

基于 Drucker-Prager 准则的边坡安全系数定义 及其转换

赵尚毅, 郑颖人, 刘明维, 钱开东
(后勤工程学院 建筑工程系, 重庆 400041)

摘要: 探讨了基于 D-P(Drucker-Prager)准则的边坡稳定安全系数定义形式, 提出了各 D-P 准则之间的安全系数转换关系, 并据此建立了基于 D-P 准则的边坡稳定安全系数与传统莫尔-库仑准则条件下安全系数的关系表达式。目前, ANSYS 有限元软件采用的岩土材料屈服准则为莫尔-库仑六边形外接圆 D-P 准则, 在利用有限元强度折减法计算边坡稳定安全系数时, 可以先求出外接圆 D-P 准则条件下的安全系数, 然后利用所提出的安全系数转换公式就可直接计算出各 D-P 准则条件下的安全系数。对于平面应变条件下的强度问题, 平面应变莫尔-库仑匹配 D-P 准则(分关联和非关联两种情况)与莫尔-库仑准则等效, 因此, 通过转换就可以在 ANSYS 程序中实现莫尔-库仑准则, 而不需要进行二次开发。这样就解决了基于 D-P 准则的有限元强度折减安全系数与传统工程中采用的安全系数(基于莫尔-库仑准则)间的接轨问题。大量算例结果表明: 在平面应变条件下采用平面应变莫尔-库仑匹配 D-P 准则求得的安全系数与传统极限平衡条分法中用 Spencer 法求得的安全系数非常接近, 且误差在 1%~2%, 已经具有相当高的计算精度, 也同时证明所提出的方法是可行的。

关键词: 边坡工程; 边坡稳定分析; 有限元强度折减法; Drucker-Prager 准则; 安全系数转换

中图分类号: TD 824.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2006)增 1-2730-05

DEFINITION AND TRANSFORMATION OF SLOPE SAFETY FACTOR BASED ON DRUCKER-PRAGER CRITERION

ZHAO Shangyi, ZHENG Yingren, LIU Mingwei, QIAN Kaidong

(Department of Civil Engineering, Logistical Engineering University, Chongqing 400041, China)

Abstract: Slope stability analysis was carried out using strength reduction finite element method(FEM) based on the Drucker-Prager criterion. The definition of slope stability safety factor based on the Drucker-Prager criterion was proposed, and the safety factor conversion formula with different Drucker-Prager yield criteria was deduced. The substitutive relationship of safety factor based on the Drucker-Prager yield criterion and Mohr-Coulomb yield criterion was set up. Currently, the Mohr-Coulomb hexagon circumscribed Drucker-Prager criterion was adopted in the ANSYS programme. So, the safety factor using ANSYS with the Mohr-Coulomb hexagon circumscribed Drucker-Prager criterion is calculated, thus the safety factor based on the Drucker-Prager yield criterion(such as the Mohr-Coulomb matching Drucker-Prager yield criterion under the plane strain condition) can be obtained using the deduced conversion formulae. Under the plane strain condition, the Mohr-Coulomb yield criterion in the ANSYS programme without secondary programming development through equivalent substitution is adopted. A series of case studies indicate that the average error of safety factors between those obtained by strength reduction FEM

收稿日期: 2004-08-05; **修回日期:** 2004-08-30

作者简介: 赵尚毅(1969-), 男, 博士, 1992年毕业于重庆大学采矿工程专业, 主要从事岩土边坡工程稳定性及其数值分析方面的研究工作。E-mail: zsyansys@yahoo.com.cn

based on plane strain Mohr-Coulomb matching D-P yield criterion and those by Spencer method is 1% - 2%. The applicability of the proposed method was clearly exhibited.

Key words: slope engineering; slope stability analysis; strength reduction finite element method(FEM); Drucker-Prager yield criterion; safety factor conversion

1 引言

边坡稳定分析的有限元强度折减法利用不断降低岩土体强度，使边坡达到极限破坏状态，从而直接求出滑动面位置与边坡稳定安全系数。该方法十分贴近工程设计，使边坡稳定分析进入了一个新的时代^[1~8]。

在有限元强度折减法中采用不同的屈服准则会得出不同的安全系数。传统边坡稳定分析的极限平衡条分法采用的是莫尔-库仑准则，但莫尔-库仑准则在三维应力空间中不是一个连续函数，而是由6个分段函数所构成，该准则在三维应力空间的屈服面为不规则的六角形截面的角锥体表面(见图1)，在π平面上的图形为不等角六边形，其存在尖顶和菱角，因此，给数值计算带来困难。

