關於多重面積測度空間的體積積分的第一及第二變差*

谷超豪 (復旦大學)

蘇步青 (復旦大學，中國科學院數學研究所)

一、緒論

這篇文章裏面所研究的空間是有兩種結構的. 第一種結構是空間爲具有 K 次元面積測度的; 第二種結構是空間有以 K 重原素做支持原素的遠交聯絡的. 但這種結構中間, 存在着一種關係: 在 K 重面積原素依其本身做支持原素的平行移動下, 空間的測度是不變的.

在 $K=1$ 的場合, 這是培爾瓦 (L. Berwald) 的"一般度量空間" [1][1]. 至於一般的 K, 瓦格涅 (B. B. Вагнер) 曾經有過關於面積測度的研究 [2]. 第二種結構的空間是 K 展空間的擴充; 谷超豪已另有討論 [3]. 這篇論文所包括的主要結果如次:

(1) 證明由這遠交聯絡所決定的某一類流形是 K 重面積變分問題的極值流形.

(2) 在第二類結構的空間, 如何導入對應的 K 重面積測度.

(3) 決定這 K 重面積測度積分的第一及第二變差.

爲了要導出波爾特洛蒂 (E. Bortolotti) 的方程式, 台維斯 (E. T. Davies) 曾經計算黎曼空間體積積分的第一及第二變差 [4]. 這是我們的結果的一個特殊情形 (見第八節). 同樣, 培爾瓦 [5] 較早地在以面積概念爲基礎的正則嘉當空間裏決定高

* 1952 年 7 月 12 日收到

1) 包括中的數字是指示文後所附參考文獻的論文篇目.

許米德 (Koschmieder) 不變式在內的超曲面積積分的第二變差，並且蘇步青 [6] 推廣列偉齊維他 (Levi-Civita) 的短程離差論到這空間．近年弗利曼 (J. G. Freeman) 也研究了一般度量空間的極小流形 [7]．本文裏所獲的第二變差是遠交性質的，但也可推廣到體積的不變方式 [8]．計算變差的方法和培爾瓦的 [5] 相類似．

在本文第二節中敍述在所論的空間如何導入以 K 重原素做支持原素的遠交聯絡．這聯絡是和 K 展空間的遠交聯絡相像，而比它還要普遍一點．在這樣的遠交聯絡空間再導入體積積分，使滿足上述的關係 (第三節)．在第四節計算這體積積分的歐拉 (Euler) 向量和第一變分．從此定義極值流形，作為平流形的擴充，並且討論特殊的 K 展空間 (第五節)．接下的兩節 (第六、七節) 完全是計算體積積分的第二變差；特別在黎曼空間的結果是值得注意的 (第八節)．

二、某些遠交聯絡的空間

在 N 次元數的空間 (x^i) 的各點都添上一 K 重支持原素 (p^i_α) 及一系函數 Γ^i_{jk}．從此以後，凡拉丁字母表示 $1,2,\cdots,N$，且希臘字母表示 $1,2,\cdots,K$，但 $K<N$．對於本文的討論必須假定這些 Γ 是從一系函數 $H^i_{\alpha\beta}(x^k,p^r_\nu)$ 所導出的，就是，

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{K(K+1)}H^i_{\alpha\beta}\big|^{\alpha\beta}_{jk}, \tag{2.1}$$

式中 $H^i_{\alpha\beta}$ 是關於 α,β 的對稱齊次函數系統 [9]，且為簡便表示起見，採用了記號

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}}{\partial x^i}=F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\,,i}, && \frac{\partial F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}}{\partial p^i_\alpha}=F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}\big|^{\alpha}_{i},\\ &\frac{\partial^2 F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}}{\partial x^i\partial x^j}=F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\,,ij}, && \frac{\partial^2 F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}}{\partial p^i_\alpha\partial p^j_\beta}=F^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}\big|^{\alpha\beta}_{ij}.\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

此外還需要添加一條件：在一 K 次元可導流形 V_K 的各點

$$x^i=x^i(u^\alpha) \tag{2.3}$$

所做的函數系統

$$P^i_{\alpha\beta}\equiv\frac{\partial^2x^i}{\partial u^\alpha\partial u^\beta}+H^i_{\alpha\beta}(x^k,p^r_\nu)\qquad\left(p^r_\nu=\frac{\partial x^r}{\partial u^\nu}\right), \tag{2.4}$$

對於兩種變換

$$\bar{x} \longleftrightarrow x, \quad \det\left|\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right| \neq 0; \quad \bar{u} \longleftrightarrow u, \quad \det\left|\frac{\partial \bar{u}^\alpha}{\partial u^\beta}\right| \neq 0 \tag{2.5}$$

必須是張量不變的 [10].

