

非对称开采矿柱失稳的突变理论分析

潘岳¹, 张勇², 吴敏应¹, 王志强¹

(1. 青岛理工大学 土木工程学院, 山东 青岛 266520; 2. 青岛酒店管理学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 正确求得非对称开采岩梁弯矩方程和挠曲线方程, 采用 Maple9.5 符号运算软件, 通过由能量守恒原理导得的总势能函数微分形式途径, 建立非对称开采岩梁- (狭窄)矿柱系统动力失稳的突变模型, 以分析形式给出矿柱失稳临界条件、矿柱失稳起始点和终止点位置, 给出失稳瞬间岩梁的弹性能释放量; 采用 Matlab 软件绘出的矿柱失稳性状图解形式蕴涵了丰富的信息量, 对了解岩梁- 矿柱系统各变形阶段的行为规律和识别岩梁沿某方向的等效刚度问题上有重要作用。分析结果表明, 对称开采时岩梁等效刚度最大, 非对称开采减小岩梁的等效刚度。非对称开采时矿柱受偏压, 因此又减小了矿柱刚度即冲击倾向, 其综合效果会使其失稳的强度要小于对称开采时矿柱的失稳强度。

关键词: 采矿工程; 矿柱; 折迭突变; 能量输入率; 弹性势能变化率; 能量释放量; 非对称开采

中图分类号: TD 324

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2006)增 2 - 3694 - 09

ANALYSIS OF CATASTROPHE THEORY FOR PILLAR DESTABILIZATION IN DISSYMMETRIC MINING

PAN Yue¹, ZHANG Yong², WU Minying¹, WANG Zhiqiang¹

(1. College of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao, Shandong 266520, China;
2. Qingdao Hismile College, Qingdao, Shandong 266100, China)

Abstract: The equations of bending moment and deflection line of rock beam in dissymmetric mining are deduced. Using the symbolic operation software Maple9.5, the catastrophe model of dynamic buckling in rock beam—pillar system, is established through the way that the differential form of total potential function is deduced by principle of conservation of energy. The critical condition, positions of start point and end point of pillar destabilization are analyzed, and the elastic energy releasing amount of rock beam at destabilization instant is also given. The diagrammatic form of the behavior of pillar destabilization, which is protracted by the software Matlab, contains rich information. It has important effect on the problem of realizing the behavior rule in every deformation phase of rock beam—pillar system, and it distinguishes the equivalent stiffness of rock beam in a certain direction. The analytical results show that the equivalent stiffness of rock beam is the largest in symmetric mining, and that dissymmetric mining lessens the equivalent stiffness of rock beam. The pillar suffers eccentric compression in dissymmetric mining, so it lessens the stiffness of pillar, i.e. impact tendency. The resultant effect shows that the destabilization intensity of pillar is smaller than that of symmetric mining.

Key words: mining engineering; pillar; fold catastrophe; energy importing rate; rate of elastic energy change; energy releasing amount; dissymmetric mining

1 引言

根据潘岳和王志强^[1]在将顶板端部视为固定

支承条件下所建立的对称开采情况下狭窄矿柱失稳突变模型, 对矿柱失稳原型包括系统稳定性在内的行为特征作了描述。由于受地质条件的限制, 有时对称开采难于实现, 而采空区的稳定性直接关系到

收稿日期: 2004 - 01 - 20; **修回日期:** 2006 - 03 - 28

基金项目: 山东省自然科学基金(Y2005 - A03)资助项目; 山东省教委重点资助项目(G04D15)

作者简介: 潘岳(1947 -), 男, 1982年毕业于东北工学院工程力学专业, 现任教授, 主要从事岩土力学方面的教学与研究工作。E-mail: panyue@qtech.edu.cn

矿井安全生产和深部矿体的开挖规划的实现, 李宏等^[2, 3]采用计算机符号运算方法, 在非对称开采和将未采矿层视为弹性地基的两种情况, 对坚硬顶板下矿柱岩爆前兆规律进行了探讨, 本文拟采用突变理论方法对非对称开采下的矿柱稳定性进行分析。

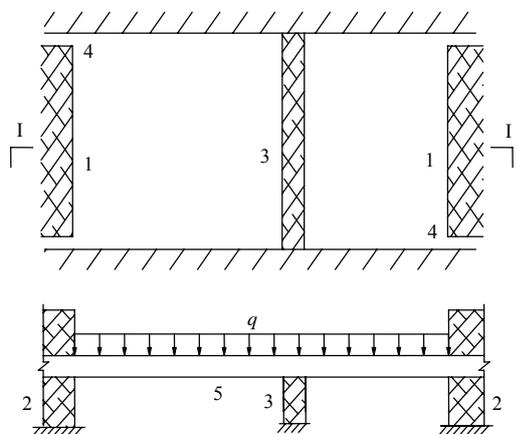
2 非对称开采的分析模型

采场布置如图 1 所示, 在矿层上方赋存坚硬岩层, 矿柱由渐近进破裂突发生岩爆时, 顶板岩层并不破坏而仅参与释放能量^[4]。设底板不变形, 工作面很长, 在 I-I 剖面处取单位长度研究, 即可将顶板视为岩梁, 岩梁自重及上覆岩层的作用简化为集度为 q 的均布荷载, 单位长度矿柱的作用可视为在 $x=a$ 处的集中力 F ; 在矿柱对中央位置有较小偏离情况下, 可假定矿柱上方岩梁挠曲线转角为 0; 矿柱相对狭窄, 其压缩量远大于未采矿层的压缩量, 为简化分析, 设未采矿层不可压缩, 梁固嵌其中, 如图 2 所示。在矿柱形变破裂过程中梁保持弹性, 其抗弯刚度为 EI 。矿柱介质的应力-应变关系^[5]为

$$\sigma = E_0 \varepsilon \exp \left[- \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^m \right] \quad (1)$$

式中: E_0 为其初始弹模; m 为曲线同族指数; ε_0 与峰值应力 σ_c 对应的应变 ε_c 的关系为: $\left(\frac{1}{m} \right)^{1/m} \varepsilon_0 = \varepsilon_c$, 当 $m=1$ 时, $\varepsilon_0 = \varepsilon_c$ 。

