

# 基于能量法的强夯频域分析

谢能刚, 赵 雷, 方 浩

(安徽工业大学 力学系, 安徽 马鞍山 243002)

**摘要:** 强夯分析一般基于时域, 利用能量方法, 在频域中对强夯作用下地基动力响应进行研究与计算。由于地基模态密集, 提出以能量响应信息的收敛作为模态截断的判断指标, 建立能量范数和能量判据, 计算强夯动力响应的模态截断阶数。根据能量方程研究强夯过程中地基应变能和动能的响应规律, 研究结果表明大量的夯击能都转变为波动能量, 可以认为除了表层土直接受夯锤的冲击力作用外, 深层土主要是受波动影响。

**关键词:** 土力学; 强夯; 能量法; 模态截断; 能量判据

**中图分类号:** TU 472.3

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000 - 6915(2006)增 1 - 3224 - 05

## FREQUENCY-DOMAIN ANALYSIS OF DYNAMIC COMPACTION BASED ON ENERGY METHOD

XIE Nenggang, ZHAO Lei, FANG Hao

(School of Mechanical Engineering, Anhui University of Technology, Ma'anshan, Anhui 243002, China)

**Abstract:** Dynamic compaction analysis is usually based on time-domain. The energy method is used to calculate and analyze the dynamic response of foundation under dynamic compaction within frequency-domain. Since the modes of foundation are dense, by taking the criterion of energy response as mode truncation index, the energy norm and criterion are established to calculate the mode truncated order of dynamic compaction response. According to energy equation, the response regulation of kinetic energy and strain energy during dynamic compaction is studied. The results show that most of the compaction energy is changed into wave energy. It is considered that the deep soil is mainly under the effect of wave energy though the surface soil is under the compaction force directly.

**Key words:** soil mechanics; dynamic compaction; energy method; mode truncation; energy criterion

## 1 引 言

对于强夯问题的动力学控制方程, 分析时一般基于时域<sup>[1, 2]</sup>, 但由于强夯振动是由多种频率成分叠加而成的复杂振动, 频域分析可以揭示更多的强夯振动特征, 因此有部分学者, 如孙进忠等<sup>[3]</sup>建立了强夯振动频域分析模型, 得出了介质作用函数和

强夯激励函数的计算方法。S. Valliappan 等<sup>[4]</sup>应用 Fourier 变换分析地基表面承受垂直谐波荷载的强夯振动特性, 得到了二维动力固结的频域解。从本质上说, 夯锤夯击地基的过程就是夯击能在地基中传播、耗散和吸收的过程<sup>[5]</sup>, 因此本文利用能量方法在频域中对强夯动力响应进行研究与计算, 主要内容为: (1) 根据能量判据计算强夯动力响应的模态截断阶数; (2) 根据能量方程研究强夯过程中地基

**收稿日期:** 2005 - 07 - 26; **修回日期:** 2005 - 11 - 07

**基金项目:** 安徽省教育厅自然科学研究重点项目(2003kj010zd)

**作者简介:** 谢能刚(1971 - ), 男, 博士, 1993 年毕业于哈尔滨工程大学机械专业, 现任教授, 主要从事计算力学方面的教学与研究工作。  
E-mail: xieng@ahut.edu.cn

应变能和动能的响应规律。

## 2 强夯模态截断的能量判据

由于地基的自振频率密集，因此采用模态叠加法计算强夯动力响应时，取几阶模态参与叠加即模态截断阶数取多少是一个关键技术问题，因为模态截取过少，将丧失重要的模态信息，导致计算结果不准确；模态截取过多，将不易激发的高阶模态也参与叠加，会导致计算量过大。一般作为模态截断的判据是结构动力特征响应级数的收敛性，但由于结构的振动响应信息是多样的，包括应力、位移、速度、加速度和能量等，因此在判据的选择上就有多种，谢能刚等<sup>[6-7]</sup>提出以能量响应信息的收敛作为模态截断的判断指标，建立了能量范数和能量判据，并证明了能量判据随着模态截断阶数增大的收敛性。

