

边坡稳定的有限元可靠度计算及敏感性分析

谭晓慧¹, 王建国², 刘新荣³, 刘东甲¹, 吴道祥¹

(1. 合肥工业大学 资源与环境工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 合肥工业大学 土木建筑工程学院, 安徽 合肥 230009;
3. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400044)

摘要: 假定边坡岩土体为满足 Mohr-Coulomb 屈服准则的理想弹塑性体, 以基于滑面应力分析的弹塑性随机有限元理论为基础, 采用增量初应力法及偏微分技术, 求解边坡体中的应力以及应力对基本变量的导数; 建立考虑滑面方向的功能函数, 基于一阶可靠性分析方法, 对整个边坡的可靠度进行分析, 计算边坡的整体可靠指标, 为边坡的稳定性评价及防治提供重要依据。由于边坡稳定的有限元可靠度计算工作量较大, 故应进行参数的敏感性分析。推导基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数敏感性的计算公式, 其优点是无需求解转换矩阵, 计算更加简单直接。考虑到基本变量的单位不同, 提出可靠指标对随机变量分布参数的相对敏感性分析计算公式, 并将之用于边坡稳定的有限元可靠度分析。算例分析结果表明: 该方法与基于有限元强度折减法得出的可靠指标基本一致; 一阶可靠性方法所求可靠指标比均值一阶可靠性方法的稍大; 参数 c , φ 对可靠指标的相对影响比其他参数的影响要大得多; 随着 c , φ 间负相关系数的增加, 其对可靠指标的影响也相应增加。

关键词: 边坡工程; 有限元; 可靠度分析; 可靠指标; 敏感性分析

中图分类号: P 642

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2007)01 - 0115 - 08

FINITE ELEMENT RELIABILITY COMPUTATION AND SENSITIVITY ANALYSIS OF SLOPE STABILITY

TAN Xiaohui¹, WANG Jianguo², LIU Xinrong³, LIU Dongjia¹, WU Daoxiang¹

(1. *School of Resources and Environmental Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China;*
2. *School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei, Anhui 230009, China;*
3. *College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China*)

Abstract: In the finite element analysis, the soil is assumed to obey realistic elastoplastic and Mohr-Coulomb yield criterion. Based on the technique of sliding surface stress analysis and on the theory of elastoplastic finite element, the stress and the derivatives of the stress of the basic stochastic variables for the slope are computed by using partial differential technique and incremental initial stress method. In the reliability analysis, the limit state function is set up which can consider the direction of the sliding surface. And then the reliability indices of the whole slope are computed using the first order reliability method(FROM). In order to improve the efficiency of the computation of the reliability indices, it's necessary to carry out sensitivity analysis. Therefore, the formulas of the sensitivity of reliability indices to the basic parameters in the original space when they are correlated are derived. The advantage is that the transforming matrix, which is needed in the computation in the transformed space, is now unnecessary in this method. Considering the differences of the units of each parameter, the relative sensitivity

收稿日期: 2005 - 12 - 21; **修回日期:** 2006 - 01 - 20

基金项目: 安徽省水利厅科研项目; 安徽省教育厅青年基金资助项目(2005jq1021); 国家留学回国人员科研启动基金重点项目(教外司留[2002]247 号)

作者简介: 谭晓慧(1971 -), 女, 硕士, 1992 年毕业于重庆大学资源与环境工程学院, 现任副教授, 主要从事岩土力学可靠度方面的教学与研究工作。

E-mail: tantan9666@sina.com

formulas are suggested. An example is given to illustrate that the reliability indices calculated by this paper are the same as those of strength reduction method(SRM); and reliability indices got from FORM are a little larger than those of mean first order reliability method(MFORM). Through sensitivity analysis, it's concluded that the effects of parameters c , ϕ are much larger than the others; and their effects on the reliability indices increase when the negative coefficient of correlationship of c , ϕ become large.

Key words: slope engineering; finite elements; reliability analysis; reliability indices; sensitivity analysis

1 引言

边坡稳定性分析是岩土工程中一个十分重要的工作。常用的边坡稳定性分析方法有各种极限平衡条分法、有限元法等。极限平衡法条分法由于计算简单而使用很广^[1, 2]。随着计算机技术的提高, 边坡稳定性分析中也越来越多地使用有限元法。和极限平衡法相比, 有限元法能更好地反映边坡岩土体的应力-应变关系, 并且不受边坡几何形状和材料不均匀的限制, 因而是边坡稳定性分析中一种较为理想的方法。边坡稳定性分析的有限元法大体上可以分为两类: 一是基于滑面应力分析的有限元法(SSA), 该方法是边坡稳定性有限元分析中一种常规的计算方法^[3, 4]; 二是基于强度折减的有限元法(SRM), 该方法在国外兴起于 20 世纪 90 年代^[5~8]。