这样矿柱对岩梁点 C 的作用力或矿柱的荷载-位移关系(见图 3)为



1—工作面; 2—未采矿层; 3—狭窄矿柱; 4—巷道; 5—岩梁

图 1 采场布置示意图

Fig.1 Schematic diagram of stope layout

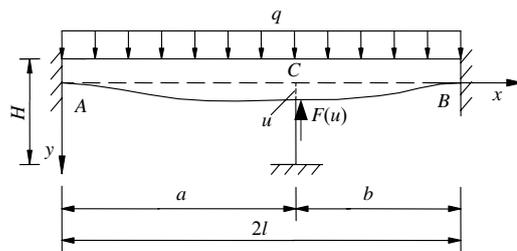


图 2 岩梁-狭窄矿柱系统的简化模型

Fig.2 A simplified model of rock beam-pillar's system

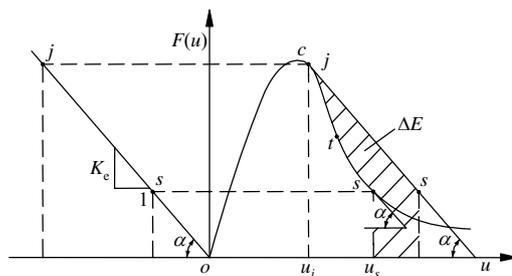


图 3 狭窄矿柱的荷载-位移曲线

Fig.3 Load-displacement curves of rock beam and pillar

$$F(u) = \lambda u \exp \left[- \left(\frac{u}{u_0} \right)^m \right] \quad (2)$$

式中: $\lambda = E_0 B/H$ 为矿柱的初始刚度, 其中 B, H 分别为矿柱的宽与原始高度; u 为矿柱形变即其上端位移, 也即岩梁在 $x=a$ 处的挠度(见图 2), $u_0 = H\varepsilon_0$ 。

3 非对称开采下梁的挠曲线方程

图 2 中若撤去矿柱支撑, 岩梁将下沉, 并处在自重与上方赋存岩体作用下相协调的静平衡位置图 4, 跨中挠度 $\tilde{u}_{\max} = \tilde{q}l^4/(24EI)$ 。图 2 中矿柱的支承力 $F(u)$ 使梁挠曲线上包括跨中及点 C 在内的各点位移都受到限制, 但在重力荷载 q 作用下梁挠曲线上各点总有恢复到图 4 中静平衡位置的倾向。正

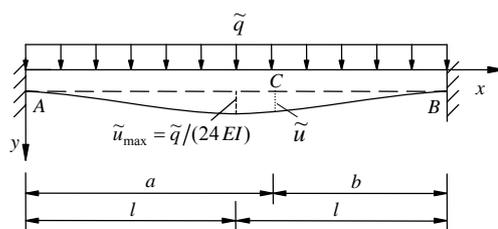


图 4 无矿柱支撑时的岩梁挠曲线状况

Fig.4 State of deflection line of rock beam without sustain of pillar

是这种趋向，会导致矿柱失稳破裂。

在 $x = a$ 处岩梁挠曲线(或横截面)转角为 0 条件下，可以将图 2 中固嵌梁在均布力 q 和矿柱反力 $F(u)$ 共同作用下，矿柱位移为 u 时的梁端弯矩和剪力分成如图 5(a), (b)所示的两部分进行研究。根据结构力学^[6, 7]基本理论，则图 5(a)中两端固嵌梁受均布力 q 及右端有顺时针侧向位移 u 时，A 端与 C 端的弯矩(规定弯矩使梁下侧受拉为正)、剪力分别为

$$\left. \begin{aligned} M_{AC} &= -\frac{qa^2}{12} - \frac{6EI}{a^2}u, & M_{CA} &= -\frac{qa^2}{12} + \frac{6EI}{a^2}u \\ Q_{AC} &= \frac{qa}{2} + \frac{12EI}{a^3}u, & Q_{CA} &= -\frac{qa}{2} + \frac{12EI}{a^3}u \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

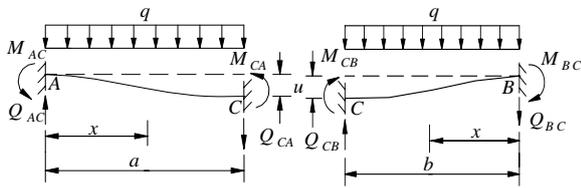


图 5 矿柱的梁端反力

Fig.5 Counter forces at beam ends of pillar

图 5(b)中两端固嵌梁受均布力 q 及左端有逆时针侧向位移 u 时，C 端与 B 端的弯矩、剪力分别为

$$\left. \begin{aligned} M_{CB} &= -\frac{qb^2}{12} + \frac{6EI}{b^2}u, & M_{BC} &= -\frac{qb^2}{12} - \frac{6EI}{b^2}u \\ Q_{CB} &= \frac{qb}{2} - \frac{12EI}{b^3}u, & Q_{BC} &= -\frac{qb}{2} - \frac{12EI}{b^3}u \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

以点 A 为原点，由式(3)可得 AC 段的弯矩方程为

$$M_1(x) = M_{AC} + Q_{AC}x - \frac{qx^2}{2} = -\frac{qx^2}{2} + \left(\frac{qa}{2} + \frac{12EI}{a^3}u\right)x - \left(\frac{qa^2}{12} + \frac{6EI}{a^2}u\right) \quad (5)$$

以点 B 为原点，由式(4)可得 BC 段的弯矩方程为

$$M_2(x) = M_{BC} - Q_{BC}x - \frac{qx^2}{2} = -\frac{qx^2}{2} + \left(\frac{qb}{2} + \frac{12EI}{b^3}u\right)x - \left(\frac{qb^2}{12} + \frac{6EI}{b^2}u\right) \quad (6)$$

