\ p^\mu p_\mu = m^2, \tag{13}$$

則我們可引入 β，使

$$p^0 = m\cosh\beta, \qquad P = m\sinh\beta. \tag{14}$$

又令 $p_{(0)}$ 代表 $(m,0,0,0)$ 的向量. 我們不妨令 α_p 爲

$$R_p S_p, \tag{15}$$

而 S_p 只變換 p^0, p^3，將 $(m,0,0,0)$ 變換至 $(p^0,0,0,P)$，R_p 將 $(p^0,0,0,P)$ 轉至 p^μ，軸在 xy 面中與 (p^1,p^2,p^3) 垂直. 如果此後的 α_p 均了解爲如此的 $R_p S_p$，則 α_p 成爲 p 的單值函數，至少在 p^μ 點附近而言.

我們依舊援用(8)式，因此(9)，(10)兩式依舊有效. 但(11)式必須改變. 令 Λ 將 p 變至 p'，我們將 Λ 寫爲

$$\alpha_{p'}\,(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\,\alpha_p)\,\alpha_p^{-1}. \tag{16}$$

因

$$(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\,\alpha_p)\,p_{(0)} = \alpha_{p'}^{-1}\Lambda\,p = \alpha_{p'}^{-1}\,p' = p_{(0)}, \tag{17}$$

它是三度空間旋轉羣中的一個變換. 這些變換們由於(6)式適合

$$\sum Q(p_{(0)},\Lambda)_{\xi\eta}\,Q(p_{(0)},I)_{\eta\zeta} = Q(p_{(0)},\Lambda I)_{\xi\zeta}, \tag{18}$$

因此它們的 $Q(p_0,\Lambda)$, $Q(p_0,I)$ 們是它們的羣的表示. 這些表示的解是人所共

知的；我們令它們的解爲 $U(\Lambda)$, $U(I)$, 等等. 我們獲得

$$
\begin{aligned}
d(\Lambda)\ \varphi'(\alpha_{p'},\zeta) &= d(\alpha_{p'})\ d(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)\ d(\alpha_p^{-1})\ \varphi'(\alpha_{p'},\zeta) \\
&= d(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)\ d(\alpha_p^{-1})\ \varphi'(1,\zeta) \\
&= d(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)\ d(\alpha_p^{-1})\ \varphi(p_{(0)},\zeta) \\
&= \sum\nolimits_\eta U(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)_{\zeta\eta}\ d(\alpha_p^{-1})\ \varphi(p_{(0)},\eta) \\
&= \sum\nolimits_\eta U(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)_{\zeta\eta}\ d(\alpha_p^{-1})\ \varphi'(1,\eta) \\
&= \sum\nolimits_\eta U(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)_{\zeta\eta}\ \varphi'(\alpha_p,\eta).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

因 α_p 爲 p 的單值函數，我們可令 $\varphi'(\alpha_p,\eta)$ 爲 $\psi(p,\eta)$，得

$$
\begin{aligned}
d(\Lambda)\ \psi(p',\zeta) &= \sum U(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)_{\zeta\eta}\ \psi(p,\eta) \\
&= \sum U(\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p)_{\zeta\eta}\ \psi(\Lambda^{-1}p',\eta).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

自 (20) 式即可計算出所欲求的 I^{kl}, I^k 等. 第一步先由 p', Λ 計算 $\alpha_{p'}^{-1}\Lambda\ \alpha_p$, 亦即 $S_{p'}^{-1}R_{p'}^{-1}\Lambda\ R_p\ S_p$.