对于实际的边坡工程, 除了要考虑岩土体的应力-应变关系外, 还应考虑边坡工程中存在的大量不确定性, 如: 岩土体材料参数的不确定性、荷载的不确定性等。因此, 应进行边坡稳定的可靠度分析。

目前, 已有很多学者做了有关边坡稳定的可靠度分析工作, 但大多数学者^[9, 10]都是基于极限平衡条分法而进行的。在边坡稳定的有限元可靠度分析方面, 也有部分学者进行了研究, 但主要是基于有限元的应力分析结果而进行的“点”可靠度计算, 如 R. Mellah 等^[11]和刘宁^[12]都只计算了各积分点或单元上的可靠指标, 未能给出边坡的整体可靠指标。而边坡的整体可靠指标在进行边坡的设计及稳定性评价时非常重要, 如何求边坡的整体可靠指标还需进一步研究。本文采用基于滑面应力分析的有限元法, 建立了滑面上的功能函数, 求解了边坡的整体可靠指标。

由于边坡稳定的有限元可靠度计算工作量较大, 因此, 对于具体的边坡应先进行参数的敏感性分析, 找出边坡稳定可靠度的主要影响因素, 从而有针对性地减少可靠度分析中的参数个数, 提高计

算效率。在参数的可靠度敏感性分析方面, B. K. Low 等^[9]和 H. O. Madsen 等^[13]提出了基本随机变量互为独立时在原始空间中可靠指标对随机变量分布参数的敏感性计算公式; 刘宁^[12]、I. Kiyohiro 和 M. F. Dan^[14]分析了基本变量相关时在标准正态空间中可靠指标对随机变量分布参数及极限状态方程参数的敏感性计算方法; S. Bruno 和 D. K. Armen^[15]探讨了有限元可靠度计算中位移、应力对基本变量的敏感性计算。本文基于上述研究成果, 推导了变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数相对敏感性的计算公式, 并将之用于边坡稳定的有限元可靠度分析中。

2 非线性随机有限元的基本原理

随机有限元分析的实质是在有限元分析的基础上, 考虑各种计算参数的随机性, 计算由于参数的变异性而引起的响应变异性, 与定值法有限元分析的主要不同之处在于它在弹塑性有限元的基础上加入了计算位移、应力对随机变量的偏导数^[14~16]。计算出偏导数之后, 即可根据功能函数和可靠度理论求解单元及边坡潜在滑面的可靠指标。

有限元计算的优点之一是可以考虑研究对象的应力-应变关系, 本文假设边坡岩土体为 Mohr-Coulomb 理想弹塑性材料, 弹塑性非线性有限元计算采用增量初应力法, 位移、应力对随机变量导数的计算采用偏微分法, 其主要计算过程如下:

(1) 赋初值, 组装弹性刚度矩阵 \mathbf{K} 及其偏导矩阵 $\partial\mathbf{K}/\partial\mathbf{X}$, 其中 \mathbf{X} 为基本随机变量向量;

(2) 对第 k 级荷载增量的第 i 次迭代, 求位移向量增量 $\Delta\mathbf{u}_i^k$ 及其偏导数 $(\partial\Delta\mathbf{u}/\partial\mathbf{X})_i^k$;

(3) 计算各单元的弹性应力向量增量 $(\Delta\sigma^{\text{el}})_i^k$ 、当前应力向量 σ_i^k 及其相应的偏导数 $(\partial\Delta\sigma^{\text{el}}/\partial\mathbf{X})_i^k$ 和 $(\partial\sigma/\partial\mathbf{X})_i^k$;

(4) 按 Mohr-Coulomb 条件判断单元是否进入塑性屈服。若进入塑性屈服, 则计算相应的塑性矩阵 \mathbf{D}^p 、初应力向量 $(\Delta\sigma_0)_i^k$ 、体荷载增量向量 $(\Delta\mathbf{R})_i^k$ 及

其偏导数 $\partial D^p / \partial \mathbf{X}$, $(\partial \Delta \sigma_0 / \partial \mathbf{X})_i^k$, $(\partial \Delta \mathbf{R} / \partial \mathbf{X})_i^k$ (对于首次由弹性状态过渡到塑性状态的单元, 需对塑性矩阵进行修正);

(5) 计算本次迭代后的应力向量增量 $\Delta \sigma_i^k$ 及其偏导数 $(\partial \Delta \sigma / \partial \mathbf{X})_i^k$;

(6) 重复过程(2)~(5)直至所有单元收敛至精度要求, 计算本级荷载增量下的位移 \mathbf{u}^k 、应力 σ^k 及其偏导数 $(\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X})^k$, $(\partial \sigma / \partial \mathbf{X})^k$, 再施加下一级荷载, 直至所有荷载增量计算完为止。