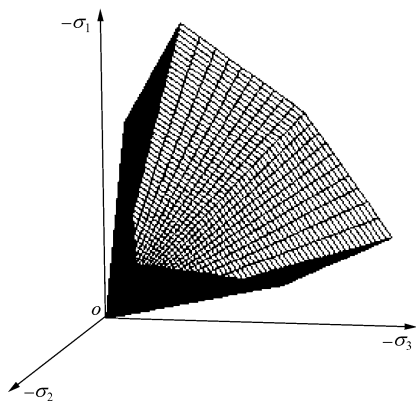


图1 主应力空间中莫尔-库仑屈服面(c=0)

Fig.1 Mohr-Coulomb yield surface in principal stress space (c=0)

目前，国际上流行的许多大型有限元软件，比如ANSYS 以及美国 MSC 公司开发的 MARC，NASTRAN 等均采用了 D-P 准则，即

$$F = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k \tag{1}$$

式中： I_1 ， J_2 分别为应力张量的第一不变量和应力偏张量的第二不变量； α ， k 为与岩土材料内摩擦角 φ 和黏聚力 c 有关的常数，不同的 α ， k 在 π 平面上代表不同的圆(见图2)，各准则的参数换算关系

见表1。D-P 屈服准则在主应力空间的屈服面为光滑圆锥面，在 π 平面上为圆形，不存在尖顶处的数值计算问题。

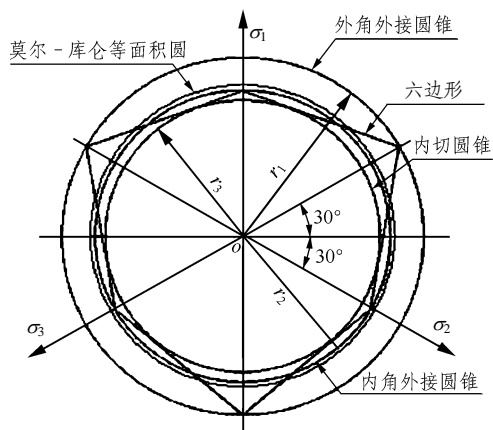


图2 各屈服准则在π平面上的曲线

Fig.2 Yield surface on the deviator plane π

表1 各准则参数换算表

Table 1 Relationship of different yield criteria

编号	准则种类	α	k
D-P1	外角点外接 D-P	$\frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$	$\frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$
D-P2	莫尔-库仑等面积圆 D-P	$\frac{2\sqrt{3} \sin \varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9 - \sin^2 \varphi)}}$	$\frac{6\sqrt{3}c \cos \varphi}{\sqrt{2\sqrt{3}\pi(9 - \sin^2 \varphi)}}$
D-P3	平面应变莫尔-库仑匹配 D-P(非关联 $\psi = 0$)	$\frac{\sin \varphi}{3}$	$c \cos \varphi$
D-P4	平面应变莫尔-库仑匹配 D-P(关联 $\psi = \varphi$)	$\frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}$	$\frac{3c \cos \varphi}{\sqrt{3}\sqrt{3 + \sin^2 \varphi}}$
D-P5	内角点外接 D-P	$\frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$	$\frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)}$

本文主要探讨基于 D-P 准则的边坡稳定安全系数的定义形式及各 D-P 准则之间的安全系数转换关系，并探讨基于 D-P 准则的边坡稳定安全系数与莫尔-库仑准则条件下安全系数之间的关系。

2 基于 D-P 准则的安全系数定义

传统边坡稳定分析的极限平衡条分法采用莫

尔 - 库仑准则, 稳定安全系数定义为

$$c' = \frac{c}{\omega}, \quad \tan \varphi' = \frac{\tan \varphi}{\omega} \quad (2)$$

式中: ω 为安全系数。

这种安全系数定义有明确的物理意义, 安全系数定义可根据滑动面的抗滑力(矩)与下滑力(矩)之比得到。

为了和目前边(滑)坡治理工程中采用的安全系数定义形式一致, 对于 D-P 准则, 也采用 c/ω , $\tan \varphi/\omega$ 的安全系数定义形式, 这样便于工程实用。

