

饱和黏性土固结不排水剪切行为的细观力学分析

徐 辉, 王靖涛, 卫 军

(华中科技大学 土木工程与力学学院, 湖北 武汉 430074)

摘要: 利用细观力学分析中的自洽理论, 建立固结不排水条件下的黏土弹塑性本构模型。在该模型中考虑部分黏土骨架因剪切滑移引起的整体剪切模量的降低, 给出求解整体剪切模量的解析表达式, 并将模型预测与试验结果进行比较, 证明该模型是合理的。

关键词: 土力学; 饱和黏性土; 固结不排水状态; 细观力学; 自洽方法; 滑动相; 本构模型

中图分类号: TU 44

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2006)增 2 - 4083 - 06

MICROMECHANICAL ANALYSIS OF SATURATED CLAY SHEAR BEHAVIOR IN CONSOLIDATED UNDRAINED CONDITION

XU Hui, WANG Jingtao, WEI Jun

(School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, Hubei 430074, China)

Abstract: The experimental results under consolidated undrained condition reveal that the deformation of saturated clay exhibits the following characteristics: (1) loading shear modulus varies in loading process; (2) unloading shear modulus is constant. Based on the results, a micromechanical damage constitutive model of consolidated undrained saturated clay is presented by micromechanical analysis about every phase. This model views that the clay is composed of pore water and joint solid skeleton at the onset of loading and deforms linearly until the joint solid skeleton is subjected to damage. The damage of the joint solid skeleton is defined as the slide of clay grain interface. In the damage deformation stage, the clay specimen is composed of three phase, i. e. pore water, joint solid skeleton and sliding solid skeleton. The volume fraction and the shear modulus of the sliding phase vary in loading process. A method to calculate the volume fraction of the sliding phase in terms of Mohr-Coulomb law and the modulus decreasing curve of the sliding phase in terms of conventional triaxial test are given. The hypothesis is explored under which the nonlinear response of the clay is entirely due to the increase of the sliding phase volume fraction and the decrease of the sliding phase shear modulus. Based on Eshelby's solution to the problem on ellipse impurity in infinite elastic body and self-consistent method, an average scheme is found to get a realistic transition from the relevant information available at the micro-scale to the overall nonlinear response at the macro-scale. In addition, an approach is given to obtain micro-parameter by conventional triaxial test. Finally, test on the versatility of the proposed model including varying hydrostatic stress and stress paths indicates that the proposed model is capable of predicting the deformation behavior for various conditions.

Key words: soil mechanics; saturated clay; consolidated undrained condition; micromechanics; self-consistent method; sliding phase; constitutive model

收稿日期: 2005 - 12 - 21; **修回日期:** 2006 - 02 - 20

作者简介: 徐 辉(1968 -), 男, 1989 年毕业于华中理工大学力学系工程力学专业, 现为博士研究生、讲师, 主要从事岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail: xuhui1968@163.com

1 引言

黏土材料的宏观响应由颗粒间的细观接触方式所决定，接触方式随剪应力的增大，逐渐由固连转为滑动，这实质上是骨架逐渐损伤的过程，这种损伤会导致黏土宏观力学量的非线性变化，如变形模量等。细观损伤力学正是从材料的细观结构出发，对不同的细观损伤机制加以区分，通过对细观结构变化的物理与力学过程的研究来了解材料的变形与破坏，并通过体积平均化的方法从细观分析结果导出材料的宏观性质。材料的细观损伤机制有多种，比较典型的有微孔洞、微裂纹、微滑移带、银纹、晶界滑移等等，其中对前两种损伤的研究已经比较深入^[1~7]。另外，L. Dormieux等^[8]在砂岩中还考虑了孔隙与微裂纹的连通与不连通情况；仲政等^[9]在金属材料中考虑了晶界滑移对剪切模量的影响。