上述计算过程中的有关公式详见相关研究^[16, 17]。

3 基于滑面应力分析的边坡稳定的有限元可靠度计算

非线性随机有限元的主要功能是计算位移、应力及其对基本随机变量的导数。在此基础上, 还要结合具体问题, 选择特定的功能函数形式, 进行相应的可靠度分析。

3.1 功能函数对基本变量偏导数的计算

在基于滑面应力分析的边坡稳定的有限元可靠度计算中, 为了求解边坡的整体可靠指标及相应的滑面位置, 可采用与定值法中求解边坡最小安全系数相同的方法来求边坡的最小可靠指标, 即先假定一个滑动面, 根据有限元计算结果求解此滑面的可靠指标; 再采用与定值法分析中类似的方法搜索整个边坡的最小可靠指标。因此, 必须事先确定滑面上的功能函数形式。作者^[17]讨论了滑面可靠指标的几种计算方法, 提出了考虑滑面方向并以滑面整体功能函数为出发点的计算方法精度较高的结论, 其具体计算方法如下:

令滑面的功能函数如下:

$$Z = g(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_e} Z_i \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n_e} g_i(\mathbf{X}) \Delta l_i \quad (1)$$

其中,

$$Z_i = g_i(\mathbf{X}) = \tau_f - \tau = -\sigma_n \tan \varphi + c - \tau \quad (2)$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (3)$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4)$$

式(1)~(4)中: n_e 为假定滑弧上的单元个数; Δl_i 为滑弧经过第 i 单元的长度; Z_i 为滑弧上第 i 单元的功

能函数; α 为滑弧与水平面间的夹角; σ_x , σ_y , τ_{xy} 为单元滑弧中点的应力分量; σ_n , τ 分别为单元滑弧中点的正应力和剪应力, 其中正应力以受拉为正。

对形如式(1)的功能函数形式, 由变量间的相互关系可知, Z 实质上是 \mathbf{X} 的函数。在边坡稳定性分析中, 设 $\mathbf{X} = \{c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu\}^T$ (这里 $c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu$ 分别为土的黏聚力、内摩擦角、膨胀角、容重、弹性模量和泊松比), 应力 $\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$, 则有

$$\frac{\partial Z_i}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \sigma^*)}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial g_i(\mathbf{X}^*, \sigma)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{X}} \quad (5)$$

式中: “*” 表示在求导时此参数视为常量。

由式(1)~(4)可得

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X}, \sigma^*)}{\partial \mathbf{X}} = \{1, -\sigma_n \sec^2 \varphi, 0, 0, 0, 0\}^T \quad (6)$$

$$\frac{\partial g_i(\mathbf{X}^*, \sigma)}{\partial \sigma} = \left\{ -\frac{1}{2}[(1 - \cos 2\alpha) \tan \varphi + \sin 2\alpha], -\frac{1}{2}[(1 + \cos 2\alpha) \tan \varphi - \sin 2\alpha], -\sin 2\alpha \tan \varphi - \cos 2\alpha \right\} \quad (7)$$

3.2 可靠指标的计算

可靠度分析中常用的可靠指标的计算方法是一阶可靠性分析方法(FORM)。设 $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ 是由 n 个正态随机变量构成的随机向量(当 \mathbf{X} 不是正态变量时, 可先进行当量正态化, 将非正态的随机变量变为正态变量)。当基本随机变量相关时, 一般先采用正交变换将其转化为互为独立的标准正态变量 $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, 再在标准正态空间中求解可靠指标^[18, 19]。

设 \mathbf{X} 与 \mathbf{Y} 的转换关系为

$$\mathbf{X} = \sigma_X \mathbf{A} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}_X \quad (8)$$

即

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1} \sigma_X^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}_X) \quad (9)$$

式中: $\boldsymbol{\mu}_X = \{\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_i}, \dots, \mu_{X_n}\}^T$ 为 \mathbf{X} 的均值向量; σ_X 为 \mathbf{X} 的均方差向量, 且 $\sigma_X = \text{diag}(\sigma_{X_1}, \dots, \sigma_{X_i}, \dots, \sigma_{X_n})$; \mathbf{A} 为下三角矩阵, 设其元素为 a_{ij} , 则有

$$a_{ij} = \frac{\rho_{X_i X_j} - \sum_{k=1}^{j-1} a_{ik} a_{jk}}{\sqrt{1 - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}^2}} \quad \left(\sum_{k=1}^0 a_{ik} a_{jk} = 0; 0 \leq j \leq i \leq n \right) \quad (10)$$