令與 p'_μ 相當的 $(\beta, p^0, P, \theta, \varphi)$ 爲 $(\beta', p^{0\prime}, P', \theta', \varphi')$，而

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta' = \beta + \delta\beta, \qquad p^{0\prime} = p_0 + \delta p^0, \qquad P' = P + \delta P, \\
\theta' = \theta + \delta\theta, \qquad \varphi' = \varphi + \delta\varphi.
\end{aligned}
\right\}
\tag{21}
$$

爲了我們的目的，我們只需討論 Λ 爲一無窮小變換的情形：

$$
x^{\mu\prime} = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu\, x^\nu + O(\epsilon^2). \tag{22}
$$

先討論 Λ 的一個特殊情形，即 $\epsilon^1{}_0$, $\epsilon^2{}_0$, $\epsilon^3{}_0$ 不等於零而其他的 ϵ 均等於零的情形. 在此情形下，

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta P &= p^0\{\epsilon^1{}_0 \sin\theta\cos\varphi + \epsilon^2{}_0 \sin\theta\sin\varphi + \epsilon^3{}_0\cos\theta\}, \\
P\delta\theta &= p^0\{\epsilon^1{}_0 \cos\theta\cos\varphi + \epsilon^2{}_0 \cos\theta\sin\varphi - \epsilon^3{}_0\sin\theta\}, \\
P\delta\varphi &= \frac{p^0}{\sin\theta}\{\epsilon^1{}_0(-\sin\varphi) + \epsilon^2{}_0\cos\varphi\}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{23}
$$

S_p 爲下列方陣：

$$
\begin{pmatrix}
\cosh\beta & 0 & 0 & \sinh\beta \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\sinh\beta & 0 & 0 & \cosh\beta
\end{pmatrix}; \tag{24.1}
$$

$S_{p'}^{-1}$ 爲下列方陣：

$$\begin{pmatrix} \cosh\beta & 0 & 0 & -\sinh\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sinh\beta & 0 & 0 & \cosh\beta \end{pmatrix} + (\delta P/m) \begin{pmatrix} P/p^0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & P/p^0 \end{pmatrix}; \quad (24.2)$$

R_p 爲下列方陣:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi & (\cos\theta-1)\sin\varphi\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & (\cos\theta-1)\sin\varphi\cos\varphi & \cos\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \end{pmatrix}; \quad (24.3)$$

稱此爲 $R(\theta, \varphi)$, 則 $R_{p'}^{-1}$ 等於

$$R(-\theta', \varphi') = R(-\theta, \varphi) + \frac{\partial R(-\theta, \varphi)}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial R(-\theta, \varphi)}{\partial\varphi}\delta\varphi. \quad (24.4)$$

以 $\delta P, \delta\theta, \delta\varphi$ 表出 Λ, 即可將 $S_{p'}^{-1} R_{p'}^{-1}\Lambda R_p S_p$ 乘出. 忽略 $\delta P, \delta\theta, \delta\varphi$ 的二次項, 得

$$1+\delta\theta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(m/p^0)\cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 & -(m/p^0)\sin\varphi \\ 0 & (m/p^0)\cos\varphi & (m/p^0)\sin\varphi & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\delta\varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta-1 & (m/p^0)\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & 1-\cos\theta & 0 & -(m/p^0)\sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -(m/p^0)\sin\theta\sin\varphi & (m/p^0)\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

以 ϵ 等表出, 得

$$1+\epsilon^1{}_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & -\{(\cos\theta-1)p^0/P\sin\theta\}\sin\varphi & -(m/P)(\cos\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\ & & 0 & -(m/P)(\cos\theta-1)\cos\varphi\sin\varphi \\ & & & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\epsilon^2{}_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & \{(\cos\theta-1)p^0/P\sin\theta\}\cos\varphi & -(m/P)(\cos\theta-1)\cos\varphi\sin\varphi \\ & & 0 & -(m/P)(\cos\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi) \\ & & & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\epsilon^3{}_0\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ & 0 & 0 & (m/P)\sin\theta\cos\varphi\\ & & 0 & (m/P)\sin\theta\sin\varphi\\ & & & 0\end{pmatrix}. \tag{26}$$