在這些條件之下，可以保證 Γ^i_{jk} 是空間 (x^i) 的一遠交聯絡的係數. 我們還可以證實在 K 展空間論的一些規律都適用於函數 Γ^i_{jk}. 例如，成立 [11]

$$\Gamma^i_{jk}\big|^\alpha_h p^j_\alpha = 0. \tag{2.6}$$

事實上，從 (2.1) 及函數

$$H^i_{\beta\gamma}\big|^{\gamma\alpha}_{kh} = H^{i\cdot\alpha}_{kh\beta}$$

的齊次性質獲得

$$K(K+1)\Gamma^i_{jk}\big|^\alpha_h p^j_\alpha = H^i_{\beta\gamma}\big|^{\beta\gamma\alpha}_{jkh} p^j_\alpha = H^{i\cdot\alpha}_{kh\beta}\big|^\beta_j p^j_\alpha = \delta^\beta_\beta H^{i\cdot\alpha}_{kh\alpha} - \delta^\alpha_\alpha H^{i\cdot\beta}_{kh\beta} = 0.$$

三、 具有多重面積測度的遠交聯絡空間

讓我們討論在前節所定義的 N 次元遠交聯絡空間 S_N. 設 (2.3) 是在 S_N 內一個 K 次元可導的流形 V_K 的方程式；設 B_{K-1} 是包圍着一區域 R 的 V_K 的一定封閉超曲面. 我們定義 R 的“體積”為 K 重積分

$$A = \int_R F(x^k, p^r_\nu)(du)^K$$
$$\left(p^r_\nu = \frac{\partial x^r}{\partial u^\nu}\right), \tag{3.1}$$

但 $(du)^K$ 是 $du^1 du^2 \cdots du^K$ 的略寫且函數 $F(x^k, p^r_\nu)$ 在 (2.4) 的第一變換下是不變的，而在 (2.4) 的第二變換下卻是階零及重 1 的正齊次函數，就是

$$F(x^k, p^r_\nu A^\nu_\mu) = \det|A^\nu_\mu|\, F(x^k, p^i_\alpha), \tag{3.2}$$

式中 $\det|A^\nu_\mu| \neq 0$, 並且 A^ν_μ 與 x^k 無關. 凡用於面積測度的這類函數必須滿足推廣的齊次函數的規律；例如，

$$\delta^{\gamma}_{\sigma} F(x^k, p^i_\alpha) = F(x^k, p^i_\alpha)\,|^{\gamma}_{j}\, p^j_\sigma, \tag{3.3}$$

$$F(x^k, p^i_\alpha)\,|^{\rho\sigma}_{jk}\, p^j_\beta = F(x^k, p^i_\alpha)\,|^{\sigma}_{k}\, \delta^{\rho}_{\beta} - F(x^k, p^i_\alpha)\,|^{\rho}_{k}\, \delta^{\sigma}_{\beta}. \tag{3.4}$$

為了在 S_N 的兩種結構之間給予一個聯繫，特下一條件：如果平行推移一 K 重面積原素，使原素本身作為支持原素，則面積測度仍不改變．解析的表示是在

$$d\,p^i_\alpha + \Gamma^i_{jk}(x^h, p^r_\nu)\, p^j_\alpha\, d\,x^k = 0 \tag{3.5}$$

條件下，

$$\delta F(x, p^r_\nu) = \frac{\partial F}{\partial x^k}\, d\,x^k + F\,|^{\alpha}_{i}\, d\,p^i_\alpha = 0,$$

或者

$$(F_{\cdot i} - F\,|^{\alpha}_{h}\, p^j_\alpha\, \Gamma^h_{ij})\, d\,x^i = 0.$$

因此，兩種結構的聯繫方程式是

$$F_{\cdot i} = F\,|^{\alpha}_{h}\, p^j_\alpha\, \Gamma^h_{ij}. \tag{3.6}$$

容易證明，在 (2.5) 的第一變換下遠交聯絡 Γ^i_{jk} 必滿足規律

$$\bar{\Gamma}^r_{st}\, \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^r} = \Gamma^i_{jk}\, \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^s}\, \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^t} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^s\, \partial \bar{x}^t}; \tag{3.7}$$

如果把變換

$$\bar{p}^r_\alpha = \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^i}\, p^i_\alpha \tag{3.8}$$