多相复合体本构模型的研究是基于J. D. Eshelby^[10]关于椭球夹杂相应变问题的解和R. Hill^[11, 12]提出的自洽理论。这种建立在椭球夹杂的Eshelby解^[10]基础上的自洽模型能满足应力平衡及变形协调要求，在数学上是完备的，但没考虑夹杂颗粒界面的滑动对本构关系的影响；仲政等^[9]、W. Yang等^[13]在等效夹杂法^[14]的基础上，引入平均特征应变等微区均值量，采用合理的数学近似，提出了一种适用于夹杂界面滑动的均质自洽理论，将仅适用于固连椭球形状的Hill自洽理论推广到任意形状固连或滑动夹杂的情况。饱和黏土试样在固结不排水剪切过程中，随剪应力的增大，骨架在一部分取向上克服了黏聚力和内摩擦力的作用开始滑动，此时黏土试样骨架中既存在未滑动的部分(固连相，颗粒接触面能传递剪应力)，也存在滑动的部分(滑动相，颗粒接触面不能传递剪应力)。本文正是基于计及骨架滑动相和固连相以及孔隙水的相互作用，提出了一种适合于描述黏土剪切模量变化的本构模型。

文中部分公式用张量表达，分量用带下标的字母表示，采用求和约定，张量的一些运算记号如下。 δ_{ij} 为 Kronecker 张量； I_{ijkl} 为等同张量，且

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \quad (1)$$

特殊等同张量记为 \bar{I}_{ijkl} ，且

$$\bar{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \quad (2)$$

弹性刚度张量记为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma &= C : \Delta\varepsilon \\ \Delta\sigma_{ij} &= C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中： $\Delta\sigma$ 和 $\Delta\varepsilon$ 分别为复合体的宏观应力增量、应变增量。

引入表示四阶各向同性张量的记号如下：

$$\begin{aligned} C &= (3K, 2G) = 3K\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G\bar{I}_{ijkl} = \\ &(3K - 2G)\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G\bar{I}_{ijkl} \end{aligned} \quad (4)$$

可以证明该记号的乘法规律为：若 $N=(a, b)$ ， $K=(c, d)$ ，则 $N:K=(ac, bd)$ 。

应变集中张量 A_i 为

$$\varepsilon^{(i)} = A_i : \varepsilon \quad (5)$$

应力集中张量 B_i 为

$$\sigma^{(i)} = B_i : \sigma \quad (6)$$

式中： $\sigma^{(i)}$ 和 $\varepsilon^{(i)}$ 分别为复合体中第*i*相的应力、应变张量。

2 自洽理论的本构模型

复合体的增量本构关系可以写成张量形式：

$$\Delta\sigma = C : \Delta\varepsilon \quad (7)$$

式中： C 为弹性刚度张量。

根据自洽理论^[11, 12]，复合体的弹性刚度张量 C 可写成：

$$C = \sum n_i C_i : A_i \quad (8)$$

式中： n_i 为第*i*相的体积分数， C_i 为第*i*相的弹性刚度张量， A_i 为第*i*相的应变集中张量。作为近似，设黏土颗粒为球形，对于固连相^[10]，有

$$A_i = \left(\frac{K}{K(1-\alpha^E) + \alpha^E K_i}, \frac{G}{G(1-\beta^E) + \beta^E G_i} \right) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha^E &= \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \\ \beta^E &= \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \\ \nu &= \frac{3K-2G}{6K+2G} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

对于滑动相^[9]，有

$$A_i = \left(\frac{K}{K(1-\alpha) + \alpha K_i}, \frac{\tilde{\beta}G}{G(1-\beta) + \beta G_i} \right) \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1+\nu}{3(1-\nu)} \\ \beta &= \frac{2(9+20\nu)(4-5\nu)}{25(25-2\nu)(1-\nu)} \\ \tilde{\beta} &= \frac{8(7+5\nu)}{5(21+\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

固连相的应力集中张量^[10]为

$$B_i = \left(\frac{K_i}{K(1-\alpha^E) + \alpha^E K_i}, \frac{G_i}{G(1-\beta^E) + \beta^E G_i} \right) \quad (13)$$

3 饱和黏土固结不排水时的本构模型

饱和黏土在固结不排水条件下无体积应变，加载剪切模量随变形的发展变化较大，卸载剪切模量随变形的发展变化很小，接近初始加载模量。初始加载模量或卸载剪切模量仅与初始等向固结压力有关，可按 J. M. Duncan 和 C. Y. Chang^[15]提出的方法确定其与初始固结压力的关系。基于此，本文认为：线性阶段，试样是由孔隙水和固连骨架组成的复合体；随着剪应力的增大，骨架中一部分被剪切破坏，成为滑动相，宏观响应进入非线性阶段，试样是孔隙水、土体骨架固连相和滑动相的三相复合体；而卸载时，骨架颗粒接触面不再滑动，试样是孔隙水和骨架固连相的两相复合体，卸载剪切模量与初始加载剪切模量相同；加载过程中随剪应力的增大，滑动相的体积分数增加，而固连相的体积分数减少；另一方面，随滑移取向的增加，骨架颗粒所受的约束越来越少，滑动相的剪切模量自然也越小，是一个不断衰减的量。