現在討論 $\epsilon^1{}_0, \epsilon^2{}_0, \epsilon^3{}_0$ 等於零而其他的 ϵ 不等於零的情形. 此時 $S_{p'}=S_p$ 而

$$S_{p'}{}^{-1}(R_{p'}{}^{-1}\Lambda\, R_p)S_p=(R_{p'}{}^{-1}\Lambda\, R_p)S_{p'}{}^{-1}S_p=R_{p'}{}^{-1}\Lambda\, R_p.$$

用類似的方法，求出

$$R_{p'}{}^{-1}\Lambda\, R_p=1+\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}[\epsilon^1{}_2+\epsilon^2{}_3\,(1-\cos\theta)\cos\varphi/\sin\theta+$$

$$+\epsilon^3{}_1(1-\cos\theta)\sin\varphi/\sin\theta]. \tag{27}$$

如果對於三度空間一個無窮小旋轉

$$x^{r\prime}=x^r+\epsilon^r{}_s\,x^s \qquad (r,s=1,2,3)$$

U 的形式為

$$1+\tfrac{1}{2}\epsilon^r{}_s\,V^r{}_s, \tag{28}$$

而將(20)式中的 $d(\Lambda)$ 寫為

$$d(\Lambda)=1+\tfrac{1}{2}\,\epsilon^\mu{}_\nu\,I^\mu{}_\nu, \tag{29}$$

我們便不難看出：

$$\begin{aligned}
I_{10}&=-\{p_0(\cos\theta-1)\sin\varphi/P\sin\theta\}V_{12}-(m/P)(\cos\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)V_{13}\\
&\quad-(m/P)(\cos\theta-1)\cos\varphi\sin\varphi\;V_{23}-(p_0\,\partial/\partial p^1-p_1\,\partial/\partial p^0),\\
I_{20}&=\{p_0(\cos\theta-1)\cos\varphi/P\sin\theta\}V_{12}-(m/P)(\cos\theta-1)\cos\varphi\sin\varphi\;V_{13}\\
&\quad-(m/P)(\cos\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)V_{23}-(p_0\,\partial/\partial p^2-p_2\,\partial/\partial p^0),\\
I_{30}&=(m/P)\sin\theta\cos\varphi\;V_{13}+(m/P)\sin\theta\sin\varphi\;V_{23}\\
&\quad-(p_0\,\partial/\partial p^3-p_3\,\partial/\partial p^0),\\
I_{12}&=V_{12}-(p_2\,\partial/\partial p^1-p_1\,\partial/\partial p^2),\\
I_{13}&=-\{(1-\cos\theta)\sin\varphi/\sin\theta\}V_{12}-(p_3\,\partial/\partial p^1-p_1\,\partial/\partial p^3),\\
I_{23}&=\{(1-\cos\theta)\cos\varphi/\sin\theta\}V_{12}-(p_3\,\partial/\partial p^2-p_2\,\partial/\partial p^3).
\end{aligned} \tag{30}$$

含有 V 的項是由 Q 而來的，不含有 V 的項即是標準表示的生成子 (generator). 至此，I^{kl} 完全求出.

因為 $p_\mu\,p^\mu$ 為不變量，所以如果

$$\psi(p,\zeta)=\psi'(p^1,p^2,p^3,\zeta)\,\delta\,(p^0-[m^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2]^{\frac{1}{2}}),\quad (31)$$

這個形式始終不變. 所以我們可以引入算子們$(I^{kl})'$,它們的定義為

$$I^{kl}\{\psi'(p^r)\,\delta\,(p^0-[\ \ ]^{\frac{1}{2}})\}=[(I^{kl})'\psi'(p^r)]\,\delta\,(p^0-[\ \ ]^{\frac{1}{2}})\quad (r=1,2,3).\ (32)$$

$(I^{kl})'$適合I^{kl}所適合的對換關係,也是不齊次羅倫茲變換的表示的生成子. 求它們時,我們只須在(30)的右方將含有$\partial/\partial p^0$的諸項刪去,以$[m^2+P^2]^{\frac{1}{2}}$代替p^0. 同樣,自(3)式我們知道

$$I^\mu=ip^\mu,\quad (33)$$

用了本節的辦法,得

$$\left.\begin{aligned}I^{r\prime}&=ip^r,\qquad (r=1,2,3)\\ I^{0\prime}&=i\,\{m^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}\right\}\quad (34)$$