由式(5)和挠曲线微分方程 $EIy'' = -M(x)$ 可得以点 A 为原点的 AC 段梁的转角、挠曲线方程为

$$EI y'_1 = \frac{qx^3}{6} - \left(\frac{qa}{2} + \frac{12EI}{a^3}u\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{qa^2}{12} + \frac{6EI}{a^2}u\right)x \quad (7)$$

$$EI y_1 = \frac{qx^4}{24} - \left(\frac{qa}{2} + \frac{12EI}{a^3}u\right)\frac{x^3}{6} + \left(\frac{qa^2}{12} + \frac{6EI}{a^2}u\right)\frac{x^2}{2} \quad (8)$$

由式(6)可得以点 B 为原点的 BC 段梁的转角、挠曲线方程为

$$EI y'_2 = \frac{qx^3}{6} - \left(\frac{qb}{2} + \frac{12EI}{b^3}u\right)\frac{x^2}{2} + \left(\frac{qb^2}{12} + \frac{6EI}{b^2}u\right)x \quad (9)$$

$$EI y_2 = \frac{qx^4}{24} - \left(\frac{qb}{2} + \frac{12EI}{b^3}u\right)\frac{x^3}{6} + \left(\frac{qb^2}{12} + \frac{6EI}{b^2}u\right)\frac{x^2}{2} \quad (10)$$

由式(7)~(10)容易验证所求得挠曲线方程满足 A 端和 B 端 $y = 0$, $y' = 0$, 及在 C 端 $y'_1(a) = 0$, $y'_2(b) = 0$ 和 $y_1(a) = y_2(b) = u$ 的边界条件。

由式(3), (4)还可得矿柱形变为 u 时对岩梁提供反力或 C 端处挠度 u 与 q 及 F 之间的关系式为

$$F(u) = Y_{CA} + Y_{CB} = -Q_{CA} + Q_{CB} = ql - 12\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}\right)l^3ku \quad (11)$$

其中,

$$k = EI/l^3 \quad (12)$$

4 矿柱失稳的突变理论分析

4.1 非对称开采矿柱失稳的折迭突变模型

下文中关于位置的微分用 d 表示，关于变量的微分用 δ 表示，在这里先予以说明。

矿柱动力失稳是在其荷载 - 位移 $F(u)$ 曲线峰值强度后的软化段上发生的，在 $F(u)$ 曲线软化段上岩梁 - 矿柱系统的平衡位置有准静态位移(即矿柱的压缩变形或其上端位移为) δu 时，岩梁因其挠曲线上各点均向图 4 中平衡位置趋近而要释放弹性形变能 $\delta U_e (< 0)$ ；矿柱以其内微裂纹扩展、连通耗散能量 $\delta U_p (> 0)$ ，当 $-\delta U_e < \delta U_p$ 时，外力 q 在其位移上做功 $\delta W (> 0)$ 补充能量，才能使矿柱产生变形。由于是处于准静态，无动能影响，由能量守恒原理，

可得关系式^[1]为

$$\delta U_e + \delta U_p - \delta W = 0 \quad (13)$$

式(13)是以矿柱上端位移到 u 时的状态为参考态建立的, 矿柱有微位移 $\delta u (> 0)$ 而系统处于准静态时的系统功、能增量平衡关系也即总势函数微分形式。

矿柱上端有位移增量 δu 时耗散能量为

$$\delta U_p = F \delta u \quad (14)$$

相应岩梁释放的能量为

$$\begin{aligned} \delta U_e &= \int_0^{2l} M(x) \delta \kappa(x) dx = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a M(x) \delta M(x) dx + \frac{1}{EI} \int_a^{2l} M(x) \delta M(x) dx = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a M_1(x) \delta M_1(x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^b M_2(x) \delta M_2(x) dx \quad (15) \end{aligned}$$

式中: $\kappa(x) = M(x)/(EI)$ 为梁点 C 挠度(矿柱位移)为 u 时挠曲线上 x 处的曲率, 而 $\delta \kappa(x)$ 为挠曲线点 C 有挠度增量 δu 时挠曲线 x 处曲率的改变量。

外力功增量:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_0^{2l} q \delta y(x) dx = \int_0^a q \delta y_1(x) dx + \int_a^{2l} q \delta y_2(x) dx = \\ &= \int_0^a q \delta y_1(x) dx + \int_0^b q \delta y_2(x) dx \quad (16) \end{aligned}$$

式中: $\delta y(x)$ 为点 C 处挠度增量为 δu 时的挠曲线任一点 x 处的挠度增量。把式(5), (6)代入式(15)可得

$$\begin{aligned} \delta U_e &= \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^a \left[-\frac{q}{2} \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{6} \right) + \frac{6EI}{a^3} u(2x-a) \right] \cdot \\ &\left[-\frac{\delta q}{2} \left(x^2 - ax + \frac{a^2}{6} \right) + \frac{6EI}{a^3} \delta u(2x-a) \right] dx + \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^b \left[-\frac{q}{2} \left(x^2 - bx + \frac{b^2}{6} \right) + \frac{6EI}{b^3} u(2x-b) \right] \cdot \\ &\left[-\frac{\delta q}{2} \left(x^2 - bx + \frac{b^2}{6} \right) + \frac{6EI}{b^3} \delta u(2x-b) \right] dx \quad (17) \end{aligned}$$

在上式中通过式(11)可将 q 用 F 和 u 表示, δq 用 δF 和 δu 表示, 再利用 Maple9.5 符号运算软件在上式关于 x 积分、整理后可得

$$\begin{aligned} \delta U_e &= \\ &= \frac{1}{360B} \left[(F + 24Aku) \frac{\delta F}{\delta u} + 24Ak(F + 384Cku) \right] \delta u \quad (18a) \end{aligned}$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(a^3 + b^3)}{2a^3b^3} l^3 \\ B &= \frac{2l^5}{a^5 + b^5} \\ C &= \frac{(a-b)^4 + 4a^2b^2}{2a^3b^3(a^5 + b^5)} l^7 \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

将式(18a)代入总势函数微分形式(式(13)), 并在等式两边除以 δu 后可得

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{360B} \left[(F + 24Aku) \frac{\delta F}{\delta u} + 24Ak(F + 384Cku) \right] + \\ &F - J = 0 \quad (19) \end{aligned}$$