强夯作用下地基有阻尼的  $n$  维线性强迫振动方程为

$$M\ddot{\delta} + C\dot{\delta} + K\delta = P \quad (1)$$

式中： $M$ 、 $C$ 、 $K$  分别为质量矩阵、比例阻尼矩阵和刚度矩阵； $P$  为强夯冲击力向量。

若采用模态叠加法求解式(1)，有

$$\left. \begin{aligned} \delta_N(t) &= \sum_{i=1}^N \phi_i Y_i(t) \\ \dot{\delta}_N(t) &= \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{Y}_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： $\delta_N(t)$ 、 $\dot{\delta}_N(t)$  分别为模态截断阶数为  $N$  时地基的  $n$  维位移向量和  $n$  维速度向量； $\phi_i = \{\phi_{1i} \ \phi_{2i} \ \dots \ \phi_{ni}\}^T$  为第  $i$  阶模态振型； $Y_i(t)$  为第  $i$  阶模态坐标。

引入地基  $2n$  维状态响应向量  $U_N(t) = \begin{Bmatrix} \delta_N(t) \\ \dot{\delta}_N(t) \end{Bmatrix}$ ，

令截断阶数  $N$  分别取  $1, 2, \dots, n$ ，则相应的状态响应向量为  $U_1(t)$ 、 $U_2(t)$ 、 $\dots$ 、 $U_n(t)$ ，将这些状态响应向量组成一个  $n$  个元素的集合  $U$  (线性空间)，其中的每一个元素都是  $2n$  维向量。为了比较该集合内  $n$  个元素之间的差异，在此集合内可定义范数  $\|U_N(t)\|$ ，得到代表这  $n$  个元素某种测度的范数序列  $\|U_1(t)\|, \|U_2(t)\|, \dots, \|U_n(t)\|$ ，若该范数序列收敛，则当模态截断阶数  $N$  取合适值  $N_0$  时，能得到  $\|U_n(t)\| - \|U_{N_0}(t)\| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  为给定的允许精度)。由于

范数代表着反映集合中元素之间差异的某种测度，因此可以判断出元素  $U_{N_0}(t)$  和  $U_n(t)$  之间的差异很小，在要求精度下可近似用  $U_{N_0}(t)$  代替  $U_n(t)$ ，这就解决了模态截断时模态截断阶数的取值问题。

在线性空间  $U$  中定义函数：

$$\|U_N(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2} U_N^T(t) Q U_N(t)} \quad (N=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

式中： $Q$  为权矩阵，且  $Q = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$ 。

当模态截断阶数为  $N$  时，能量判据  $J(N)$  为

$$J(N) = \max_{t \in [0, T]} \|U_N(t)\|^2 \quad (4)$$

谢能刚等<sup>[7]</sup>给出了有关式(3)所定义函数是范数的具体证明以及能量判据收敛性证明，这里不再赘述。

## 3 强夯振动的能量方程

将  $\delta_N(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i Y_i(t)$ ， $\dot{\delta}_N(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{Y}_i(t)$ ， $\ddot{\delta}_N(t) =$

$\sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{Y}_i(t)$  代入式(1)可得

$$M \sum_{i=1}^N (\phi_i \ddot{Y}_i(t)) + C \sum_{i=1}^N (\phi_i \dot{Y}_i(t)) + K \sum_{i=1}^N (\phi_i Y_i(t)) = P \quad (5)$$

对式(5)两边同时乘  $\delta_N^T(t)$ ，并在时段  $[0, t]$  内积分，利用模态正交性可得

$$\int_0^t \sum_{i=1}^N (m_i^* \dot{Y}_i(t) \ddot{Y}_i(t)) dt + \int_0^t \sum_{i=1}^N (c_i^* \dot{Y}_i(t) \dot{Y}_i(t)) dt + \int_0^t \sum_{i=1}^N (k_i^* \dot{Y}_i(t) Y_i(t)) dt = \int_0^t \sum_{i=1}^N (p_i^*(t) \dot{Y}_i(t)) dt \quad (6)$$