3 不同 D-P 准则之间的安全系数转换

D-P 准则中 α , k 有多种表达形式, 采用不同的 D-P 屈服准则得到的边坡稳定安全系数是不同的, 但这些屈服条件的安全系数又是可以互相转换的, 下面推导各 D-P 准则条件下的安全系数转换关系。

设 c_0 , φ_0 为初始强度参数, 在外接圆 D-P 准则条件下的安全系数为 ω_1 , 折减后的参数为 c_1 , φ_1 , 在平面应变莫尔 - 库仑匹配 D-P 准则(非关联流动法则)条件下的安全系数为 ω_2 , 折减后的参数为 c_2 , φ_2 , 因此有

$$\frac{c_0}{c_1} = \frac{\tan \varphi_0}{\tan \varphi_1} = \omega_1, \quad \frac{c_0}{c_2} = \frac{\tan \varphi_0}{\tan \varphi_2} = \omega_2 \quad (3)$$

由式(3)可得

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0 + \omega_1 \cos^2 \varphi_0}} \quad (4)$$

$$\sin \varphi_2 = \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi_0}{\sin^2 \varphi_0 + \omega_2 \cos^2 \varphi_0}} \quad (5)$$

因

$$\frac{2 \sin \varphi_1}{\sqrt{3(3 - \sin \varphi_1)}} = \alpha_1 = \frac{\sin \varphi_2}{3} = \alpha_2 \quad (6)$$

联立式(3)~(6)可得

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\left(3\sqrt{\cos^2 \varphi_0 \omega_1^2 + \sin^2 \varphi_0} - \sin \varphi_0\right)^2 - 12 \sin^2 \varphi_0}{12 \cos^2 \varphi_0}} \quad (7)$$

式(7)即为平面应变莫尔 - 库仑匹配 D-P 准则(非关联流动法则)和外接圆 D-P 准则(非关联流动法则)之间的安全系数转换关系式, 这样只要求得了外接圆 D-P 准则条件下的安全系数 ω_1 , 利用该表达式

就可以直接计算出平面应变莫尔 - 库仑匹配 D-P 准则条件下的安全系数 ω_2 。

采用同样的方法可以推得平面应变莫尔 - 库仑匹配 D-P 准则(关联流动法则)条件下的安全系数 ω_2 和外接圆 D-P 准则(关联流动法则)条件下的安全系数 ω_1 之间的转换关系式为

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\left(3\sqrt{\cos^2 \varphi_0 \omega_1^2 + \sin^2 \varphi_0} - \sin \varphi_0\right)^2 - 16 \sin^2 \varphi_0}{12 \cos^2 \varphi_0}} \quad (8)$$

进行安全系数的转换时, 各 D-P 屈服准则之间应采用相同的流动法则, 也就是说要么都采用关联流动法则, 要么都采用非关联流动法则。

4 与莫尔 - 库仑准则条件下安全系数的接轨问题

目前, 边(滑)坡治理工程中采用的稳定安全系数是基于莫尔 - 库仑准则的。因此, 关于前述各种 D-P 准则条件下的安全系数与莫尔 - 库仑准则条件下的安全系数接轨的问题, 本文认为: 对于平面应变条件下的强度问题(比如边坡稳定安全系数、地基承载力等), 平面应变莫尔 - 库仑匹配 D-P 准则与莫尔 - 库仑准则等效, 该准则分关联和非关联两种情况。

采用非关联流动法则时(膨胀角 $\psi = 0$):

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{3}, \quad k = c \cos \varphi \quad (9)$$

采用关联流动法则时(膨胀角 $\psi =$ 内摩擦角 φ):

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varphi)}}, \quad k = \frac{3c \cos \varphi}{\sqrt{3(3 + \sin^2 \varphi)}} \quad (10)$$

也就是说, 在平面应变条件下采用有限元强度折减法求边坡稳定系数时, 采用平面应变莫尔 - 库仑匹配 D-P 准则就相当于采用莫尔 - 库仑准则。

实际上, 平面应变莫尔 - 库仑匹配 D-P 准则就是在平面应变条件下根据与莫尔 - 库仑准则相匹配推导而得到的。式(10)最早是由 Drucker-Prager 提出的, 在偏平面上该准则的屈服曲线是内切莫尔 - 库仑准则的圆。