这里式(19)是以矿柱上端位移到 u 时的状态为参考态建立的, 矿柱上端有大于 0 的微位移 $\delta u (> 0)$ 而系统处于准静态时的平衡方程, 式(19)中 J 可表示为

$$J = \delta W / \delta u \quad (20)$$

J 为使矿柱产生单位位移时所需外界输入系统的能量, 可称之为能量输入率^[1]。从所得的式(13)及关于式(13)的物理意义说明可知, 式(19)中的 $J > 0$ 时, 矿柱在作准静态位移; 若式(19)中的 $J = 0$ 时, 则表明无须外力 q 做功, 仅凭系统内部的能量转移(顶板或岩梁所蓄的弹性应变能向矿柱转移), 矿柱位移便可自动增大, 表明系统处于临界状态, 故可用 $J = 0$ 来作为判定系统失去准静态, 或矿柱失稳破裂(岩爆)的临界条件。

图 3 中由式(2)表示的 $F(u)$ 曲线软化段上拐点 t 处的位移 u_t 满足 $F''(u_t) = 0$ 的条件, 可得 u_t 与 u_0 间的关系为

$$\frac{u_t}{u_0} = \left(\frac{1+m}{m} \right)^{1/m} \quad (21)$$

式(21)表明曲线指数 m 大则 u_t/u_0 小, 即 $F(u)$ 曲线软化段较陡, 矿柱介质的冲击倾向增强。岩爆在 $F(u)$ 曲线峰值力后软化段上拐点 t 之前的某点开始而在拐点之后的某点结束, 利用式(21)可将 $F(u)$ 曲线表达式(2)在拐点对应的位移 u_t 处展开得

$$F(u) = \beta u_t - \beta m(u - u_t) + \frac{\beta}{6u_t} m(1+m^2)(u - u_t)^3 + \frac{\beta}{24u_t^3} (3m^2 - 11m + 14)(1+m^2)(u - u_t)^4 + \dots \quad (22)$$

式中: $\beta = \lambda \exp[-(1+m)/m]$ 。将式(22)代入平衡方程(式(19))可得

$$\frac{\beta m(1+m)^2(\beta + 24Ak)}{2u_t} (u - u_t)^2 + \beta m(1-K) \cdot (\beta m - 24Ak)(u - u_t) - \beta m(1-K)(\beta + 24Ak)u_t - 360BkJ + O(u - u_t)^3 = 0 \quad (23)$$

由式(22)可知, 在式(23)中的 K 可表示为

$$K = \frac{384Ck}{\beta m} = \frac{384Ck}{-F'(u_t)} \quad (24)$$

以下讨论 K 在 1 附近取值的情况。由于 $(u - u_t)$ 的 2 次项是式(23)中系数不为 0 的最低幂项, 根据确定性原则^[8], 式(23)对应的是突变理论中折迭突变模型^[8, 9]的平衡方程, 故可略去 $(u - u_t)$ 的 3 次以上项来讨论岩梁 - 矿柱系统的稳定性。将式(23)化成量纲一的量形式并略加整理后得

$$\left[\frac{u - u_t}{u_t} + \frac{(1-K)(\beta m - 24Ak)}{(1+m)^2(\beta + 24Ak)} \right]^2 - \left[\frac{(1-K)(\beta m - 24Ak)}{(1+m)^2(\beta + 24Ak)} \right]^2 - \frac{2(1-K)}{(1+m)^2} - \frac{15BKJ}{8C(1+m)^2(1+24Ak/\beta)F(u_t)} = 0 \quad (25)$$

在推得式(25)时已利用 $F(u_t) = \beta u_t$ 和式(24)。

由此作变量代换:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{u - u_t}{u_t} + \frac{(1-K)(\beta m - 24Ak)}{(1+m)^2(\beta + 24Ak)} \\ \eta &= - \left\{ \left[\frac{(1-K)(\beta m - 24Ak)}{(1+m)^2(\beta + 24Ak)} \right]^2 + \frac{2(1-K)}{(1+m)^2} + \frac{15BKJ}{8C(1+m)^2(1+24k/\beta)F(u_t)} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

可将式(25)转化成折迭突变模型平衡方程的正则形式^[7]:

$$w^2 + \eta = 0 \quad (27)$$

式中: w 为状态变量, η 为控制变量。当 $\eta \leq 0$ 时, 式(27)的图形为一抛物线, $\eta = 0$ (或 $K - 1$ 轴)时将抛物线分成上、下两枝, 如图 6 所示。并有

$$u^* = \left[1 - \frac{(1-K)(\beta m - 24Ak)}{(1+m)^2(\beta + 24Ak)} \right] u_t \quad (28)$$

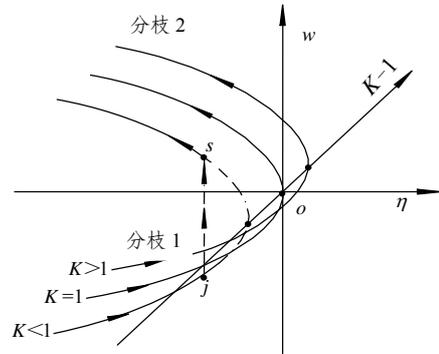


图 6 折迭突变模型的平衡曲面

Fig.6 Equilibrium surfaces of fold catastrophe model

式(26)中第 1 式将 $F(u)$ 曲线上的点映到图 6 中 $w = 0$ 的 $K - 1$ 轴上。显然 u^* 值随 K 而变, $K = 1$ 时, $u^* = u_t$ 。

将式(8), (10)代入式(16), 并利用式(11)将 δq 用 δF 和 δu 表示, 可得到外力功增量为

$$\delta W = \frac{q}{EI} \int_0^a \delta q \left[\frac{x^4}{24} - \frac{ax^3}{12} + \frac{a^2x^2}{24} \right] - \frac{EI\delta u}{a^3} (2x^3 - 3ax^2) dx + \frac{q}{EI} \int_0^b \delta q \left[\frac{x^4}{24} - \frac{bx^3}{12} + \frac{b^2x^2}{24} \right] - \frac{EI\delta u}{b^3} (2x^3 - 3bx^2) dx = \frac{ql}{360Bk} [\delta F + 384Ck\delta u] \quad (29)$$