有一個不變量,即可構成一個"量子力學中的補助條件" (supplementary condition). 如果我們在表示基中消去這個補助條件,我們便同時改變了I_{kl}, I_k. 這便是以上將I_{kl}, I_k變為I_{kl}', I_k'的精神. 作者曾本此精神,消去了量子電動力學中的二個補助條件[2],進而證明尋常靜電中的庫倫作用能可以在哈密爾頓(Hamiltonian)中出現而不致損害了理論的相對論性.

四. 在三度空間有已知轉動性質的量子力學系統的討論

首先我們指出(30),(33)中的I_{kl}, I_l並不給我們一個么正(unitary)表示,而在量子力學中,這個條件是必要的. 為達到這個目的,我們引入一個表示基的變化

$$\psi\to\psi'=\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{1}{2}}\psi.\quad (35)$$

I_{10}, I_{20}, I_{30}中最後的括號的兩項分別的增加了一項

$$-p_1/2p_0,\quad -p_2/2p_0,\quad -p_3/2p_0.$$

其他處沒有變化. 此後我們再引入變換(31),即

$$\psi'(p,\zeta)=\psi''(p_1,p_2,p_3,\zeta)\,\delta\,\{p^0-[m^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2]^{\frac{1}{2}}\},$$

獲得了新的I_{kl}, I_k. 它們乘上i後都是自軛算子.

一個最簡單的量子力學系統,應該相當於一個不可分的不齊次羅倫茲變換的表示,亦即相當於

$$(i\,V_{12})^2+(i\,V_{23})^2+(i\,V_{31})^2\quad (36)$$

的一個特徵值 $v(v+1)$，或相當於一個 v． v 在此處是整數或半整數． 在量子力學中 $I_{rs}, I_r\ (r,s=1,2,3)$ 取比較簡單的形式，而 I_0 取較複雜的形式；而在這裏 I_μ 都取比較簡單的形式． 它們顯然只須經過一個相似變換便可以互相轉換．

一個複雜的量子力學系統的 I_{kl}, I_k，應該是上段中的 I_{kl}, I_k 等的直接和 (direct sum)． 如果上段中相當於 v 的 I_{kl}, I_k 稱爲 $I_{kl}(v), I_k(v)$，則除了一個相似關係外，

$$\left.\begin{aligned} I_{kl}&=\sum n(v)\ I_{kl}(v), \\ I_k&=\sum n(v)\ I_k(v), \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

其中有

$$I_{rs}=\sum n(v)\ I_{rs}(v) \tag{38}$$

的關係． $I_{rs}, I_{rs}(v)$ 本身都是一個直接和；如果令三度空間轉動羣的不可分的表示的 I 所成的

$$(i\,I_{12})^2+(i\,I_{23})^2+(i\,I_{31})^2$$

的特徵值爲 $j(j+1)$，而稱與它相當的 I 爲 $I^0(j)$，我們有

$$\left.\begin{aligned} I_{rs}&=\sum n_j\ I_{rs}{}^0(j), \\ I_{rs}(v)&=\sum n_j(v) I_{rs}{}^0(j). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

由(38)，(39)得

$$n_j=\sum_v n(v)\ n_j(v). \tag{40}$$

如果 I_{rs} 是已知的，n_j 可以決定；又因 $n_j(v)$ 是可以計算的，上式便給我們 $n(v)$． 因此如果一個量子力學系統在三度空間中轉動的性質是已知的，它的其他性質也完全決定． 由於 $n_j(v)$ 的值，(40)式中有了 n_j 後只能有一個解 $n(v)$．