在以下的表达式中，下标 1, 2, 3 分别代表孔隙水、固连相骨架、滑动相骨架，不计孔隙水和固体颗粒的压缩(即 $K_1 = K_2 = K_3 = \infty$)，在不排水条件下，复合体的体积不发生变化，可认为复合体的泊松比为 0.5。由式(10)和(12)可得： $\alpha^E = \alpha = 1$ ， $\beta^E = \frac{2}{5}$ ， $\beta = 0.19$ ， $\tilde{\beta} = \frac{152}{215}$ 。

3.1 线性阶段

线性阶段(即无滑动相产生)，剪切应力 - 应变曲线表现为直线，复合体由两相组成：孔隙水和固

连相骨架。孔隙水和固连相骨架的应变集中张量分别为

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \left(1, \frac{5}{3} \right) \\ A_2 &= \left(1, \frac{G}{0.6G + 0.4G_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

考虑到孔隙水的剪切模量为 0，即 $G_1 = 0$ ，由式(8)可得初始无损阶段复合体剪切模量 G_0 与固连相骨架剪切模量 G_2 之间的关系：

$$1 = \frac{n_2 G_2}{0.6G_0 + 0.4G_2} \quad (15a)$$

或

$$G_2 = \frac{0.6G_0}{0.6 - n_1} \quad (15b)$$

式中： G_0 为复合体的初始加载剪切模量，也为卸载模量； G_2 为固连相骨架的剪切模量； n_1 为孔隙率； n_2 为固连相骨架的体积分数，初始无损阶段 $n_2 = 1 - n_1$ 。由上式可根据剪切试验曲线初始线性段的斜率 G_0 推求出固连相骨架的剪切模量 G_2 。

由式(13)可得，初始无损阶段固连相的应力集中张量为

$$B_2 = \left(1, \frac{1}{n_2} \right) = \left(1, \frac{1}{1 - n_1} \right) \quad (16)$$

由复合体在不同初始固结压力下的剪切试验曲线的初始线性段末端的应力，按式(16)和(6)可得初始线性段末端的固连骨架中的应力，设固连骨架的损伤遵循 Mohr-Coulomb 准则，由固连骨架应力圆的包络线可以得到固连骨架的细观材料参数：黏聚力 c_2 和内摩擦角 ϕ_2 。

3.2 损伤变形阶段

3.2.1 滑动百分比的确定

随着剪应力的增大，固连骨架在一部分取向上出现破损，一部分骨架颗粒的接触面之间产生了滑动，以 m 表示滑动接触面取向占有取向的百分比，则滑动相的体积分数为 $n_3 = (1 - n_1)m$ ，固连相的体积分数为 $n_2 = (1 - n_1)(1 - m)$ 。滑动百分比 m 可由固连相的应力圆与颗粒接触面的滑动线之间的位置关系确定，具体做法如下。

如图 1 所示，设颗粒接触面的初始取向是均匀分布的，滑动遵循 Mohr-Coulomb 准则，即 $\tau = \sigma \tan \phi_2 + c_2 = f_2 \sigma + c_2$ ，其中， ϕ_2 为骨架的内摩擦

角, c_2 为骨架的黏聚力, f_2 为骨架的内摩擦因数, 且 $f_2 = \tan \phi_2$ 。由常规三轴试验的结果可得到 $q-\gamma$ 曲线, 取该曲线初始线性段末端的应力, 按式(16)和(6)可得固连骨架开始损伤时的临界应力, 由不同围压下的临界应力圆的包络线可以得到固连骨架的细观材料参数: 黏聚力 c_2 和内摩擦角 ϕ_2 。这里要强调的是, c_2 和 ϕ_2 是固连骨架的滑移指标, 不同于复合体的强度指标 c 和 ϕ 。