式中： $m_i^* = \phi_i^T M \phi_i$ ， $c_i^* = \phi_i^T C \phi_i$ ， $k_i^* = \phi_i^T K \phi_i$  分别为第  $i$  阶模态的广义质量、广义阻尼和广义刚度； $p_i^*(t) = \phi_i^T P$  为第  $i$  阶模态的广义荷载。

由于求和号与积分号可换次序，对式(6)积分得

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i^* \dot{Y}_i^2(t)) + \sum_{i=1}^N \left( c_i^* \int_0^t \dot{Y}_i^2(t) dt \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_i^* Y_i^2(t)) = \sum_{i=1}^N \left( \int_0^t p_i^*(t) \dot{Y}_i(t) dt \right) \quad (7)$$

式(7)即为地基强夯动力反应的能量平衡方程，

其中的一些能量指标为： $E_d(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_i^* \dot{Y}_i^2(t))$ ，为

地基在  $t$  时刻的动能指标;  $E_s(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_i^* Y_i^2(t))$ , 为地基在  $t$  时刻的应变能指标;  $E_c(t) = \sum_{i=1}^N \left( \int_0^t c_i^* \dot{Y}_i^2(t) dt \right)$ , 为从  $t \rightarrow 0$  时段内地基阻尼耗散的能量。

实际上, 若利用模态正交性对式(3)进行化简可得

$$\|U_N(t)\| = \sqrt{\frac{1}{2} U_N^T(t) Q U_N(t)} = \sqrt{\frac{1}{2} \delta_N^T(t) K \delta_N(t) + \frac{1}{2} \dot{\delta}_N^T(t) M \dot{\delta}_N(t)} = \sqrt{\frac{1}{2} (A + B)} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [k_i^* Y_i^2(t) + m_i^* \dot{Y}_i^2(t)]} = \sqrt{E_d(t) + E_s(t)} \quad (8)$$

其中,

$$A = \left( \sum_{i=1}^N Y_i(t) \phi_i^T \right) K \left( \sum_{i=1}^N \phi_i Y_i(t) \right)$$

$$B = \left( \sum_{i=1}^N \dot{Y}_i(t) \phi_i^T \right) M \left( \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{Y}_i(t) \right)$$

因此, 又将  $\|U_N(t)\|$  称为能量范数。

## 4 计算分析

### 4.1 计算说明

以济南绕城高速公路工程为例, 现场黄土地基, 重度  $19.0 \text{ kN/m}^3$ , 弹性模量取  $6 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\mu$  取  $0.40$ , 阻尼比  $\zeta$  取  $0.15$ 。有限元离散区域取垂直深度为  $20.0 \text{ m}$ , 水平宽度  $5.0 \text{ m}$ 。土体底部边界条件为  $u = v = w = 0$ ; 侧面边界条件为  $w = 0$ 。对地基进行单元分割, 共剖得  $7\,935$  个节点,  $6\,776$  个单元, 见图 1。夯锤重  $98 \text{ kN}$ , 落距  $10 \text{ m}$ , 锤底面积  $3.9 \text{ m}^2$ 。

对强夯的第 1 击进行计算, 输入的最大冲击应力为  $940 \text{ kPa}$ , 冲击时间为  $90 \text{ ms}$ , 时程曲线简化为等腰三角形, 见图 2。

### 4.2 计算结果与分析

图 3 所示为能量判据  $J(N)$  与模态截断阶数  $N$  的关系曲线, 从中可看出  $J(N)$  是单调上升的, 前 8 阶模态对整体能量的贡献极小, 当模态截断阶数  $N$  超过 42 时, 曲线的变化斜率趋缓, 因此合适的模态截断阶数在 42 左右, 并且此时的能量判据为  $966.2$