$n_j, n_j(v)$ 可以從羣理論方法中 (group-theoretical method) 獲得，例如求 n_j 時我們作

$$\int \chi(\omega)\ \chi_j{}^*(\omega)\ d\omega$$

的計算等等；上式中 ω 代表一羣素，χ 代表它的特徵 (character)，$d\omega$ 代表羣流形 (manifold) 中一個體積素． 但這是不方便的；一個更方便的辦法便是令 $J\equiv(iI_{12})^2+(iI_{23})^2+(iI_{31})^2$ 與 iI_{12} 同時對角化，求它們的同時本徵矢量 (simultaneous eigenvector)，數一數相當於本徵值 j, j_z 的本徵矢量有多少． 如此 $n_j, n_j(v)$ 便可以求得． 以下便是 $n_j(v)$ 的計算．

$$-\{I_{12}^2(v)+I_{23}^2(v)+I_{31}^2(v)\}=-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}$$

$$-V_{12}^2\,2(1-\cos\theta)/\sin^2\theta$$

$$+2V_{12}\,(1-\cos\theta)/\sin^2\theta\,\partial/\partial\varphi, \tag{41}$$

$$iI_{12}=iV_{12}-i\,\partial/\partial\phi. \tag{42}$$

令 iV_{12} 對 ψ 中 ζ 附標發生作用，它的本徵矢量 $\psi(\zeta, v_z)$ 適合

$$iV_{12}\,\psi\,(\zeta, v_z)=v_z\,\psi\,(\zeta, v_z),$$

$$(v_z=v, v-1, \cdots\cdots, -v) \tag{43}$$

取 ψ 為

$$\psi\,(\theta)\,e^{im_z\phi}\,\psi\,(\zeta, v_z), \tag{44}$$

得
$$iI_{12}\,\psi=(v_z+m_z)\,\psi,$$

即
$$j_z=v_z+m_z. \tag{45}$$

$\psi\,(\theta)$ 適合

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{m_z^2}{\sin^2\theta}+\frac{v_z^2\,2\,(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}+\right.$$

$$\left.+2\,v_z\,m_z\,(1-\cos\theta)/\sin^2\theta\right\}\psi\,(\theta)=K\,\psi\,(\theta). \tag{46}$$

K 是我們所要求的． 令 $\cos\theta=t$，得

$$(1-t^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-2t\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{2v_z^2}{1+t}\,\psi-\frac{2v_z m_z}{1+t}\,\psi+\left(K-\frac{m^2}{1-t^2}\right)\psi=0. \tag{47}$$

它的解是[3]

$$P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}\,m_z+v_z & \frac{1}{2}+\{K+\frac{1}{4}\}^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\,m_z, & t \\ -(\frac{1}{2}\,m_z+v_z) & \frac{1}{2}-\{K+\frac{1}{4}\}^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}\,m_z & \end{matrix}\right\}, \tag{48}$$

亦即是

$$(t+1)^{\left|\frac{1}{2}m_z+v_z\right|}(t-1)^{\left|\frac{1}{2}m_z\right|}\times$$

$$\times P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{1}{2}+(K+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\left|\frac{1}{2}\,m_z\right|+\left|\frac{1}{2}\,m_z+v_z\right| & 0 & \frac{1}{2}(t+1) \\ -\left|m_z+2v_z\right| & \frac{1}{2}-(K+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\left|\frac{1}{2}\,m_z\right|+\left|\frac{1}{2}\,m_z+v_z\right| & -\left|m_z\right| & \end{matrix}\right\}. \tag{49}$$

在 $t=-1$ 附近性質正常的解是

$$(t+1)^{\left|\frac{1}{2}m_z+v_z\right|}(t-1)^{\left|\frac{1}{2}m_z\right|}F\{\tfrac{1}{2}+(K+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\left|\tfrac{1}{2}m_z\right|+\left|\tfrac{1}{2}m_z+v_z\right|,$$
$$\tfrac{1}{2}-(K+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\left|\tfrac{1}{2}m_z\right|+\left|\tfrac{1}{2}m_z+v_z\right|,1+\left|m_z+2v_z\right|,\tfrac{1}{2}(t+1)\}; \tag{50}$$