配合於 (2.5) 的第一變換，就得知 (3.6) 的兩側都代表了一共變向量的支量．

若一流形 V_K 的 K 重面積原素在聯絡 Γ^i_{jk} 下沿它本身是平行推動的話，那末從 (3.5) 得

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha\, \partial u^\beta} + \Gamma^i_{jk}(x^k, p^r_\nu)\, p^j_\alpha\, p^k_\beta = 0, \tag{3.9}$$

或者依 (2.1) 改寫，

$$P^i_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.10}$$

這種流形稱為平流形．

四、歐拉流的向量及體積積分的第一變差

現在取微小變換

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x^k, t)\,\delta t; \tag{4.1}$$

經過這微小變換之後，依 (2.3) 所定義的基層流形 V_K 變到鄰近的 $\bar{V}_K$；它的方程式是

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(u^\alpha). \tag{4.2}$$

原素 (p^i_α) 變到對應的流形面積原素

$$\bar{p}^i_\alpha = p^i_\alpha + \xi^i{}_{,j} p^j_\alpha\,\delta t. \tag{4.3}$$

此地假定由 (4.2) 所定義的那些 $\bar{V}_K$ 有共同的邊緣 B_{K-1}，並且 ξ^i 在 B_{K-1} 上等於零.

依據假設，度量函數 F 在擴大變換 (4.1) 及 (4.2) 之下是不變的，於是 $\bar{V}_K$ 的對應"體積"是由積分

$$\bar{A} = \int_R F(\bar{x}^k, \bar{p}^r_\gamma)(du)^K \tag{4.4}$$

定義起來的.

把 (4.1) 及 (4.3) 代入於 (4.4) 且關於 δt 展開它做冪級數，就可求出積分 (3.1) 的第一變差:

$$\delta A = -\int_R E_i\,\delta x^i (du)^K, \tag{4.5}$$

但 $\delta x^i = \xi^i\,\delta t$ 且 E_i 表示歐拉流的向量

$$E_i = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}(F|^\alpha_i) - F_{\cdot i}\,. \tag{4.6}$$

為改寫 E_i，計算導數

$$\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(F|^\alpha_i) = F|^\alpha_{i\cdot j} p^j_\alpha + F|^{\alpha\beta}_{ik} \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

$$= F_{\cdot j}|^\alpha_i p^j_\alpha + F|^{\alpha\beta}_{ik} \frac{\partial^2 x^k}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

並且應用關係式 (3.6). 依 (2.6) 化簡的結果,

$$E_i = F\,|_{ij}^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 x^j}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \Gamma^j_{kl}\, p^k_\alpha p^l_\beta\right),$$

或者用 (2.1) 及 (2.4) 縮寫它,

$$E_i = F\,|_{ij}^{\alpha\beta} \cdot P^j_{\alpha\beta}. \tag{4.7}$$

因此, 所求的第一變差是

$$\delta A = -\int_R F\,|_{ij}^{\alpha\beta}\, P^j_{\alpha\beta}\, \delta x^i (du)^K; \tag{4.8}$$

且對於任何 δx^i 要消滅的條件是

$$F\,|_{ij}^{\alpha\beta}\, P^j_{\alpha\beta} = 0. \tag{4.9}$$

凡依 (4.9) 特徵化的流形 V_K 稱爲空間的極值流形. 明顯地, 滿足(3.10), 就是

$$P^i_{\alpha\beta} = 0 \tag{4.10}$$

的流形一定是極值流形. 換句話說:

S_N 中存在的平流形一定是極值流形.

遠交的 K 展空間是一具有第二種結構的空間. 所以從上列結果又得推論:

如果遠交的 K 展空間能够差使一 K 重面積原素的測度經過參考於它本身的平行移動時仍不改變, 那末空間的所有 K 展都是極值流形.

這推論相當於普通空間的所有平面都是極小曲面的事實.

五、 特殊的遠交聯絡空間

在培爾瓦空間中, 從線素的測度可以決定一遠交聯絡使前節推論中所述的條件成立. 因此, 所討論的空間是培爾瓦空間的擴充. 在一般情形下, 遠交聯絡的決定不是唯一的, 因爲它所滿足的只是方程式 (3.6) 與一非常廣泛的條件 (2.1) 而已. 至於它的相反的問題, 在一具有 K 重原素來做支持原素的遠交的聯絡空間

(特別是 K 展空間)，却未必能決定一面積測度與之對應. 爲了這目的，必須解微分方程式系統 (3.6)，或者用共變導數表示的方程式系統

$$F_{|j} = 0. \tag{5.1}$$

與附帶方程式 (3.2)，但這一方程式微分的結果與 (5.1) 完全相容.