式中： $\rho_{X_i X_j}$ 为 X_i 与 X_j 之间的相关系数。

将式(8)代入滑面的功能函数 $g(\mathbf{X})$ 中，即可得到标准正态空间内的功能函数 $G(\mathbf{Y})$ 。在标准正态空间中，可靠指标是坐标原点到极限状态曲面的最短距离，即

$$\beta = [(\mathbf{y}^*)^T (\mathbf{y}^*)]^{1/2} \quad (11)$$

式中： \mathbf{y}^* 为标准正态空间中极限状态曲面上离坐标原点最近的点(设计验算点)的坐标，此坐标需迭代求解，具体的迭代格式如下：

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{y}^*) - \nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)^T \mathbf{y}^*}{\|\nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)\|} \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_Y = -\frac{\nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}{\|\nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)\|} \quad (13)$$

$$\mathbf{y}^* = \boldsymbol{\alpha}_Y \beta \quad (14)$$

式中： $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)$ 为功能函数在 \mathbf{y}^* 处的梯度向量，

$$\text{且有 } \nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_1}, \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_1} \right\}^T,$$

$$\|\nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \right)^2}.$$

由于在有限元可靠度分析中位移、应力对基本随机变量的偏导数都是在原始空间中求解的，因此可靠度计算最好也在原始空间中进行。

记将 \mathbf{X} 变换为 \mathbf{Y} 的 Jacobian 矩阵为 \mathbf{J}_{XY} ，则由式(8)可得

$$\mathbf{J}_{XY} = (\boldsymbol{\sigma}_X \mathbf{A})^T \quad (15)$$

即

$$\nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{J}_{XY} \nabla g(\mathbf{X}^*) = (\boldsymbol{\sigma}_X \mathbf{A})^T \nabla g(\mathbf{X}^*) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)\| &= \|(\boldsymbol{\sigma}_X \mathbf{A})^T \nabla g(\mathbf{X}^*)\| = \\ &= [\nabla g(\mathbf{X}^*)^T \boldsymbol{\sigma}_X \mathbf{A} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)]^{1/2} = \\ &= [\nabla g(\mathbf{X}^*)^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)]^{1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

式中： \mathbf{C}_X 为 \mathbf{X} 的协方差矩阵。

将式(16)，(17)代入式(12)~(14)，可得直接在

基本变量空间中求解可靠指标的迭代公式：

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{g(\mathbf{X}^*) - \nabla g(\mathbf{X}^*)^T (\mathbf{X}^* - \boldsymbol{\mu}_X)}{[\nabla g(\mathbf{X}^*)^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)]^{1/2}} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_X = -\frac{\rho_X \boldsymbol{\sigma}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)}{[\nabla g(\mathbf{X}^*)^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)]^{1/2}} \quad (19)$$

$$\mathbf{X}^* = \boldsymbol{\mu}_X + \boldsymbol{\sigma}_X \boldsymbol{\alpha}_X \beta \quad (20)$$

若取 \mathbf{X}^* 的迭代初值 $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\mu}_X$ ，且不进行迭代求解，则 FORM 简化为均值一阶可靠性分析方法(MFORM)。

3.3 有限元可靠度分析

在进行边坡稳定的有限元可靠度计算时，需将可靠度计算程序和随机有限元计算程序有机结合起来，作者采用 FORTRAN 编写了有关程序，其流程如图 1 所示(图中 tol 为允许的误差值)。

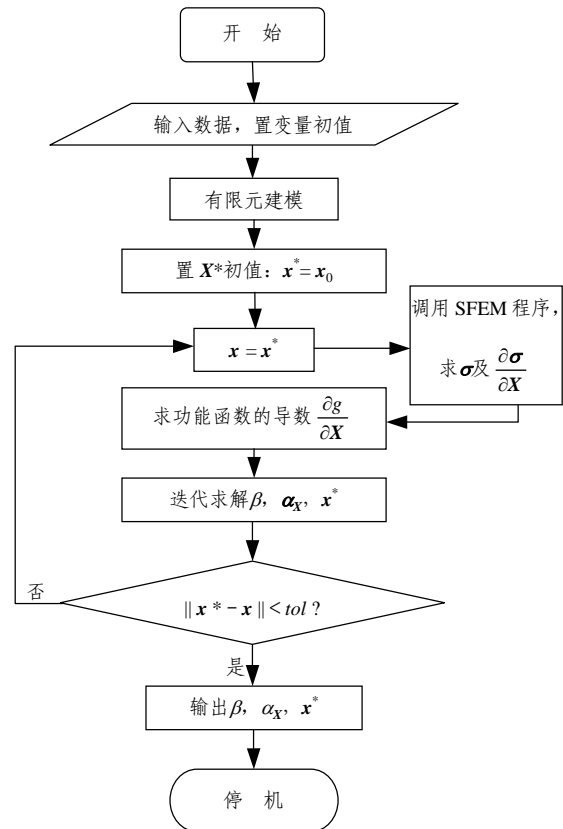


图 1 有限元可靠度分析程序流程图

Fig.1 Flow chart of finite element reliability analysis

4 参数的敏感性分析

可靠度分析的 FORM 法的优点之一是可以同时求出 $\boldsymbol{\alpha}_Y$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_X$ 值。由式(14)可知： $\boldsymbol{\alpha}_Y$ 表示在标准正态空间中各变量对可靠指标 β 的相对影响大小。当随机变量相互独立时， $\boldsymbol{\alpha}_X$ 亦具有同样的物理意