此處 $F(a,b,c,t)$ 乃高級幾何級數(hypergeometric series)．在此

$$R(c-a-b)=R(-|m_z|)\leqslant 0,$$

故此級數在 $t=1$ 點，在一般情形下不收斂．因此 K 的值必須如此，使此級數中斷．換句話說，a,b 兩者之一，必須有一個等於一個負整數 $-n$，或零，使 F 成為賈可比多項式(Jacobian polynomial)．由此得

$$K=\{n+\left|\tfrac{1}{2}m_z\right|+\left|\tfrac{1}{2}m_z+v_z\right|\}\{n+\left|\tfrac{1}{2}m_z\right|+\left|\tfrac{1}{2}m_z+v_z\right|+1\}, \tag{51}$$

亦即

$$\begin{aligned}K&=j(j+1),\\ j&=n+\left|\tfrac{1}{2}m_z\right|+\left|\tfrac{1}{2}m_z+v_z\right|\\ &=n+\left|\tfrac{1}{2}j_z-\tfrac{1}{2}v_z\right|+\left|\tfrac{1}{2}j_z+\tfrac{1}{2}v_z\right|.\\ &(n=0,1,2,\cdots\cdots)\end{aligned} \tag{52}$$

如果令 $M(j_1)$ 為使 J 同 iI_{12} 同時對角化而使 iI_{12} 的本徵值為 j_1 的本徵矢量的數目，則

$$n_{j_1}(v)+n_{j_1+1}(v)+\cdots\cdots=\sum_{j\geqslant j_1}n_j(v)=M(j_1);\quad (j_1\geqslant 0) \tag{53}$$

由此得

$$n_j(v)=M(j)-M(j+1). \tag{54}$$

由於(52)，得

$$M(j_1)=\sum_{v_z=-v}^{v}\{j_{\max}-\left|\tfrac{1}{2}j_1-\tfrac{1}{2}v_z\right|-\left|\tfrac{1}{2}j_1+\tfrac{1}{2}v_z\right|\}; \tag{55}$$

式中 $j_{\max}$ 代表 j 的最高值．由於(54)，(55)，我們即可獲得

$$\begin{aligned}n_j(v)=\sum_{v_z=-v}^{v}\{&\left|\tfrac{1}{2}j+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}v_z\right|+\left|\tfrac{1}{2}j+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}v_z\right|\\ &-\left|\tfrac{1}{2}j-\tfrac{1}{2}v_z\right|-\left|\tfrac{1}{2}j+\tfrac{1}{2}v_z\right|\}.\end{aligned} \tag{56}$$

由(52)式我們知 j,v 必須同時為整數，或半整數，才能使 $n_j(v)$ 不等於零．當 j,v 同時為整數或半整數時，上式給我們

$$\left.\begin{aligned}n_j(v)&=2v+1,\qquad j\geqslant v\\ &=2j+1.\qquad j<v\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

這便是我們所要的結果．

一個量子力學系統的性質爲其在三度空間轉動下的性質所決定的事實，在量子力學中有極重要的意義．例如，系統有二個粒子(x_1, y_1, z_1)，(z_2, y_2, z_2)．如果我們假定

$$\left.\begin{aligned} I_{12} &= -\left(X\frac{\partial}{\partial Y}-Y\frac{\partial}{\partial X}\right)-\left(\xi\frac{\partial}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial}{\partial\xi}\right), \\ I_{13} &= -\left(X\frac{\partial}{\partial Z}-Z\frac{\partial}{\partial X}\right)-\left(\xi\frac{\partial}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\right), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

$$\left.\begin{aligned} X &= \tfrac{1}{2}(x_1+x_2), \qquad Y = \tfrac{1}{2}(y_1+y_2), \cdots\cdots, \\ \xi &= \tfrac{1}{2}(x_1-x_2), \qquad \eta = \tfrac{1}{2}(y_1-y_2), \cdots\cdots, \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