利用李契 (Ricci) 恒等式的類似，作出普埃松 (Poisson) 括弧式，使原方程式系統擴大做

$$\left.\begin{aligned} &F_{|j} = 0, \\ &F|^{\alpha}_{i} p^h_{\alpha} R^i_{hjl} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

式中 R^i_{hjl} 是曲率張量

$$R^i_{hjl} = \Gamma^i_{hj\cdot l} - \Gamma^i_{hl\cdot j} + \Gamma^i_{hl}|^{\tau}_{m} \Gamma^m_{nj} p^n_{\tau} - \Gamma^i_{hj}|^{\tau}_{m} \Gamma^m_{nl} p^n_{\tau} + \Gamma^m_{hj} \Gamma^i_{ml} - \Gamma^m_{hl} \Gamma^i_{mj}. \tag{5.3}$$

可依照一般的方法，繼續做它的積分可能條件，由這些的獨立性，可以知道 F 是否存在. 但對於一類特殊的空間，就是關係

$$p^h_{\alpha} R^i_{hjl} = 0 \tag{5.4}$$

恒等地成立的時候 (這類顯然是 K 展空間)，(5.2) 是完全可積的系統. 因此，獲得

定理. 在曲率張量滿足形式 (5.4) 的 K 展空間中，可以決定一 K 次元面積測度，使其在一定點與具有特定的 K 重面積測度的有心遠交空間相切.

六、 $\dfrac{\delta^2 F}{\delta t^2}$ 的計算

當變數 x^k 及 p^{γ}_{γ} 順次受到變換 (4.1) 及 (4.3) 時，度量函數 $F(x^k, p^{\gamma}_{\gamma})$ 的第二變差是必須計算的.

因爲

$$\delta^2 F = F_{\cdot ij}\, \delta x^i\, \delta x^j + F_{\cdot i}|^{\alpha}_{h}\, \delta x^i\, \delta p^h_{\alpha} + F|^{\alpha\beta}_{hk}\, \delta p^h_{\alpha}\, \delta p^k_{\beta} + F_{\cdot i}\, \delta^2 x^i + F|^{\alpha}_{h}\, \delta^2 p^h_{\alpha}$$

且

$$\delta x^i = \xi^i \delta t,$$

$$\delta p^h_{\alpha} = \xi^h_{\cdot j} p^j_{\alpha} \delta t,$$

$$\delta^2 x^i = \left(\xi^i_{\cdot j} \xi^j + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right) (\delta t)^2,$$

$$\delta^2 p^h_\alpha = \left(\xi^h_{\cdot jk} \xi^k p^j_\alpha + \xi^i_{\cdot j} \xi^j_{\cdot k} p^k_\alpha + \frac{\partial^2 \xi^h}{\partial x^j \partial t} p^j_\alpha \right) (\delta t)^2,$$

我們獲得

$$\frac{\delta^2 F}{\delta t^2} = F_{\cdot ij} \xi^i \xi^j + 2 F_{\cdot i} |^\alpha_h \xi^i \xi^h_{\cdot j} p^j_\alpha + F |^{\alpha\beta}_{hk} \xi^h_{\cdot j} \xi^k_{\cdot l} p^j_\alpha p^l_\beta + F_{\cdot i} \left(\xi^i_{\cdot j} \xi^j + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right)$$

$$+ F |^\alpha_h p^j_\alpha \left(\xi^h_{\cdot jk} \xi^k + \xi^h_{\cdot l} \xi^l_{\cdot j} + \frac{\partial \xi^h_{\cdot j}}{\partial t} \right). \tag{6.1}$$

微分 (3.6) 的兩側且利用同一等式, 就得

$$F_{\cdot ij} = F |^{\alpha\beta}_{hl} p^k_\alpha p^m_\beta \Gamma^h_{ik} \Gamma^l_{jm} + F |^\alpha_h p^k_\alpha \Gamma^h_{jl} \Gamma^l_{ik} + F |^\alpha_h p^k_\alpha \Gamma^h_{ik \cdot j} + p^k_\alpha p^m_\beta F |^\beta_l \Gamma^l_{ik} \Gamma^l_{jm} |^\alpha_h, \tag{6.2}$$

$$F_{\cdot i} |^\alpha_h = F |^{\alpha\beta}_{hl} p^k_\beta \Gamma^l_{ik} + F |^\alpha_l \Gamma^l_{ih} + F |^\beta_l p^k_\beta \Gamma^l_{ik} |^\alpha_h. \tag{6.3}$$