图 1 中的滑动线代表 $\tau = \sigma \tan \phi + c$, 应力圆代表加载过程中的应力状态。当应力圆与滑动线相离时, 表示无滑动相; 当应力圆与滑动线相切时, 表示开始滑动; 当应力圆与滑动线相割时, 设圆心到两个交点的连线与 σ 轴的夹角分别为 α_1 (小值) 和 α_2 (大值), 则取向为与 $\sigma_1^{(2)}$ 呈 $\alpha_1/2 \sim \alpha_2/2$ 夹角的接触面已经滑动。故滑动百分比为

$$m = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\pi} \quad (17)$$

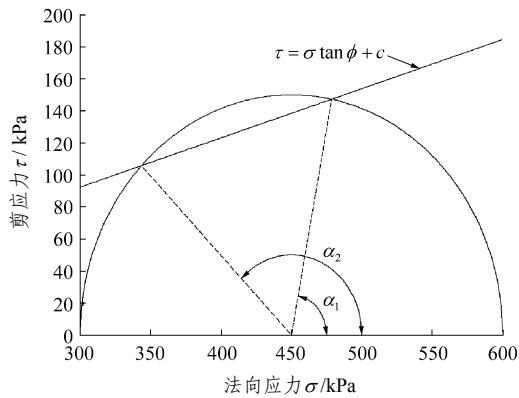


图 1 滑动百分比计算示意图

Fig.1 Schematic illustration of calculation of sliding phase percentage

角度 α_1 和 α_2 则可按下述方法确定。

此时固连相的应力集中张量不同于由式(16)表示的初始无损阶段, 与当时复合体的模量相关, 由式(13)可得

$$B_2 = \left(1, \frac{G_2}{G(1-\beta^E) + \beta^E G_2} \right) \quad (18)$$

因此, 固连相的主应力分量与复合体的主应力分量之间的关系为

$$\sigma_1^{(2)} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{G_2}{3[G(1-\beta^E) + \beta^E G_2]}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{G_2}{3[G(1-\beta^E) + \beta^E G_2]}(2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1)$$

$$\sigma_3^{(2)} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + \frac{G_2}{3[G(1-\beta^E) + \beta^E G_2]}(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) \quad (19)$$

设固连相应力圆的圆心为 $(a, 0) = \left(\frac{\sigma_1^{(2)} + \sigma_3^{(2)}}{2}, 0 \right)$, 半径为 $r = \frac{\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}}{2}$, 则有

$$\sigma_{\alpha_1}^{(2)} = \frac{(a - fc) + \sqrt{(a - fc)^2 - (1 + f^2)(a^2 + c^2 - r^2)}}{1 + f^2}$$

$$\sigma_{\alpha_3}^{(2)} = \frac{(a - fc) - \sqrt{(a - fc)^2 - (1 + f^2)(a^2 + c^2 - r^2)}}{1 + f^2}$$

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{\sigma_{\alpha_1}^{(2)} - a}{r}\right)$$

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{\sigma_{\alpha_3}^{(2)} - a}{r}\right) \quad (20)$$

3.2.2 复合体的剪切模量

由式(8)可得, 损伤阶段(非线性阶段)复合体的剪切模量 G 与固连相骨架的剪切模量 G_2 , 滑动相骨架的剪切模量 G_3 之间的关系:

$$1 = \frac{(1 - n_1)(1 - m)G_2}{G(1 - \beta^E) + \beta^E G_2} + \frac{(1 - n_1)mG_3\tilde{\beta}}{G(1 - \beta) + \beta G_3} \quad (21)$$

$$G_3 = (1 - m)^n G_2 \quad (22)$$

式中: G_2 为固连相骨架的剪切模量; G_3 为滑动相骨架的剪切模量, 是一个变化的值, 这点可以这样来理解: 一部分取向接触面的滑移导致颗粒表面约束的减少, 刚度自然就会降低; n 为试验参数, 与初始固结压力有关, 本文称之为模量衰减指数。

在给定应力 σ_1, σ_3 以及试验参数 G_2, c_2, ϕ_2 和 n 的条件下, 联立求解由式(17), (19)~(22)组成的非线性方程组, 可得到非线性阶段复合体的宏观剪切模量 G 。