那麼量子系統是完全決定了．這便是二個自由運動的粒子的系統．其他應用到量子力學處，以後再討論．

五．總　　結

在本文中，我們作了以下的工作：

(1) 將 Wigner 所用以研究不齊次羅倫茲變換的表示的方法，稍加改變，使表示基（即波函數）的獨立變數本身即是一變換，結果使所有的表示取了標準表示的形式．

(2) 用 Wigner 的結果，計算了第一篇中所提起的算子 I_{kl}, I_k 等．

(3) 討論了一個在三度空間中轉動下有已知性質的量子力學系統的性質，指出了如果在三度空間中轉動下性質是已知的，這系統所有的性質都可以確定．

參考文獻

[1] Wigner, E., *Annals of Math.*, 1939, 40, 149.

[2] 張宗燧, *Chinese J. of Phys.*, 1951, 8, 123.

[3] Whittaker and Watson, Modern Analysis.

CALCULATIONS OF SOME OPERATORS IN RELATIVISTIC QUANTUM MECHANICS

PART II

T. S. Chang

(Institute of Mathematics, Academica Sinica and Department of Physics, Peking Normal University)

ABSTRACT

It is shown that by a slight adaptation of Wigner's work on the representation of the inhomogeneous Lorentz group, all representations are brought formally into a form resembling the standard representation. Thes is achieved by letting the argument in the representation basis (or the wave function) to consist of a homogeneous Lorentz transformation.

The infinitesimal generators in Wigner's work are calculated. The results are

$$I_\mu = ip_\mu,$$

$$I_{10} = -\{p_0(\cos\theta-1)\sin\varphi/P\sin\theta\}\, V_{12} - (m/P)(\cos\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\, V_{13} - (m/P)(\cos\theta-1)\cos\varphi\sin\varphi\, V_{23} - (p_0\,\partial/\partial p^1 - p_2\,\partial/\partial p^0),$$

$$I_{20} = \{p_0(\cos\theta-1)\cos\varphi/P\sin\theta\}\, V_{12} - (m/P)(\cos\theta-1)\cos\varphi\sin\varphi\, V_{13} - (m/P)(\cos\theta\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\, V_{23} - (p_0\,\partial/\partial p^2 - p_2\,\partial/\partial p^0),$$

$$I_{30} = (m/P)\sin\theta\cos\varphi\, V_{13} + (m/P)\sin\theta\sin\varphi\, V_{23} - (p_0\,\partial/\partial p^3 - p_3\,\partial/\partial p^0),$$

$$I_{12} = V_{12} - (p_2\,\partial/\partial p^1 - p_1\,\partial/\partial p^2),$$

$$I_{13} = -\{(1-\cos\theta)\sin\varphi/\sin\theta\}\, V_{12} - (p_3\,\partial/\partial p^1 - p_1\,\partial/\partial p^3),$$

$$I_{23} = \{(1-\cos\theta)\cos\varphi/\sin\theta\}\, V_{12} - (p_3\,\partial/\partial p^2 - p_2\,\partial/\partial p^3).$$

$$(I_{kl} = -I_{lk})$$

In the above, $\varphi\,(p^\mu,\zeta)$ is the representation basis, I_{kl} and I_k are the infinitesimal generators corresponding to rotations and translations,

$$g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1, \qquad m^2 = p_\mu p^\mu, \qquad p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu,$$

$V^1{}_2$, $V^2{}_3$ and $V^3{}_1$ act on ζ and are the infinitesimal generators of a three dimensional rotation group, and finally (P,θ,φ) are introduced through p^μ,

$$p^1 = P\sin\theta\cos\varphi, \qquad p^2 = P\sin\theta\sin\varphi, \qquad p^3 = P\cos\theta.$$

In the last section, the properties of a quantum-mechanical system with

known properties under a three dimensional rotation group are discussed. In particular, the obvious but important conclusion that the general properties are fixed as soon as the properties under three dimensional rotations are given is pointed out.