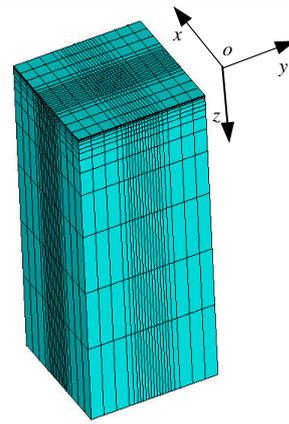


图 1 有限元网格图

Fig.1 Finite element mesh

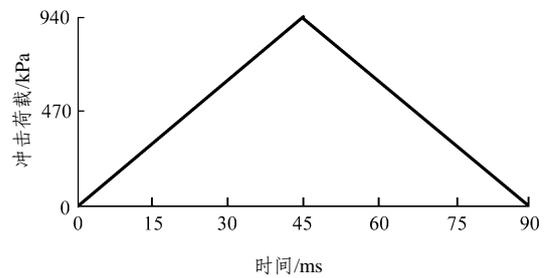


图 2 强夯冲击应力时程曲线

Fig.2 Pressure-time plot of tamping impaction

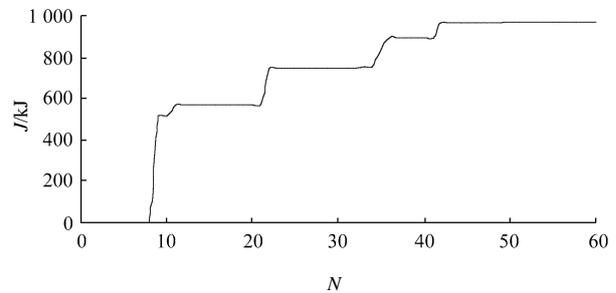


图 3 能量判据与模态截断阶数的关系

Fig.3 Relationship between energy criterion and mode truncation order

$\text{kJ}$ , 剔除阻尼耗散的那部分能量, 已经非常接近强夯的整体夯击能  $980 \text{ kJ}$ , 因此, 从能量角度看, 取 42 阶模态进行叠加可基本代表全模态。

图 4 所示为模态截断阶数分别取 10, 20, 30 和 42 时的能量时程响应比较。

图 5, 6 所示为地基表面中心结点在模态截断阶数分别取 10, 20, 30 和 42 时的动力特征响应比较。

由图 4~6 可知, 若模态截断阶数过少, 将导致计算结果不准确。

图 7, 8 所示分别为模态截断阶数取 42 时的地

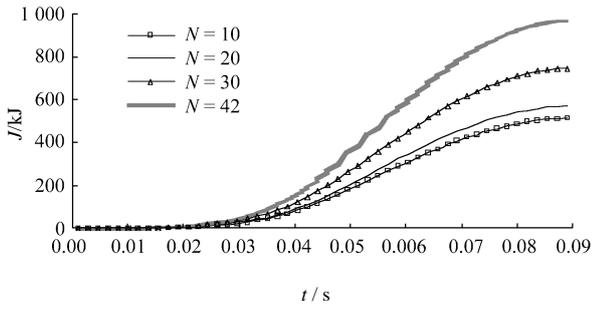


图4 不同模态截断阶数下能量时程响应特征比较  
Fig.4 Energy-time response comparison of different mode truncation orders

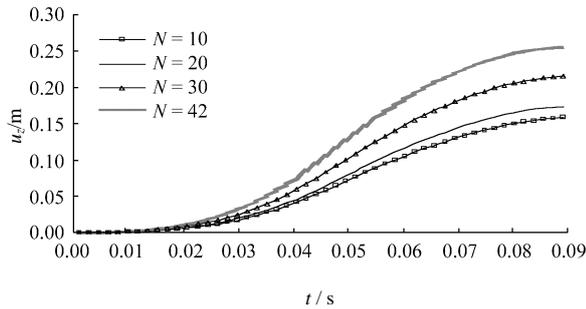


图5 不同模态截断阶数下地基表面中心节点垂直向位移  $u_z$  时程响应比较  
Fig.5 Comparison of foundation surface center node vertical direction displacement-time response's under different mode truncation orders