加、卸载准则: 凡使滑动相的体积百分比 m 大于或等于其历史上最大值的应力增量, 即为加载, 计算应变增量时, 使用加载模量; 凡使滑动相的体积分数小于其历史上最大值的应力增量即为卸载, 计算应变增量时, 使用卸载模量。

4 试验及结果分析

本次试验采用的是黏质粉土的固结不排水试验, 物理指标见表 1, 试验参数见表 2。选取了两种应力路径, 路径一为等向固结条件下, σ_3 等于常数的不排水常规三轴(CTC)试验, 围压分别选用 100, 300 和 500 kPa; 路径二为等向固结条件下, 体积应力 $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ 保持不变的不排水纯剪(PS)试验。路径一用以确定试验参数 G_2 , c_2 , ϕ_2 和 n , 路径二用以验证本文模型。试验数据按 p , q , γ 整理如下: 设应力分量、应变分量、应力偏量、应变偏量分别由 σ_{ij} , ε_{ij} , s_{ij} , e_{ij} 表达, 则体积应力 p 为

$$p = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

剪应力 q 为

$$q = \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ji}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

剪应变 γ 为

$$\gamma = 2\sqrt{J_2'} = \sqrt{2e_{ij}e_{ji}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

$$\Delta q = 3G\Delta\gamma$$

表 1 黏土的物理指标

Table 1 Physical indexes of clay

含水量 $w/\%$	密度 $\rho/(\text{g} \cdot \text{cm}^{-3})$	孔隙率 n_1	液限 $w_L/\%$	塑限 $w_p/\%$
20.24	2.246	0.298	24.78	19.39

表 2 试验参数

Table 2 Parameters of test

初始等向固结 压力 σ_3/kPa	固结后的空 隙率 n_1	固连相剪切 模量 G_2/kPa	模量衰减指数 n
100	0.285	316.0	0.28
300	0.276	863.6	0.57
500	0.263	1 136.5	0.72

理论模型与试验所得结果对比见图 2, 3。

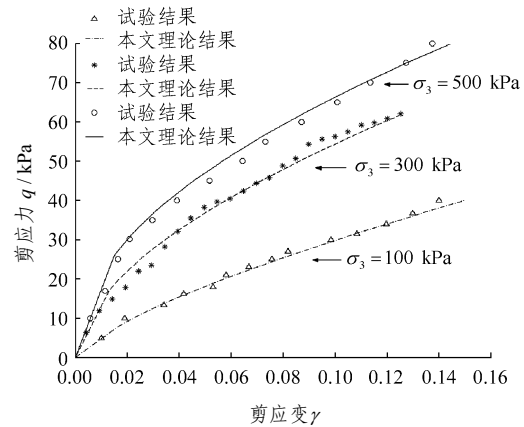


图 2 围压 σ_3 等于常数时固结不排水剪切
Fig.2 Consolidated undrained shear when confining pressure σ_3 is constant

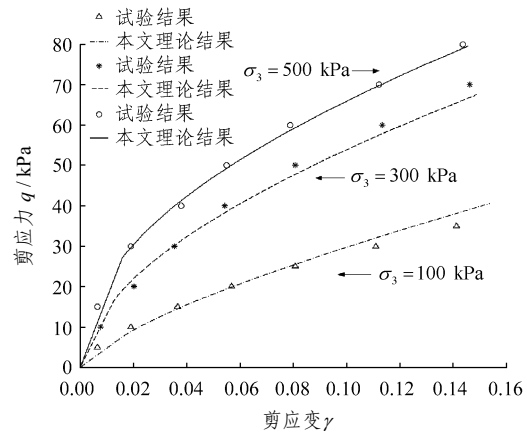


图 3 体积应力 p 等于常数的固结不排水剪切
Fig.3 Consolidated undrained shear when volumetric stress p is constant

根据路径一的初始线性段末端的应力状态, 按式(6)和(16)算出线性段末端处固连相的应力, 作出应力圆的公切线, 即可得到固连相的细观滑动指标 c_2 和 ϕ_2 , 本次试验中 $c_2 = 2.80 \text{ kPa}$, $\phi_2 = 1.2^\circ$ 。按 J. M. Duncan 和 C. Y. Chang^[15]的方法确定初始剪切模量与初始固结压力的关系以及模量衰减系数与初始固结压力的关系如下:

$$\lg\left(\frac{G_2}{p_a}\right) = 507.997 \ 9 \lg\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) + 313.472 \ 0$$

$$\lg n = 0.596 \ 4 \lg\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right) - 0.547 \ 0$$