式(29)代入式(20)后得能量输入率为

$$J = \frac{\delta W}{\delta u} = \frac{ql}{360Bk} \left(\frac{\delta F}{\delta u} + 384Ck \right) \quad (30)$$

由此看到能量输入率 J 是个变量。在 $F(u)$ 曲线软化段的某些区段上式(30)中的 $J > 0$ 。在这样的区段上, 式(25)可以写成如下两个式子, 即

$$\frac{u - u_t}{u_t} + K_0 = w_1 =$$

$$\frac{-1}{1+m} \sqrt{K_0^2 + 2(1-K) + \frac{15BKJ}{8C \left(1 + \frac{24Ak}{\beta} \right) F(u_t)}} \quad (31)$$

$$\frac{u - u_t}{u_t} + K_0 = w_2 = \frac{1}{1+m} \sqrt{K_0^2 + 2(1-K) + \frac{15BKJ}{8C \left(1 + \frac{24Ak}{\beta}\right)} F(u_t)} \quad (32)$$

其中,

$$K_0 = \frac{(1-K)(\beta m - 24Ak)}{(1+m)(\beta + 24Ak)}$$

式(31), (32)分别为岩梁 - 矿柱系统准静态平衡路径的下、上两个分枝, 且分别对应于图 3 中 $F(u)$ 曲线峰后软化段拐点 t 以上和以下的某区段。在矿柱破裂情况下, 岩梁 - 矿柱系统平衡位置最终是要到达图 6 中分枝 2 的。从图 6 中可得, 对不为 0 的 η 值, 系统有 2 个平衡位置与其对应, 当 K 值给定, 若平衡位置由分枝 1 经原点或 $K-1$ 轴过渡到分枝 2 (即两条准静态平衡路径可以延伸到 $K-1$ 轴), 矿柱将以准静态形式破裂。否则, 平衡位置将以跳跃形式到达分枝 2, 矿柱以动力失稳形式破碎 (岩爆)。

4.2 非对称开采矿柱失稳特性

K 固定时, 由式(26), (30)和(31)可知, 当 $u < u^*$ 且在矿柱压缩、岩梁下沉 u 增大过程中, $F'(u)$ 及 J 减小, 故 η 与 w_1 由负向 0 变化, 即系统平衡位置 (η, w_1) 沿在图 6 分枝 1 右行; 由式(26), (30)和(32)可知, 当 $u > u^*$ 且 u 增大时, $F'(u)$ 及 J 增大, 故 η 负向增大而 w_2 正向增大, 即平衡位置 (η, w_2) 沿分枝 2 左行。下面来看 K 取不同的值时 u 趋近和离开式(29)中的 u^* , 即平衡位置 (η, w) 趋近和离开 $K-1$ 轴的情况。

(1) $384Ck < -F'(u_t)$ 即 $K < 1$ 时

平衡位置 (η, w_1) 沿分枝 1 右行, 由此可以证明, 在分枝 1 上存在某点 $w_j < 0$, 即 $u < u^*$ 的某点 u_j 处, 有 $-F'(u_j) < -F'(u^*) < -F'(u_t)$ 会使得

$$F'(u_j) + 384Ck = 0 \quad (33)$$

由此 Cook 刚度判据^[10]得到满足, 在点 u_j 处 (式(30)中有

$$\frac{\delta W}{\delta u} = 0 \text{ 或 } J = 0 \quad (34)$$

由前文可知该系统处于临界状态。由式(16)可得

$$\frac{\delta W}{\delta u} = \frac{q \int_0^{2l} \delta y(x) dx}{\delta u} = \frac{2ql \delta y_m}{\delta u} \quad (35)$$

其中,

$$\delta y_m = \frac{q \int_0^{2l} \delta y(x) dx}{2l} \quad (36)$$

为梁轴 $x = a$ 处有挠度增量 δu 时挠曲线上各点挠度增量的平均值。只要矿柱形变 $\delta u (> 0)$, 图 2 中梁挠曲线除点 A, B 外的任一点上的挠度增量 $\delta y(x) > 0$, 故恒有挠度的平均增量 $\delta y_m > 0$ 。系统平衡位置在准静态平衡路径分枝 1 上移动时, δy_m 与 δu 是同阶微量。通过式(35), 由临界条件 $J = \delta W / \delta u = 0$, 或 $\frac{\delta y_m}{\delta u} = 0$, 可得

$$\frac{\delta u}{\delta y_m} \rightarrow \infty \quad (37)$$

这表明在 u_j 处, 位移 u 将有一个突然的(有限)改变量。由于除 $K-1$ 轴上的点之外, 对于同一 η 值, w 有 2 个状态与之对应, 故平衡位置将从分枝 1 的 w_j 点跳跃到分枝 2 的 w_s 处 (见图 6)。在 w_s 点有着与式(22)形式相同的关系式, 即

$$F'(u_s) + 384Ck = 0 \quad (38)$$

如图 3 所示。由于在点 j, s 均有 $J = 0$, 根据式(31), (32)可得矿柱以动力形式失稳的幅度为

$$\Delta u = u_s - u_j = \frac{2}{1+m} \sqrt{\left[\frac{(1-K)(\beta m - 24Ak)}{(1+m)(\beta + 24Ak)} + 2(1-K) \right] u_t} \quad (39)$$

注意到式(17)中 $F(u)u + F(u)\delta u = \delta[F(u)u]$, 将式(17)与式(14)相加, 再将它们从 u_j 到 u_s 积分 (此阶段 $J = 0$), 可得失稳期间岩梁所释放的超过矿柱由于破裂所吸收能量之后的弹性应变能部分为

$$\Delta E = \frac{1}{720Bk} [(F_s^2 - F_j^2) + 48Ak(F_s u_s - F_j u_j) + 24A(384Ck^2)(u_s^2 - u_j^2)] + \int_{u_j}^{u_s} F(u) \delta u \quad (40)$$