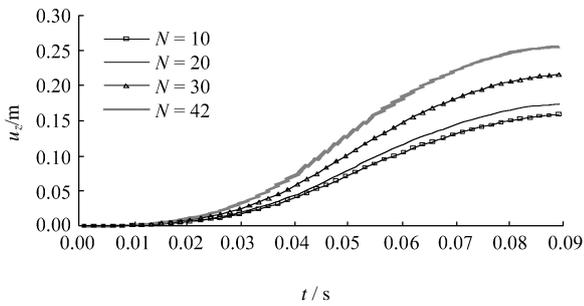


图6 不同模态截断阶数下地基表面中心节点主压应力时程响应比较  
Fig.6 Comparison of foundation surface center node principal compressive stress-time response's under different mode truncation orders

基夯后应力和位移分布等值线。

图9所示为模态截断阶数取42时地基动能、应变能的时程响应曲线。由图9可知,90%左右的夯击能都转变为地基土的动能,这符合 M. P. Gambin<sup>[8]</sup>认为强夯是一个冲击波动问题,大量的夯击能都转换为强夯冲击波动能量的结论。

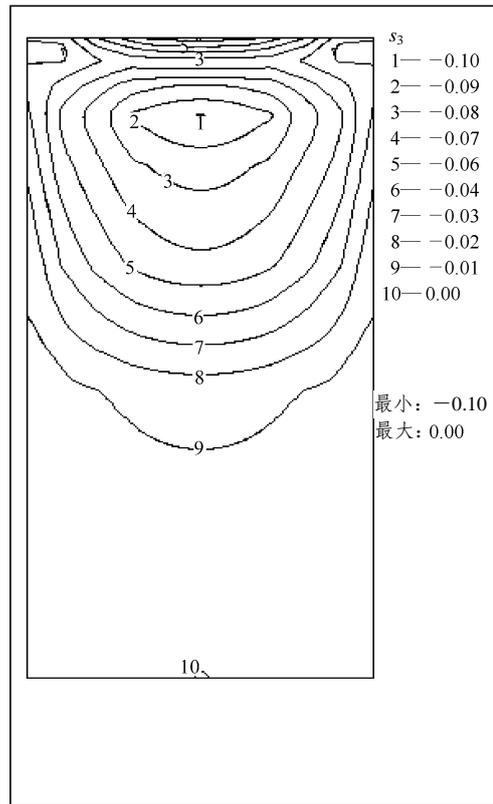


图7 主压应力等值线图(单位: MPa)  
Fig.7 Principal compressive stress isoline map(unit: MPa)

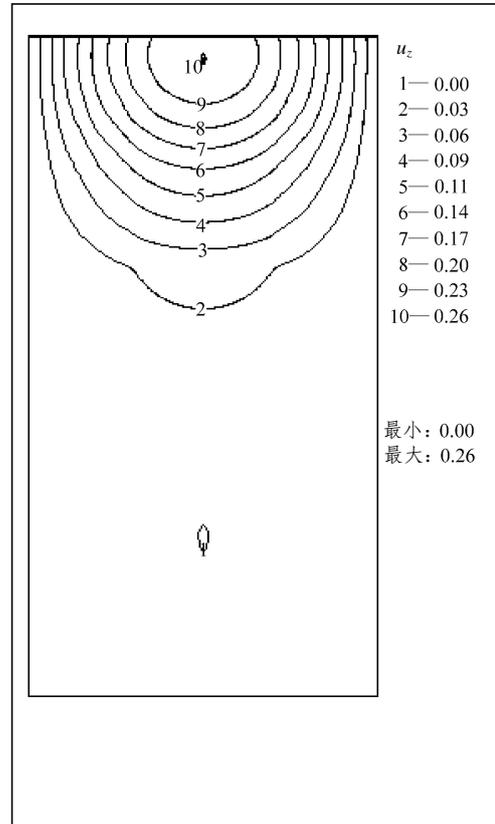


图8 垂直方向位移等值线图(单位: m)  
Fig.8 Vertical displacement isoline map(unit: m)