义。但是, 当基本变量互为相关时, α_x 无法反映各基本变量对可靠指标的相对影响, 此时需用其他方法来求随机变量及其分布参数对可靠指标的敏感性。刘宁^[12]、I. Kiyohiro 和 M. F. Dan^[14]分析了基本变量相关时在标准正态空间中可靠指标对随机变量分布参数及极限状态方程参数的敏感性计算方法, 本文在此基础上进一步推导了原始空间中的相应计算公式。

4.1 可靠指标对随机变量分布参数的敏感性分析

已知在 Y 中, 可靠指标对随机变量的分布参数 $d_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 的敏感性^[12]可表示为

$$\frac{\partial \beta}{\partial d_j} = \frac{\partial[(y^*)^T y]^{1/2}}{\partial d_j} = \frac{1}{2} [(y^*)^T y]^{-1/2} \frac{\partial[(y^*)^T y]}{\partial d_j} = \frac{(y^*)^T \partial y^*}{\beta \partial d_j} = [\alpha_y (y^*)]^T \frac{\partial y^*}{\partial d_j} = -\frac{\nabla G(y^*)^T \partial y^*}{\|\nabla G(y^*)\| \partial d_j} \quad (21)$$

下面先求 $\frac{\partial Y}{\partial d_j}$, 为简单起见, 记

$$T = A^{-1} \sigma_x^{-1}, \quad B = -A^{-1} \sigma_x^{-1} \mu_x \quad (22)$$

式(9)变为

$$Y = TX + B \quad (23)$$

则

$$\frac{\partial Y}{\partial d_j} = \frac{\partial(TX + B)}{\partial d_j} \approx \frac{\partial T}{\partial d_j} X + \frac{\partial B}{\partial d_j} \quad (24)$$

由于

$$\frac{\partial T}{\partial \mu_{x_i}} = \{0, 0, \dots, 0\} \quad (25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma_{x_i}} = A^{-1} \text{diag} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \dots, 0 \right\}^T \quad (26)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \mu_{x_i}} = A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}}, 0, \dots, 0 \right\}^T \quad (27)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{x_i}} = A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{\mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \dots, 0 \right\}^T \quad (28)$$

所以

$$\frac{\partial Y}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial T}{\partial \mu_{x_i}} X + \frac{\partial B}{\partial \mu_{x_i}} =$$

$$A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}}, 0, \dots, 0 \right\}^T \quad (29)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma_{x_i}} = \frac{\partial T}{\partial \sigma_{x_i}} X + \frac{\partial B}{\partial \sigma_{x_i}} = A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{X_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \dots, 0 \right\}^T \quad (30)$$

将式(29), (30)代入式(21), 可得

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} = -\frac{\nabla G(y^*)^T}{\|\nabla G(y^*)\|} A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}}, 0, \dots, 0 \right\}^T \quad (31)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} = -\frac{\nabla G(y^*)^T}{\|\nabla G(y^*)\|} A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{X_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \dots, 0 \right\}^T \quad (32)$$

利用式(16), (17), 将式(31), (32)变回 X 空间, 可得

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} = -\frac{\nabla g(X^*)^T \sigma_x A}{[\nabla g(X^*)^T C_X \nabla g(X^*)]^{1/2}} \cdot A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{1}{\sigma_{x_i}}, 0, \dots, 0 \right\}^T = \frac{1}{[\nabla g(X^*)^T C_X \nabla g(X^*)]^{1/2}} \frac{\partial g}{\partial X_i} \quad (33)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} = -\frac{\nabla g(X^*)^T \sigma_x A}{[\nabla g(X^*)^T C_X \nabla g(X^*)]^{1/2}} \cdot A^{-1} \left\{ 0, \dots, 0, -\frac{X_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}^2}, 0, \dots, 0 \right\}^T = \frac{1}{[\nabla g(X^*)^T C_X \nabla g(X^*)]^{1/2}} \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{X_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} = \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \frac{X_i^* - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (34)$$

4.2 可靠指标对极限状态方程参数的敏感性分析

由相关研究^[12, 14]可知: 在 Y, X 空间中分别有

$$\frac{\partial \beta}{\partial Y_i} = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{y}^*)\|} \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial X_i} &= \mathbf{J}_{XY}^{-1} \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{y}^*)\|} \frac{\partial G(\mathbf{y}^*)}{\partial Y_i} = \\ &= \frac{\mathbf{J}_{XY}^{-1} \mathbf{J}_{XY} \nabla g_{X_i}(\mathbf{X}^*)}{[\nabla g(\mathbf{X}^*)^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)]^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{[\nabla g(\mathbf{X}^*)^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)]^{1/2}} \frac{\partial \beta}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (36)$$

4.3 可靠指标对随机变量分布参数的相对敏感性分析

比较式(33), (36)可知: $\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{\mu}_X}$, 亦即在随