目前, ANSYS 有限元程序采用的屈服准则为外接圆 D-P 屈服准则。因此, 在利用有限元强度折减法计算边坡稳定安全系数时, 可先求出外接圆 D-P 准则条件下的安全系数, 然后再利用上面推导得到

的安全系数转换公式就可直接计算出平面应变莫尔-库仑匹配 D-P 准则条件的安全系数。这样，通过转换就可以在 ANSYS 程序中实现莫尔-库仑准则，而不需要进行二次开发。研究表明，此法可行性较好，且有相当高的计算精度。

对于三维空间问题，推荐采用莫尔-库仑等面积圆 D-P 准则，该准则要求偏平面上的莫尔-库仑不等角六边形与 D-P 圆的面积相等。

5 算例验证

均质土坡，其坡高 $H = 20\text{ m}$ ，黏聚力 $c = 42\text{ kPa}$ ，土重度 $\gamma = 20\text{ kN/m}^3$ ，内摩擦角 $\varphi = 17^\circ$ ，求坡角 $\beta = 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$ 时边坡的稳定安全系数以及对应的临界滑动面。

5.1 有限元模型建立

如图 3 所示，按照平面应变建立计算模型，边界条件为左右两侧水平约束，下部固定，上部为自由边界，采用非关联流动法则。计算采用的软件为美国 ANSYS 公司的大型有限元软件 ANSYS 5.61 商业版。

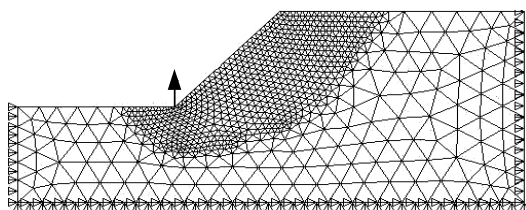


图3 有限元单元网格划分
Fig.3 Meshes of FEM model

5.2 ANSYS 计算过程中的参数设置

强度折减安全系数的计算采用 $c/\omega, \tan \varphi/\omega$ 的折减形式，采用非关联流动法则。以有限元静力平衡计算是否收敛作为边坡失稳的判据。力和位移的收敛标准系数均取为 0.000 01，最大迭代次数为 1 000 次。一次性施加重力荷载，选用全牛顿-拉普森迭代求解方法，打开自适应下降设置(如果采用关联流动法则，则建议将自适应下降关闭)。

5.3 安全系数计算结果

表 2 为各屈服准则采用非关联流动法则时的安全系数计算结果，传统极限平衡条分法安全系数计算采用的软件为加拿大的边坡稳定分析程序 SLOPE/W。表中 D-P1 为外接圆 D-P 准则；D-P2 为

莫尔-库仑等面积圆 D-P 准则；D-P3 为平面应变条件下的莫尔-库仑匹配 D-P 准则(非关联流动法则)，S 指 Spencer 法。

表 2 用不同方法求得的稳定安全系数
Table 2 Safety factors with different methods

方法	30°	35°	40°	45°	50°
FEM(D-P1)	1.91	1.74	1.62	1.50	1.41
FEM(D-P2)	1.64	1.49	1.38	1.27	1.19
FEM(D-P3)	1.56	1.42	1.31	1.21	1.12
Spencer 法	1.55	1.41	1.30	1.20	1.12
(D-P1-S)/S	0.23	0.23	0.25	0.25	0.26
(D-P2-S)/S	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06
(D-P3-S)/S	0.01	0.01	0.01	0.01	0.00

从表 2 可以看出，采用平面应变条件下的莫尔-库仑匹配 D-P 准则(D-P3)求得的安全系数与传统 Spencer 法求得的安全系数非常接近，误差在 1% 左右，具有很高的计算精度。而采用莫尔-库仑等面积圆 D-P 准则(D-P2)的计算结果比 Spencer 法计算的结果大约 6%，外接圆 D-P 准则(D-P1)条件下的安全系数比 Spencer 的计算结果约大 25%。

5.4 边坡临界滑动面的确定

根据边坡破坏的特征，边坡破坏时滑面上节点位移和塑性应变将产生突变，滑动面位置在水平位移和塑性应变突变的地方，因此，可在 ANSYS 程序的后处理中通过绘制边坡水平位移或者等效塑性应变等值云图来确定滑动面。图 4~6 为坡角 $\beta =$