其几何形式为图 3 阴影区面积 (将图中 oj 斜直线平移到右边 j 点所围成)。由于是释放能量, $\Delta E < 0$ 。这部分多余的能量将转变成岩梁 - 矿柱系统的动能:

$$\Delta T = -\Delta E \quad (41)$$

ΔT 中一小部分消耗于矿柱裂缝动力扩展, 大

部分将转变成围岩自身的动能，引起弹性波向四周传播。

当 $a > l > b$ 时，由式(3)，(4)可知，岩梁 C 处的梁端弯矩 $M_{CA} > M_{CB}$ ，这使矿柱受有逆时针方向的附加力矩 $M_C = M_{CA} - M_{CB}$ ，利用式(11)可将的附加力矩 $M_C = M_{CA} - M_{CB}$ 用 F 和 u 表示为

$$M_C = \frac{q(a^2 - b^2)}{12} - 6EIu \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = \frac{(a-b)}{6} \left(F + 96EIu \frac{l^3}{a^3b^3} \right) \quad (42)$$

附加力矩 M_C 对矿柱产生小偏压，其偏心矩为

$$e = \frac{M_C}{F(u)} = \frac{(a-b)}{6} \left(1 + \frac{96EIu}{F(u)} \frac{l^3}{a^3b^3} \right) \quad (43)$$

小偏压使矿柱一侧的压缩量要大于另一侧，因此矿柱若发生动力失稳，必定发生在压缩强度大的矿壁处，导致侧帮岩爆。

小偏压使图 1 矿柱横截面承受轴压力的面积 $B \times 1$ 减小为 $\bar{B} \times 1 (\bar{B} < B)$ ，式(2)中矿柱的初始刚度 $\lambda = E_0B/H$ 相应减小为 $\bar{\lambda} = E_0\bar{B}/H$ ，矿柱轴向承载力 F 减小为 $\bar{F} = \bar{\lambda}u \exp[-(u/u_0)^m]$ ， $F(u)$ 曲线软化段拐点处斜率的绝对值 $|F'(u_t)|$ 减小为 $|\bar{F}'(u_t)| = \bar{\beta}m = \bar{\lambda} \exp[-(1+m)/m]$ ，曲线软化段变得平缓。也就是说，小偏压减小了矿柱刚度即冲击倾向。

(2) $384Ck = -F'(u_t)$ 即 $K = 1$ 时

当 $K = 1$ 时，式(28)中的 $u^* = u_t$ 对应图 6 中 $K - 1$ 轴上的点，而式(31)，(32)则转变为

$$\frac{u - u_t}{u_t} = w_1 = \frac{-1}{1+m} \sqrt{\frac{15BJ}{8C \left(1 + \frac{24Ak}{\beta} \right) F(u_t)}} \quad (44)$$

$$\frac{u - u_t}{u_t} = w_2 = \frac{1}{1+m} \sqrt{\frac{15BJ}{8C \left(1 + \frac{24Ak}{\beta} \right) F(u_t)}} \quad (45)$$

平衡位置 (η, w_1) 沿分枝 1 右行， J 由正而减小；据条件 $-F'(u_t) = 384Ck$ 及式(30)可知，当 $u = u_t = u^*$ 时，临界条件 $J = 0$ 才得到满足，因为这时式(44)，(45)中的 $w_1 = w_2 = 0$ ，也即这时图 6 中岩梁 - 矿柱系统的准静态平衡路径分枝 1 和分枝 2 延伸到 $K - 1$ 处相连，从而平衡位置可以平稳(无跳跃)地从分枝 1 过渡到分枝 2 并沿分枝 2 左行。这表明，随工作面

推进及矿柱受力情况的变化，矿柱持续地以渐进形式破裂，而降低了对岩梁的支撑作用。

(3) $384k > -F'(u_t)$ 即 $K > 1$ 时

平衡位置将从分枝 1 平稳地过渡到分枝 2，矿柱似渐进形式破裂(见图 6)。

5 岩梁等效刚度和能量变化率曲线

式(33)表明，在矿柱失稳起始点 Cook 刚度判据成立，由此得到非对称开采时岩梁的等效刚度为

$$K_e = 384Ck = 384 \frac{[(a-b)^4 + 4a^2b^2]}{2a^3b^3(a^5 + b^5)} l^7 k \quad (46)$$

通过式(47)绘出图 1, 2 中矿柱小偏离中央位置时，岩梁等效刚度 $K_e = 384Ck$ 随跨长 a/l 的变化关系如图 7，从图中看到， $a = b = l$ 时岩梁等效刚度取极大值 $K_{e,max} = 384k$ 。当 $a \neq b$ 时 K_e 值减小。对于 $a = 1.2l$ ， $b = 0.8l$ 时，由式(18)可得

$$\left. \begin{aligned} 24A &= 30.38, & 360B &= 255.68 \\ 384C &= 30.38 + 255.68 = 286.06 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

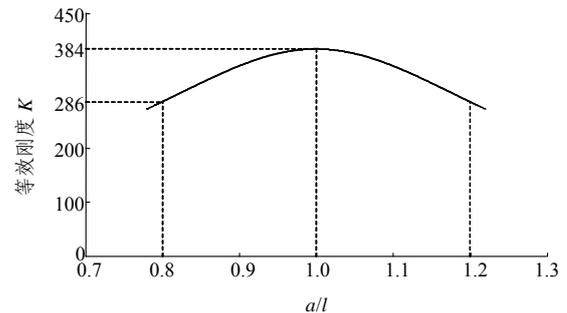


图 7 岩梁等效刚度与非对称性关系

Fig.7 Relationship between the equivalent stiffness of rock beam and dissymmetry

非对称矿柱位置减小岩梁的等效刚度 K_e ，但同时又减小了矿柱刚度即冲击倾向。两方面的综合作用效果，会使岩梁 - 矿柱系统动力失稳的强度要小于矿柱位于对称位置的系统动力失稳的强度。

当图 1, 2 中 $a = b = l$ 时成为对称开采布局。容易看到，当 $a = b = l$ 时式(18)中有： $A = 1$ ， $B = 1$ ， $C = 1$ 。