机变量的原始空间中, 可靠指标对极限状态方程参数的敏感性与可靠指标对参数均值的敏感性本质相同。

此外, 由式(33), (34)可知, 在原始空间中进行参数的可靠度分析, 不需计算转换矩阵 \mathbf{A} , 计算更为简单。

但是, 由于随机变量 X_i 的单位各不相同, 因此式(33), (34)并不能反映各参数对可靠指标敏感性的相对大小。故本文提出用 $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} \sigma_{X_i}$ 及 $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} \sigma_{X_i}$ 进行参数的相对敏感性分析, 由式(33), (34)可得其计算公式为

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} \sigma_{X_i} = \frac{1}{[\nabla g(\mathbf{X}^*)^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{X}^*)]^{1/2}} \frac{\partial g}{\partial X_i} \sigma_{X_i} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} \sigma_{X_i} = \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} (x_i^* - \mu_{X_i}) \quad (38)$$

5 算例及成果分析

有一坡比为 1 : 1 的均质土坡, 高 $H = 20 \text{ m}$, 黏聚力 $c = 40 \text{ kPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 20^\circ$, 膨胀角 $\phi = 20^\circ$, 容重 $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, 弹性模量 $E = 20 \text{ MPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$ ^[20]。设 $c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu$ 均为正态随机变量。边坡剖面如图 2 所示。有限元计算采用八节点四边形网格, 共划分 331 个节点, 94 个单元。约束条件是底边界固定, 左右边界水平约束。土体采用 Mohr-Coulomb 理想弹塑性模型。

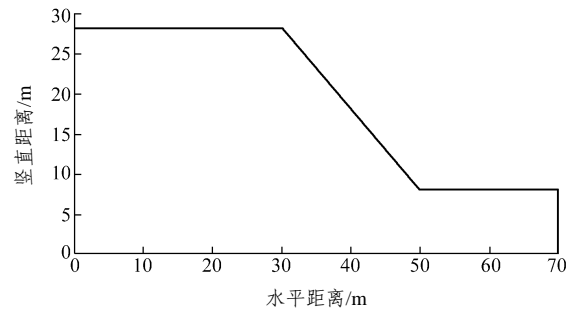


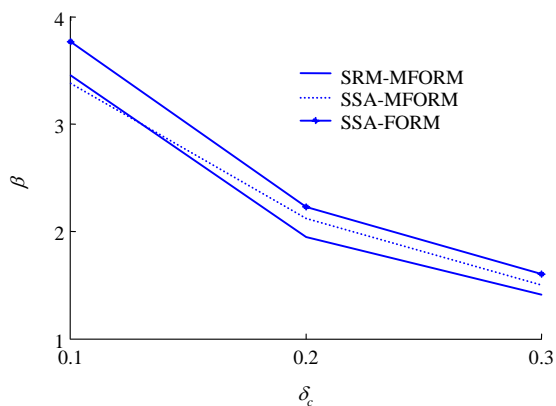
图 2 边坡剖面图
Fig.2 Cross-section of the slope

参照朱小林^[21]的研究成果中有关土工参数的变异系数资料, 本文假设参数 $c, \varphi, \phi, \gamma, E, \mu$ 的变异系数最大值分别为 0.3, 0.3, 0.3, 0.03, 0.3, 0.3。由于参数 c, φ 间常为负相关^[22], 本文假设其相关系数 $\rho_{c\varphi}$ 为 $[-0.4, 0]$ 。

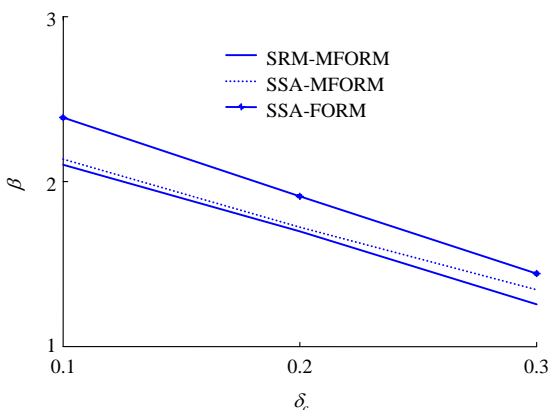
为了验证程序的正确性, 对该例先用本文方法(滑面应力分析法, SSA)及有限元强度折减法(SRM)作了定值法分析, 计算得 $f_s(\text{SSA}) = 1.32, f_s(\text{SRM}) = 1.31$, 二者基本一致, 该结果比迟世春和关立军^[20]的研究成果中 $f_s(\text{Bishop}) = 1.266, f_s(\text{Spencer}) = 1.265$ 稍大, 误差不超过 5%, 与张鲁渝等^[23]中的结论一致。