因此, 可以改寫 (6.1),

$$\frac{\delta^2 F}{\delta t^2} = F |^{\alpha\beta}_{hl} p^j_\alpha p^k_\beta (\Gamma^h_{mj} \Gamma^l_{nk} \xi^m \xi^n + \xi_{\cdot j} \xi_{\cdot k} + 2 \xi^i \xi^h_{\cdot j} \Gamma^l_{ik})$$

$$+ F |^\alpha_h p^j_\alpha \xi^l \Big[\xi^h_{\cdot jl} + \xi^m_{\cdot l} \Gamma^h_{mj} + \xi^m_{\cdot j} \Gamma^h_{ml} + \xi^n_{\cdot k} p^k_\beta \Gamma^h_{jl} |^\beta_n$$

$$+ (\Gamma^h_{ij \cdot l} + \Gamma^h_{ml} \Gamma^m_{ij} + p^m_\beta \Gamma^n_{im} \Gamma^h_{jl} |^\beta_n) \xi^i$$

$$+ F |^\alpha_h (\xi^h_{\cdot l} + \Gamma^h_{ml} \xi^m) \frac{\partial \xi^l}{\partial u^\alpha} + p^j_\alpha p^k_\beta \xi^l F |^\alpha_h \Gamma^h_{jl} |^\beta_n \xi^n_{\cdot k}$$

$$+ F |^\alpha_h p^j_\alpha \left\{ \left(\frac{\partial \xi^h}{\partial t} \right)_{,j} + \Gamma^h_{ij} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right\} \Big]. \tag{6.4}$$

由於最後算式 (6.4) 在體積積分的第二變差內是作爲被積分的函數, 把它寫成另一形式較爲方便, 就是改寫其中一項

$$F|^{\alpha}_{h}(\xi^{h}_{.l}+\Gamma^{h}_{ml}\xi^{m})\frac{\partial\xi^{l}}{\partial u^{\alpha}}=\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}[\xi^{l}F|^{\alpha}_{h}(\xi^{h}_{.l}+\Gamma^{h}_{ml}\xi^{m})]+\mathfrak{E}, \tag{6.5}$$

但

$$\mathfrak{E}=-\xi^{l}\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}\{F|^{\alpha}_{h}(\xi^{h}_{.l}+\Gamma^{h}_{ml}\xi^{m})\}. \tag{6.6}$$

可是

$$\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}=p^{j}_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{j}}+\frac{\partial^{2}x^{n}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}}\frac{\partial}{\partial p^{n}_{\beta}},$$

所以

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}=&-F|^{\alpha}_{h}\xi^{l}p^{j}_{\alpha}(\xi^{h}_{.jl}+\xi^{m}_{.j}\Gamma^{h}_{ml}+\xi^{m}_{.l}\Gamma^{h}_{mj}+\xi^{i}\Gamma^{m}_{il}\Gamma^{h}_{jm})\\&-F|^{\alpha\beta}_{hl}\Gamma^{l}_{jk}p^{j}_{\alpha}p^{k}_{\beta}\xi^{m}(\xi^{h}_{.m}+\Gamma^{h}_{nm}\xi^{n})\\&-(F|^{\alpha\beta}_{hn}\xi^{h}_{;l}\xi^{l}+F|^{\alpha}_{h}\xi^{m}\Gamma^{h}_{ml}|^{\beta}_{n})\frac{\partial^{2}x^{n}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}}.\end{aligned}$$

把最後式代入於 (6.5) 且用所獲的項於 (6.4) 的對應項；經過適當指數的更改，導出最後形式的結果:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^{2}F}{\delta^{2}t}=&\frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}(\xi^{l}F|^{\alpha}_{h}\xi^{h}_{;l})-F|^{\alpha\beta}_{hn}\xi^{h}_{;l}\xi^{l}P^{n}_{\alpha\beta}\\&+F|^{\alpha\beta}_{hl}p^{j}_{\alpha}p^{k}_{\beta}\xi^{h}_{;l}\xi^{l}_{;k}+F|^{\alpha}_{h}p^{j}_{\alpha}\left(\frac{\partial\xi^{h}}{\partial t}\right)_{;j}\\&+F|^{\alpha}_{h}p^{j}_{\alpha}\xi^{l}(R^{h}_{.ijl}+2\Gamma^{h}_{jl}|^{\beta}_{n}p^{m}_{\beta}\xi^{n}_{;m})\\&-F|^{\alpha}_{h}\xi^{m}\xi^{l}\Gamma^{h}_{ml}|^{\beta}_{n}P^{n}_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{6.7}$$

式中 $\xi^{i}_{;j}$ 是共變導數

$$\xi^{i}_{;j}=\xi^{i}_{.j}+\Gamma^{i}_{hj}\xi^{h} \tag{6.8}$$

且 $R^{h}_{.ijl}$ 是遠交的曲率張量 (5.3).