5 结 论

本文尝试采用细观力学的方法研究饱和黏性土

在固结不排水条件下的剪切行为, 引入了第三相即滑动相, 认为复合体的宏观非线性响应与滑动相的体积百分比及其模量的衰减密切相关, 给出了求解宏观剪切模量的非线性方程组, 并与两种应力路径的试验结果进行了对比, 该模型能较好地反映饱和黏性土在固结不排水情况下的剪切变形行为, 模型参数并不复杂, 能方便地应用于有限元等数值计算。通过本次研究, 得到了以下几点结论:

(1) 采用细观力学的方法研究饱和黏土材料在固结不排水条件下的剪切行为是可行的, 通过滑动相的体积百分比及其模量的衰减能清晰地反映骨架的损伤对复合体剪切模量的影响, 文中提出的确定滑动相体积分数的方法是基于 Mohr-Coulomb 准则, 概念清晰, 简单直观。

(2) 滑动相的剪切模量不是一个定值, 遵循 $G_3 = (1-m)^n G_2$ 规律变化。

(3) 本文提出的模型体现了黏土变形的主要特征, 即非线性。模型对加载和卸载采用不同的剪切模量, 从而可以体现土体变形的非弹性。

(4) 模型中的模量和双曲线模型^[15]中的一样, 都是切线模量, 用于增量计算时, 能在一定程度上反映应力路径对变形的影响。

(5) 本模型在一定程度上能反映正应力对剪应变的交叉影响, 如当剪应力不变, 体积应力减小时, 由图 1 可知, 应力圆将向左平移, 导致滑动相的体积分数增大, 剪切模量降低, 引起附加的剪应变。

参考文献(References):

- [1] Nemat-Nasser S, Hori M. Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials[M]. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1993.
- [2] Tvergaard V. Material failure by void growth to coalescence[J]. Adv. Appl. Mech., 1990, 27: 83 - 151.
- [3] Gilormini P, Licht C, Suquet P. Growth of voids in a ductile matrix: a review[J]. Arch. Mech., 1988, 40(1): 43 - 80.
- [4] Krajcinovic D. Damage Mechanics[M]. Amsterdam, Netherlands: Elsevier Science Publishers, 1996.
- [5] Yang W, Lee W B. Mesoplasticity and Its Applications[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1993.
- [6] Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids, critical review of some basic concepts[J]. Appl. Mech. Rev., 1992, 45(7): 304 - 335.
- [7] Bazant Z P. Mechanics of distributed cracking[J]. Appl. Mech. Rev., 1986, 39(11): 675 - 705.
- [8] Dormieux L, Molinari A, Kondo D. Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, 50(10): 2 203 - 2 231.
- [9] 仲政, 杨卫, 黄克智. 考虑晶界滑动的多晶体塑性大变形本构关系[A]. 见: 塑性力学和细观力学文集[C]. 北京: 北京大学出版社, 1993. 118 - 126.(Zhong Zheng, Yang Wei, Huang Kezhi. On finite deformation plastic constitutive relations of polycrystals incorporating grain boundary sliding[A]. In: Plasticity and Mesomechanics[C]. Beijing: Peking University Press, 1993. 118 - 126.
- [10] Eshelby J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems[A]. In: Proceedings of the Royal Society of London(Series A)[C]. [s. l.]: [s. n.], 1957. 376 - 396.
- [11] Hill R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals[J]. J. Mech. Phys. Solids, 1965, 13: 89 - 101.
- [12] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials[J]. J. Mech. Phys. Solids, 1965, 13: 213 - 222.
- [13] Yang W, Zhong Z, Hwang K C. Meso-deformation and constitutive relations of sliding polycrystal[A]. In: IUTAM Symposium on Constitutive Relations for Finite Deformation of Polycrystalline Metals[C]. Beijing: Springer-Verlag and Peking University Press, 1991. 136 - 150.
- [14] Mura T. Micromechanics of Defects in Solids(2nd Edition)[M]. Dordrecht, Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [15] Duncan J M, Chang C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1970, 96(5): 1 629 - 1 653.