图 3 表示的是可靠指标 β 与变异系数 $\boldsymbol{\delta}_X$ 的关系曲线, 其中 $\boldsymbol{\delta}_X = \{\delta_c, \delta_\varphi, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0\}^T$, 各参数间相互独立。为对比起见, 图中也列出了基于有限元强度折减法(SRM)边坡稳定的有限元可靠度计算结果^[17](其中, 基于 SRM 的可靠度分析中, 功能函数对基本变量的导数计算方法是中心差分法^[24])。可见, 基于滑面应力分析法(SSA)与基于有限元强度折减法(SRM)的可靠度计算结果基本一致; FORM 对应的可靠指标比 MFORM 的稍大。当各参数间相互独立时, 取 $\boldsymbol{\delta}_X = \{0.3, 0.3, 0.3, 0.03, 0.3, 0.3\}^T$ 。计算结果见表 1, 相应的可靠指标 $\beta = 1.27$ 。由表 1 可知, 无量纲化后的 $\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}} \sigma_{X_i}$ 及 $\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}} \sigma_{X_i}$ 能较好地

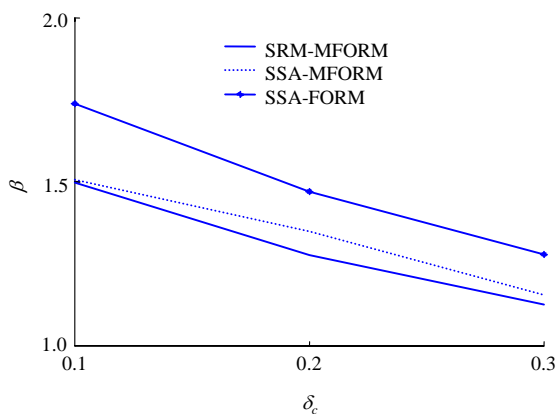
反映各参数对可靠指标的相对敏感性大小。在上述 6 个参数中, c, φ 对可靠指标的影响最大, 其他参数对可靠指标的影响相对较小, 可忽略其变异性对可靠指标的影响。因此, 为减少计算量, 提高计算效率, 又假设 $\boldsymbol{\delta}_X = \{0.3, 0.3, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0\}^T$, 计算所得可靠指标仍为 1.27。可见, 只取 c, φ 为基本变量是可行的。



(a) $\delta_\phi = 0.1$



(b) $\delta_\phi = 0.2$



(c) $\delta_\phi = 0.3$

图 3 可靠指标 β 与变异系数 δ_x 的关系

Fig.3 Relationship curves of β and δ_x

根据上述结论, 以下计算只取 c, ϕ 为基本变量, 并设 $\delta_x = \{0.3, 0.3, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0\}^T$ 。参数的敏感性与相关系数 $\rho_{c\phi}$ 的关系曲线如图 4 所示。可见, 随着参数 c, ϕ 间负相关系数的提高, 它们对可靠指标的影响也相应增加, 但 c, ϕ 对 β 的相对影响程度不变。

表 1 可靠指标 β 对参数的敏感性分析

Table 1 Sensitivity analysis of reliability indices to parameters

X	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{X_i} \sigma_{X_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i}}$	$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{X_i} \sigma_{X_i}}$
c	0.064	0.769	-0.063	-0.750
ϕ	6.097	0.638	-4.942	-0.517
ϕ	0.066	0.007	-0.001	-0.000
γ	-0.048	-0.029	-0.002	-0.001
E	0.000	0.000	0.000	0.000
μ	0.384	0.035	-0.017	-0.002

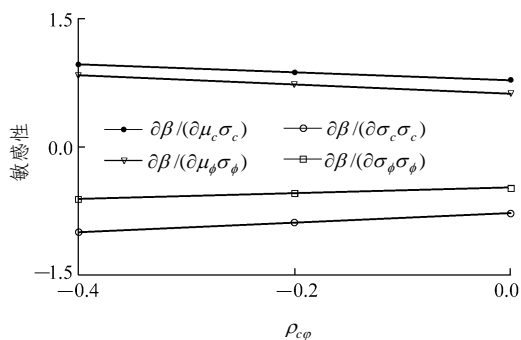


图 4 参数的敏感性与相关系数 $\rho_{c\phi}$ 的关系图

Fig.4 Relationship of sensitivity and $\rho_{c\phi}$

6 结 论

本文设边坡岩土体为满足 Mohr-Coulomb 屈服准则的理想弹塑性体, 以基于滑面应力分析(SSA)的弹塑性有限元法为基础, 求解了边坡体中的应力及应力对基本变量的偏导数; 建立了考虑滑面方向的功能函数, 基于一阶可靠性分析方法(FORM), 对整个边坡的可靠度进行了分析, 计算了边坡的整体可靠指标; 推导了基本变量相关时在原始空间中求解可靠指标对参数相对敏感性的计算公式, 并将之用于边坡稳定的有限元可靠度分析。算例分析结果表明: 本文方法与基于有限元强度折减法(SRM)得出的可靠指标基本一致; FORM 所求可靠指标比 MFORM 的稍大; 参数 c, ϕ 对可靠指标的相对影响比其他参数的影响要大得多; 随着 c, ϕ 间负相关系数的增加, 其对可靠指标的相对影响也相应增加。

参考文献(References):