七、 體積積分的第二變差

依據公式

$$\delta^2 A = \int_R \delta^2 F(x^k, p^r_\nu)(du)^K \tag{7.1}$$

及 (6.7) 不難表出所求的第二變差.

因爲在區域 R 的邊緣 B_{K-1} 上, $\xi^i = 0$, 所以

$$\int_R \frac{\partial}{\partial u^\alpha}(\xi^l F|^\alpha_h \xi^h_{;l})(du)^K$$

$$= \int_{B_{K-1}} \sum \pm \xi^l F|^\alpha_h \xi^h_{;l}\, du^1 \cdots du^{\alpha-1} du^{\alpha+1} \cdots du^K = 0.$$

此外我們僅討論極值流形 V_K, 關係 (4.9) 成立, 於是獲得

$$\frac{\delta^2 A}{\delta t^2} = \int_R \Big\{ F|^{\alpha\beta}_{hl} \xi^h_{;j} \xi^l_{;k} p^j_\alpha p^k_\beta + F|^\alpha_h p^j_\alpha R^h_{\cdot ijk} \xi^i \xi^k$$

$$+ F|^\alpha_h \Gamma^h_{jl}|^\beta_n (2 p^j_\alpha p^k_\beta \xi^n_{;k} \xi^l - P^n_{\alpha\beta} \xi^j \xi^l) + F|^\alpha_h p^j_\alpha \Big(\frac{\partial \xi^h}{\partial t}\Big)_{;j} \Big\} (du)^K. \tag{7.2}$$

若導入記號

$$D_\alpha T^{\cdot}_{\cdot} = p^j_\alpha T^{\cdot}_{\cdot;j}, \tag{7.3}$$

那末第二變差的最後形式是

$$\frac{\delta^2 A}{\delta t^2} = \int_R \Big\{ F|^{\alpha\beta}_{hl} D_\alpha \xi^h D_\beta \xi^l + F|^\alpha_h p^j_\alpha R^h_{\cdot ijk} \xi^i \xi^k$$

$$+ F|^\alpha_h D_\alpha \Big(\frac{\partial \xi^h}{\partial t}\Big) + F|^\alpha_h \Gamma^h_{jl}|^\beta_n \xi^l \cdot (2 p^j_\alpha D_\beta \xi^n - P^n_{\alpha\beta} \xi^j) \Big\} (du)^K. \tag{7.4}$$

特別當遠交聯絡的係數 Γ^i_{jk} 單是地點函數時，最後方程式變成簡單形式

$$\frac{\delta^2 A}{\delta t^2}=\int_R\left\{F\,|^{\alpha\beta}_{hk}\,D_\alpha\xi^h D_\beta\xi^k+F\,|^{\alpha}_{h}\,p^j_\alpha R^h_{\cdot ijk}\xi^i\xi^k+F\,|^{\alpha}_{h}\,D_\alpha\left(\frac{\partial\xi^h}{\partial t}\right)\right\}(du)^K. \quad (7.5)$$

在這場合，不妨選取特殊函數 $H^i_{\alpha\beta}$，例如，

$$H^i_{\alpha\beta}=\Gamma^i_{jk}(x)\,p^j_\alpha p^k_\beta; \quad (7.6)$$

於是 S_N 化做普通的遠交聯絡空間 [12]．更特殊的而重要的是所論的積分表示黎曼空間的體積積分的場合，將在下節討論．

八、　黎曼空間體積積分的第二變差

如在緒論所述，這場合爲台維斯所研究．現在要證明他的結果是我們所獲的公式 (7.5) 的特殊情形．

設空間 S_N 的度量張量是 a_{ij} 且設 $V_K(K<N)$ 是它的支空間，依 (2.3) 所定義的．那末 V_K 的基本張量 $b_{\alpha\beta}$ 與張量 a_{ij} 有下列聯繫：

$$b_{\alpha\beta}=a_{ij}\,p^i_\alpha p^j_\beta. \quad (8.1)$$

我們採用記號

$$p^\mu_i=b^{\mu\nu}a_{ij}\,p^j_\nu,\quad p^i_\varrho p^\varrho_j=p^i_j \quad (8.2)$$