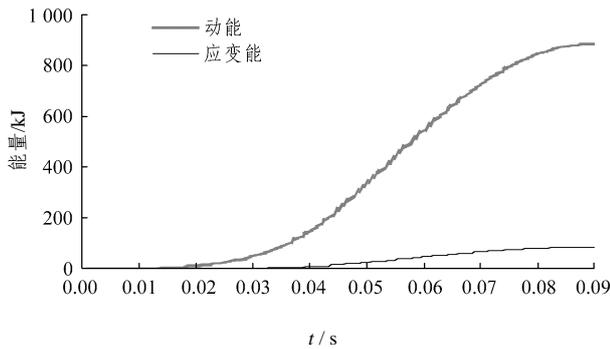


图9 地基动能、应变能的时程响应曲线

Fig.9 Response curves of Foundation kinetic energy and strain energy

### 5 结 语

(1) 根据地基自振特性分析, 地基频率密集, 第 1 阶圆频率值为 2.617, 第 60 阶圆频率值为 23.587, 因此在利用模态叠加法计算强夯动力响应时需作模态截断。

(2) 针对地基强夯的模态截断, 本文采用了一种能量判据, 其优势在于: 能量为标量, 因此其收敛计算易于实现; 能量响应信息和其他响应信息之间的关系决定了能量判据更为科学, 也更为全面。

(3) 模态截断阶数与冲击荷载的周期有关, 在本文强夯冲击力周期取 90 ms 的情况下, 合适的模态截断阶数为 42。

(4) 通过能量响应分析, 在强夯过程中, 大量的夯击能都转变为波动能量, 因此可以认为除了表层土直接受夯锤的冲击力作用外, 深层土主要是受波动影响。

#### 参考文献(References):

[1] 孔令伟, 袁建新. 强夯作用下成层地基的表面接触应力分布特征[J]. 力学学报, 1999, 31(2): 250 - 256.(Kong Lingwei, Yuan Jianxin. Study on surface contact stress distribution properties for

multi-layered foundation during dynamic consolidation[J]. Acta Mechanica Sinica, 1999, 31(2): 250 - 256.(in Chinese))

[2] 谢能刚, 王 璐, 邱 晗. 强夯动接触力的碰撞分析与并行优化求解[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(13): 2 172 - 2 176.(Xie Nenggang, Wang Lu, Qiu Han. Collision analysis and parallel optimum resolution for dynamic contact action[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(13): 2 172 - 2 176.(in Chinese))

[3] 孙进忠, 谭捍华, 祁生文, 等. 强夯振动的频域分析[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(4): 412 - 415.(Sun Jinzhong, Tan Hanhua, Qi Shengwen, et al. Frequency analysis of dynamic compaction vibration[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(4): 412-415.(in Chinese))

[4] Valliappan S, Yazdi J T, Zhao C. Analytical solution for two-dimensional dynamic consolidation in frequency domain[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1995, 19(10): 663

[5] 王四根, 刘松玉, 方 磊. 强夯冲击作用的能量问题[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 290 - 293.(Wang Sigen, Liu Songyu, Fang Lei. Problems of energy of tamping impaction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 290 - 293.(in Chinese))

[6] 谢能刚, 邵韦循, 王 彪. 基于提高动稳定性的拱坝拱圈结构抗震优化设计[J]. 水利水运工程学报, 2001, (4): 41 - 44.(Xie Nenggang, Shao Weixun, Wang Biao. Anti-seismic optimization of arch rings for raising dynamic stability of arch dam[J]. Hydro-science and Engineering, 2001, (4): 41 - 44.(in Chinese))

[7] 谢能刚, 郭兴文, 王德信. 结构振动模态截断的能量判据[J]. 振动工程学报, 2003, 16(3): 302 - 305.(Xie Nenggang, Guo Xingwen, Wang Dexin. Mode truncation of vibration structures based on energy criterion[J]. Journal of Vibration Engineering, 2003, 16(3): 302 - 305.(in Chinese))

[8] Gambin M P. Ten Years of dynamic consolidation[A]. In: Proc. of the 8th Regional Conference for Africa on Soil Mechanics and Foundation Engineering[C]. Harare: [s. n.], 1984. 363 - 370.