[1] 陈祖煜. 土坡稳定分析——原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水

- 利水电出版社, 2003: 239 - 248.(CHEN Zuyu. Soil slope stability analysis—theory, method and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003: 239 - 248.(in Chinese))
- [2] ZHU D Y, LEE C F, JIANG H D. Generalized framework of limit equilibrium methods for slope stability analysis[J]. *Geotechnique*, 2003, 53(4): 377 - 395.
- [3] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slope[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, ASCE, 1996, 122(7): 577 - 596.
- [4] ZOU J Z, WILLIAMS D J. Search for critical slip surface based on finite element method[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1995, 32(1): 233 - 246.
- [5] SWAN C C, SEO Y K. Limit state analysis of earthen slopes using dual continuum/FEM approaches[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1999, 23(12): 1 359 - 1 371.
- [6] DAWSON E M, ROTH W H, DRESCHER A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(6): 835 - 840.
- [7] MATSUI T, SAN K C. Finite element slope stability analysis by shear strength reduction technique[J]. *Soils and Foundations*, 1992, 32(1): 59 - 70.
- [8] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Geotechnique*, 1999, 49(3): 387 - 403.
- [9] LOW B K, GILBERT R B, WRIGHT S G. Slope reliability analysis using generalized method of slices[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 1998, 124(4): 350 - 362.
- [10] MALKAWI A I H, HASSAN W F, ABDULLA F A. Uncertainty and reliability analysis applied to slope stability[J]. *Structural Safety*, 2000, 22(2): 161 - 187.
- [11] MELLAH R, AUVINET G, MASROURI F. Stochastic finite element method applied to non-linear analysis of embankments[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, 15(3): 251 - 259.
- [12] 刘宁. 可靠度随机有限元法及其工程应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001: 76 - 105.(LIU Ning. Reliability SFEM and its application[M]. Beijing: China Water Power Press, 2001: 76 - 105.(in Chinese))
- [13] MADSEN H O, KRECK S, LIND N C. Methods of structure safety[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc., 1986: 120 - 122.
- [14] KIYOHIRO I, DAN M F. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems(I): theory[J]. *Computers and Structures*, 2000, 77(6): 677 - 691.
- [15] BRUNO S, ARMEN D K. Comparison of finite element reliability methods[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2002, 16(4): 337 - 348.
- [16] 徐军, 刘东升, 郑颖人. 基于概率屈服准则的弹塑性随机有限元分析[J]. *岩土工程学报*, 2002, 24(2): 225 - 228.(XU Jun, LIU Dongsheng, ZHENG Yingren. Analysis of elastoplastic stochastic finite element method based on probabilistic yield criterion[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(2): 225 - 228.(in Chinese))
- [17] 谭晓慧, 王建国. 边坡的弹塑性有限元可靠度分析[J]. *岩土工程学报*, 2007(待刊).(TAN Xiaohui, WANG Jianguo. Slope reliability analysis using elastoplastic finite element method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2007(to be published).(in Chinese))
- [18] 贡金鑫. 工程结构可靠度分析方法[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003: 155 - 160.(GONG Jinxin. Computational methods for reliability of engineering structures[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003: 155 - 160.(in Chinese))
- [19] LIU C H. Reliability validation of multigirder steel bridges designed by LRFD[J]. *Computers and Structures*, 2002, 19(12): 2 515 - 2 527.
- [20] 迟世春, 关立军. 基于强度折减的拉格朗日差分方法分析土坡稳定性[J]. *岩土工程学报*, 2004, 26(3): 42 - 46.(CHI Shichun, GUAN Lijun. Slope stability analysis by Lagrangian difference method based on shear strength reduction[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2004, 26(3): 42 - 46.(in Chinese))
- [21] 朱小林. 土体工程[M]. 上海: 同济大学出版社, 1998.(ZHU Xiaolin. Soil engineering[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1998.(in Chinese))
- [22] 高大钊. 土的抗剪强度指标的统计方法[J]. *工程勘察*, 1986, (4): 1 - 5.(GAO Dazhao. The statistic method of the indices of shear strength of soil[J]. *Geotechnical Investigation and Surveying*, 1986, (4): 1 - 5.(in Chinese))
- [23] 张鲁渝, 郑颖人, 赵尚毅, 等. 有限元强度折减系数法计算土坡稳定安全系数的精度研究[J]. *水利学报*, 2003, (1): 21 - 27.(ZHANG Luyu, ZHENG Yingren, ZHAO Shangyi, et al. The feasibility study of strength reduction method with finite element for calculating safety factors of soil slope stability[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003, (1): 21 - 27.(in Chinese))
- [24] 谭晓慧. 边坡稳定可靠度分析方法的探讨[J]. *重庆大学学报*, 2001, 24(6): 40 - 44.(TAN Xiaohui. Discussion of reliability analysis methods of slope stability[J]. *Journal of Chongqing University*, 2001, 24(6): 40 - 44.(in Chinese))