且置

$$F=\sqrt{b},\quad b=\det|b_{\alpha\beta}|. \quad (8.3)$$

首先證實取克氏記號

$$\Gamma^i_{jk}=\left\{{i \atop j\,k}\right\} \quad (8.4)$$

做遠交聯絡係數，聯繫方程式 (3.6) 常成立．這是因爲，在黎曼空間的場合 [參考台維斯論文，公式 (5), (6)]

$$F_{\cdot i}=F\,p^h_j\left\{{j \atop i\,h}\right\}, \quad (8.5)$$

$$F\,|^\alpha_h=F\,p^\alpha_h. \quad (8.6)$$

其次，應用公式［參考台維斯論文，公式 (8)］

$$F\Big|_{hl}^{\alpha\beta} = F(b^{\alpha\beta} a_{hl} - b^{\alpha\beta} a_{hr} p_l^r + p_h^\alpha p_l^\beta - p_l^\alpha p_h^\beta), \tag{8.7}$$

容易從 (7.5) 導出台維斯所獲的形式. 事實上，如果導入記號

$$a_{ij} p_\alpha^i D_\beta \xi^j = \omega_{\alpha\beta}, \quad b^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = \omega, \quad a_{ij} D_\alpha \xi^i D_\beta \xi^j = \pi_{\alpha\beta},$$

那末，(7.5) 的積分函數是

$$F'' = \sqrt{b}\left[b^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} + \omega^2 - 2\,\omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} + p_i^\alpha D_\alpha \left(\frac{D}{\partial t} \xi^i\right) + R^h_{\cdot ijk} p_h^j \xi^i \xi^k\right], \tag{8.8}$$

除了拉丁與希臘指數互調外，這就是台維斯論文中的公式 (16).

參 考 文 獻

1. Berwald, L., Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus. *Math. Zeits.*, **25** (1926), 40-73.
2. Вагнер, В. В., Геометрия пространства с ареальной метрикой и её приложения к вариационному исчислению. *Матем. сб.*, **19** (61) (1946), 341-404.
3. 谷超豪，關於 K 展空間的子空間理論. 中國科學, **2** (1952), 165-178.
4. Davies, E. T., The first and second variations of the volume integral in Riemannian space. *Quart. Journ. Math.*, **13** (1942), 58-64.
5. Berwald, L., Über die n-dimensionalen Cartanschen Räume und eine Normalform der zweiten Variation eines (n-1)-fachen Oberflächenintegrals. *Acta math.*, **71** (1939), 191-248.
6. Su, B. (蘇步青), Extremal deviation in a geometry based on the notion of area. *Acta math.*, **85** (1951), 99-116.
7. Freeman, J. G., A generalization of minimal varieties. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (2) **8** (1948), 66-72.
8. 蘇步青，有面積測度的遠交聯絡空間的體積幾何學，數學學報，**2** (1952—1953)，246—257.
9. Douglas, J., Systems of K-dimensional manifolds in an N-dimensional space. *Math. Annalen*, **105** (1931), 707-733.
10. Kosambi, D. D., Systems of partial differential equations of the second order. *Quart. Journ. Math.*, **19** (1948), 204-219.
11. Su, B. (蘇步青), Axiom of the plane in a space of K-spreads. *Science Record*, **3** (1950), 7-16.
12. Норден, А. Т., Пространства аффинной связности. ГИТТЛ (1950).

THE FIRST AND SECOND VARIATIONS OF THE VOLUME INTEGRAL IN A SPACE WITH A MULTIPLE AREAL METRIC

By C. H. KU AND BUCHIN SU

Fu-Tan University and Academia Sinica

The spaces S_N considered in the present paper are of two structures, one being with an assigned K-dimensional areal metric and the other with an affine connection which depends upon the position as well as the K-ple element, taken for the supporting element. These structures are connected to each other such that the metric of any K-ple areal element is invariant with respect to the parallel transport of the connection when the element itself is taken for the supporting element.