由式(17)可得：岩梁所蓄弹性势能关于梁 $x = a$ 处位移或系统状态变量 u 的变化率表达式：

$$\frac{\delta U_e}{\delta u} = \frac{1}{360Bk}$$

$$\left[(F + 24Aku) \frac{\delta F}{\delta u} + 24Ak(F + 384Cku) \right] \quad (48)$$

式中： $u = 0$ 时 $F = 0$ ，因此 $\delta U_e / \delta u = 0$ 。在图 3 中 $F(u)$ 曲线上 j, s 点，将式(33)，(38)的系统失稳起始点和终止点条件 $F'(u) = 384Ck$ 代入式(48)，可得

$$\delta U_e / \delta u = -F(u_j) < 0 \quad (49)$$

将式(2)代入式(48)后两端除 $K_e u_0 = 384Cku_0$ ，可得量纲一的量化后的岩梁弹性势变化率表达式为

$$\frac{\delta U_e / \delta u}{384Cku_0} = \frac{\delta \bar{U}_e}{\delta \bar{u}} = \frac{1}{360B \times 384C} \cdot \left\{ \left(\frac{\lambda}{k} \right)^2 \frac{u}{u_0} \left[1 - m \left(\frac{u}{u_0} \right)^m \right] \exp \left[-2 \left(\frac{u}{u_0} \right)^m \right] + 24A \frac{\lambda}{k} \frac{u}{u_0} \left[2 - m \left(\frac{u}{u_0} \right)^m \right] \exp \left[- \left(\frac{u}{u_0} \right)^m \right] + 24A \times 384C \frac{u}{u_0} \right\} \quad (50)$$

式中： $\bar{u} = u/u_0$ 。当 $a = 1.2l$ ， $b = 0.8l$ 时，据式(47)，取 $m = 1$ ， $\lambda/k = 11 \times 384C$ 。对式(50)利用 Matlab 软件绘出量纲一的量岩梁弹性势能变化率曲线 $\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} - \bar{u}$ 如图 8 所示。

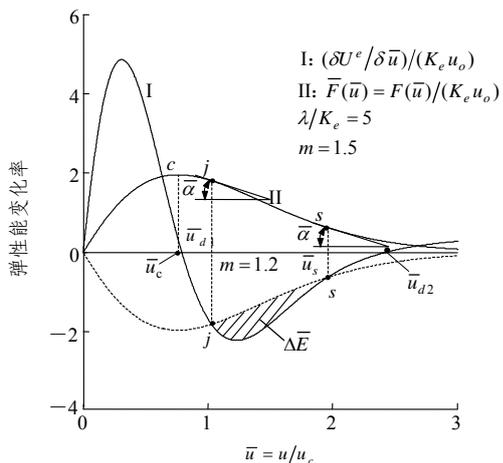


图 8 岩梁弹性能变化率和矿柱耗能量纲一的量化曲线
Fig.8 Dimensionless curves of change rate of rock beam's elastic energy and dissipated energy of pillar

在矿柱形变的 $\bar{u}_{d1} (> \bar{u}_c)$ 处，式(48)中 $\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} = 0$ ，它对应着图 8 中的 0 点；在 \bar{u}_{d1} 左侧 $\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} > 0$ ，曲线位于 \bar{u} 轴上方，这表明岩梁在吸收能量；在 \bar{u}_{d1}

右侧， $\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} < 0$ ，曲线位于 \bar{u} 轴下方，这表明 $\bar{u} > \bar{u}_{d1}$ 时后岩梁在释放能量。

对于矿柱，由式(14)知，在点 j 和点 s 有

$$\left. \begin{aligned} \delta U_p / \delta u = F(u_j) > 0 \\ \delta U_p / \delta u = F(u_s) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

将式(2)两端除以 $384Cku_0$ ，得到量纲一的量表表达式：

$$\frac{\delta \bar{U}_p}{\delta \bar{u}} = \bar{F}(\bar{u}) = \frac{1}{384C} \frac{\lambda}{k} \frac{u}{u_0} \exp \left(- \frac{u}{u_0} \right)^m \quad (52)$$

用 Matlab 软件将式(52)绘在图 8 上，由于矿柱形变破裂始终吸收、耗散能量， $\bar{F}(\bar{u})$ 曲线恒位于 \bar{u} 轴上方。将图中 $\bar{F}(\bar{u})$ 曲线绕 \bar{u} 轴翻转 180° ，再由式(49)，(51)容易看到，2 条曲线在 $(\bar{u}_j, -\bar{F}(\bar{u}_j))$ 和 $(\bar{u}_s, -\bar{F}(\bar{u}_s))$ 点相交。在 \bar{u}_j 以左， $-\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} < \delta \bar{U}_p / \delta \bar{u}$ ，需要外力做功(即 $J > 0$)矿柱才能形变 ($u > 0$)；在 \bar{u}_j 处， $-\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} = \delta \bar{U}_p / \delta \bar{u}$ ，系统处于临界状态；在 \bar{u}_j 以右， $-\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} > \delta \bar{U}_p / \delta \bar{u}$ ，即岩梁释放的应变能大于矿柱耗散的能量，无需外力做功，矿柱形变便可急剧增大(也即矿柱动力失稳起始点是在图 3 上点 j)，该过程延续到点 \bar{u}_s 。在此期间 $J(u) = 0$ 。图 8 中的曲线围成的阴影区面积 $\Delta \bar{E}$ 乘以 $K_e u_0$ ，便是 (\bar{u}_j, \bar{u}_s) 阶段岩梁释放超过矿柱破裂耗散能量的部分：

$$\Delta E = K_e u_0^2 \Delta \bar{E} = 384Cku_0^2 \Delta \bar{E} \quad (53)$$

由于是释放能量， $\Delta \bar{E} < 0$ 这与图 8 中阴影区面积位于 \bar{u} 轴下方一致。 ΔE 将转变成系统动能 ΔT ，促成矿柱动力失稳——岩爆。在点 \bar{u}_s 之后，又有 $-\delta \bar{U}_e / \delta u < \bar{F}(\bar{u})$ ，故需 $J(u) > 0$ ，外力做功输入能量才能有矿柱形变 $\delta \bar{u} > 0$ ，也即矿柱动力失稳终止点是在图 3 上点 s 。由此可得，点 j 与点 s 的位移差 $\Delta \bar{u} = (\bar{u}_s - \bar{u}_j)$ 大，曲线围成的阴影区面积大，则矿柱失稳强度大。