Let

$$x^i = x^i(u^\alpha) \qquad (i = 1, \cdots, N; \quad \alpha = 1, \cdots, K)$$

be the equations of a differentiable K-dimensional variety V_K in S_N, and let the 'volume' of a certain domain R of the variety is given by a K-ple integral

$$A = \int_R F(x^k, p^i_\alpha)(du)^K, \qquad \left(p^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right).$$

where $(du)^K$ is an abbreviation for $du^1 du^2 \cdots du^K$ and the function $F(x, p)$ is invariant under the transformation

$$\bar{x} \longleftrightarrow x, \qquad \det \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right| \neq 0,$$

but is positively homogeneous of order zero and weight unity under the transformation

$$\bar{u} \longleftrightarrow u, \qquad \det\left|\frac{\partial \bar{u}^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}\right| > 0.$$

Suppose that in S_N there is given a system of functions Γ^{i}_{jk} derivable from a system of generalized homogeneous functions $H^{i}_{\alpha\beta}(x,p)$ by the formula

$$\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{K(K+1)} \frac{\partial^2 H^{i}_{\alpha\beta}}{\partial p^{j}_{\alpha} p^{k}_{\beta}}, \qquad (H^{i}_{\alpha\beta} = H^{i}_{\beta\alpha}).$$

According to the above assumption these Γ's are related to the metric function F by the *equations of connection*

$$F_{\cdot i} = F|^{\alpha}_{h} p^{j}_{\alpha} \Gamma^{h}_{ij},$$

where $$F_{\cdot i} = \frac{\partial F}{\partial x^i}, \qquad F|^{\alpha}_{h} = \frac{\partial F}{\partial p^{h}_{\alpha}}.$$

Consider the infinitesimal transformation

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x^k, t)\,\delta t,$$

which carries the base variety V_K into infinitely near ones $\bar{V}_K$ and the element (p^i_α) into the corresponding one

$$\bar{p}^{i}_{\alpha} = p^{i}_{\alpha} + \xi^{i}_{\cdot j} p^{j}_{\alpha}\,\delta t.$$

It is assumed that all the $\bar{V}_K$'s have a common boundary B_{K-1}, so that ξ^i vanishes on B_{K-1}.

Denoting the Eulerian vector by E_i we obtain the first variation of the 'volume' integral in the form

$$\delta A = -\int_R E_i\, \delta x^i (d u)^K \qquad (\delta x^i = \xi^i \delta t),$$

where

$$E_i = F \,|^{\alpha\beta}_{ih} \cdot P^h_{\alpha\beta},$$

and

$$P^h_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x^h}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \Gamma^h_{jk} p^j_\alpha p^k_\beta.$$

The variety V_K characterized by the condition $E_i = 0$ will be called the *extremal variety* of the space. On calculating the second variation of the 'volume' integral for an extremal variety we are led to the result:

$$\frac{\delta^2 A}{\delta t^2} = \int_R \Big\{ F\,|^{\alpha\beta}_{hl} D_\alpha \xi^h D_\beta \xi^l + F\,|^\alpha_h p^j_\alpha R^h_{\cdot ijk} \xi^i \xi^k$$

$$+ F\,|^\alpha_h D_\alpha \left(\frac{\partial \xi^h}{\partial t}\right) + F\,|^\alpha_h \Gamma^h_{jl} \,|^\beta_n \xi^l (2 p^j_\alpha D_\beta \xi^n - P^n_{\alpha\beta} \xi^j) \Big\} (d u)^K,$$

where $R^h_{\cdot ijl}$ denotes the affine curvature tensor

$$R^h_{\cdot ijl} = \Gamma^h_{ij\cdot l} - \Gamma^h_{il\cdot j} + \Gamma^h_{il} \,|^\tau_m \Gamma^m_{nj} p^n_\tau - \Gamma^h_{ij} \,|^\tau_m \Gamma^m_{nl} p^n_\tau + \Gamma^m_{ij} \Gamma^h_{ml} - \Gamma^m_{il} \Gamma^h_{mj}$$

and

$$D_\alpha T{:}{:} = p^j_\alpha T{:}{:}_{,j}.$$

In particular, when the coefficients of the affine connection Γ^i_{jk} are *functions of position only* the last equation takes the simple form

$$\frac{\delta^2 A}{\delta t^2} = \int_R \Big\{ F\,|^{\alpha\beta}_{hk} D_\alpha \xi^h D_\beta \xi^k + F\,|^\alpha_h p^j_\alpha R^h_{\cdot ijk} \xi^i \xi^k + F\,|^\alpha_h D_\alpha \left(\frac{\partial \xi^h}{\partial t}\right) \Big\} (d u)^K.$$

In this case we can put, for example, the functions $H^i_{\alpha\beta}$ as

$$H^i_{\alpha\beta} = \Gamma^i_{jk}(x) p^j_\alpha p^k_\beta;$$

the space S_N then becomes the ordinary affinely connected one. This furnishes a generalization of Davies' result for Riemannian spaces.