假若矿柱破碎严重，岩梁完全失去矿柱支承，受重力荷载作用岩梁挠曲线位置变化到图 4 中位置下方时，岩梁内弹性势能开始增加。在图 8 中表现为 $\bar{u} > \bar{u}_{d2}$ 后有 $\delta \bar{U}_e / \delta \bar{u} > 0$ ，即岩梁弹性势能变化率曲线延伸到 \bar{u} 轴上方。其中， $\bar{u}_{d2} = \tilde{u}/u_0$ 。

图 8 以几何形式阐明了第 4 节中对矿柱失稳所作的全部数学描述。注意到图 8 中 $\bar{F}(\bar{u})$ 曲线上点 j ，点 s 处的倾角 $\bar{\alpha}_j = \bar{\alpha}_s$ ，并与图 3 $F(u)$ 曲线上点 j ，点 s 处的倾角 $\alpha_j = \alpha_s$ 作比较，可以直观地知晓通过

从式(3)~(52)所作的所有数学运算正确,且全文前后相一致。另外,图3中由式(40)表示的阴影区面积 ΔE ,与通过图8阴影区面积 $\Delta \bar{E}$ 得到的式(53)表示矿柱动力失稳时系统释放量 ΔE 与完全相同。前者分别以岩梁形变与矿柱形变表示,后者则是一致地用矿柱形变 u 来表示。

6 结 语

(1) 正确求得非对称开采岩梁弯矩方程和挠曲线方程,采用突变理论法,以数学形式和图解形式严格确定非对称开采矿柱失稳幅度、失稳起始点和终止点位置、给出失稳瞬间岩梁的弹性能释放量,阐明了矿柱失稳的孕育和发生和成灾强度规律。

(2) 图8中绘出量纲一的量化后的岩梁弹性势能变化率曲线和矿柱荷载-位移关系曲线蕴涵了丰富的信息量,对了解岩梁-矿柱系统各形变阶段的行为规律和识别岩梁沿某方向的等效刚度问题上有重要作用。

(3) 非对称矿柱受小偏压,一侧压缩量大于另一侧,因此矿柱动态破裂,必定先发生在压缩强度大的一侧。对称开采时岩梁等效刚度 K_0 最大。非对称开采减小岩梁的等效刚度,但由于偏压又减小了矿柱刚度即冲击倾向,综合作用的效果,会使其失稳的强度要小于对称开采时矿柱的失稳强度。

(4) 矿柱受小偏压情况下,严格说来岩梁 C 截面或矿柱上端面转角 $\theta_c \neq 0$,更精确的考虑应在文中系统总势能函数微分形式(13)中要引入矿柱弯曲应变能增量的影响,但这样会使问题变得极为复杂而难以着手分析。由于导致矿柱实际冲击破坏的状态变量是矿柱压缩形变 u 而不是 θ_c ,为了突出问题的本质同时又简化计算,在分析模型中假定矿柱上方岩梁挠曲线转角为 0 ,这在矿柱关于中央位置有较小偏离情况下,可认为定近似值适用。

参考文献(References):

- [1] 潘岳, 王志强. 狭窄矿柱冲击地压的折迭突变模型[J]. 岩土力学, 2004, 25(1): 23-31.(Pan Yue, Wang Zhiqiang. Analysis by catastrophe theory of rockburst in narrow coal pillar[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(1): 23-31.(in Chinese))
- [2] 李宏, 徐曾和, 徐小荷. 坚硬顶板下矿柱岩爆前兆规律的探讨[J]. 力学与实践, 1997, 19(5): 22-24.(Li Hong, Xu Zenghe, Xu Xiaohu. Discussion about forewarning of coal pillar rockburst under rigid roof[J]. Mechanics and Engineering, 1997, 19(5): 22-24.(in Chinese))
- [3] 李宏, 徐曾和, 徐小荷. 非对称开采时矿柱岩爆的准则与前兆[J]. 中国矿业, 1997, 6(1): 46-51.(Li Hong, Xu Zenghe, Xu Xiaohu. Criteria and forewarning of ore pillar rock bursts in asymmetric mining[J]. China Mining Magazine, 1997, 6(1): 46-51.(in Chinese))
- [4] 闵长江, 卜凡启. 煤矿冲击矿压及防治技术[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1998.(Min Changjiang, Pu Fanqi. Mining Rockburst and Its Prevention Technology, University Press[M]. Xuzhou: China University of Mining and Technology Press, 1998.(in Chinese))
- [5] Karcinovic D. Statistical aspects of the continuous damage theory[J]. Int. J. Solids Structures, 1982, 18(7): 551-562.
- [6] 杨天祥. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1994.(Yang Tianxiang. Structural Mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 1994.(in Chinese))
- [7] 刘昭培, 张毓美. 结构力学[M]. 天津: 天津大学出版社, 1994.(Liu Zhaopei, Zhang Yunmei. Structural Mechanics[M]. Tianjin: Tianjin University Press, 1994.(in Chinese))
- [8] 凌复华. 突变理论的历史、现状和展望[J]. 力学进展, 1984, 14(4): 289-403.(Ling Fuhua. History, present and advances of the catastrophe theory[J]. Advances in Mechanics, 1984, 14(4): 289-403.(in Chinese))
- [9] Saunders P T. 突变理论入门[M]. 凌复华译. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1983.(Saunders P T. Introduction of Catastrophe Theory[M]. Translated by Ling Fuhua. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Documents Publishing House, 1983.(in Chinese))
- [10] Cook N G W. The failure of rock[J]. Int. J. Rock. Min. Sci., 1965, 2(3): 389-403.