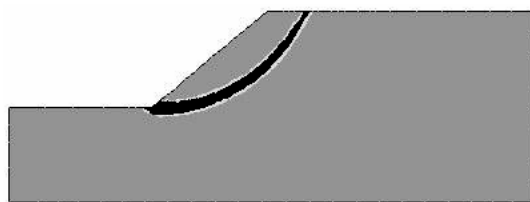


图 4 用塑性应变剪切带表示的滑动面
Fig.4 Failure surface using continuous contours of equivalent plastic strain

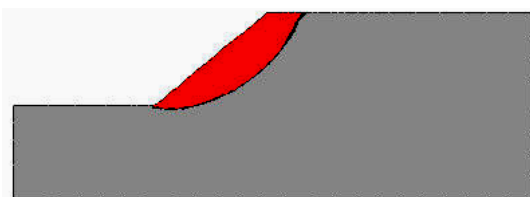


图 5 根据水平位移突变表示的滑动面形状
Fig.5 Failure surface using continuous contours of X-displacement

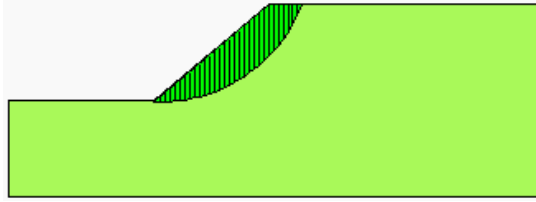


图6 用 SLOPE/W 中的 Spencer 法得到的滑动面形状
Fig.6 Failure surface by SLOPE/W with Spencer method

45°时的滑动面形状和位置,为了便于比较,将变形显示比例设置为0。

6 结 论

(1) 探讨了基于 D-P 准则的边坡稳定安全系数的定义形式,推导出了不同 D-P 准则之间的安全系数转换关系,并据此建立了基于 D-P 准则的边坡稳定安全系数与传统莫尔-库仑准则条件下安全系数的关系。

(2) 目前, ANSYS 有限元软件采用的屈服准则为外接圆 D-P 准则,在利用有限元强度折减法计算边坡稳定安全系数时,可先求出外接圆 D-P 准则条件下的安全系数,然后利用本文推导得到的公式可直接计算出其他 D-P 准则条件的安全系数。

(3) 对于平面应变条件下的强度问题,平面应变莫尔-库仑匹配 D-P 准则(分关联和非关联两种情况)与莫尔-库仑准则等效。为了使有限元强度折减法求得的边坡安全系数和传统工程实践中采用的安全系数(基于莫尔-库仑准则)接轨,同时又要使有限元数值计算变得方便,本文提出对于平面应变条件下的强度问题,可采用平面应变莫尔-库仑匹配 D-P 准则。因此,利用本文推导的安全系数换算公式,通过转换就可以在 ANSYS 程序中实现莫尔-库仑准则,而不需要进行二次开发,从而扩大了 ANSYS 程序在岩土工程中的应用范围。

(4) 大量算例证明,在平面应变条件下采用平面应变莫尔-库仑匹配 D-P 准则求得的安全系数与传统 Spencer 法求得的安全系数非常接近,误差仅在 1%~2%,已经具有相当高的计算精度,同时也证明了本文所提方法的可行性。反过来也说明边坡稳定分析的极限平衡条分法中严格条分法的合理

性,二者互相印证。不同 D-P 准则之间的安全系数转换,可在 Microsoft Excel 软件中编制一段程序来轻松实现。

参考文献(References):

- [1] Griffiths D V, Lane P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. Geotechnique, 1999, 49(3): 387 - 403.
- [2] Dawson E M, Roth W H, Drescher A. Slope stability analysis by strength reduction[J]. Geotechnique, 1999, 49(6): 835 - 840.
- [3] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 343 - 346.(Zhao Shangyi, Zheng Yingren, Shi Weimin, et al. Slope safety factor analysis by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 343 - 346.(in Chinese))
- [4] 赵尚毅. 有限元强度折减法及其在土坡与岩坡中的应用[博士学位论文][D]. 重庆: 后勤工程学院, 2005.(Zhao Shangyi. Strength reduction finite element method and its application to soil and rock slope[Ph. D. Thesis][D]. Chongqing: Logistical Engineering University, 2005.(in Chinese))
- [5] 连镇营, 韩国城, 孔宪京. 强度折减有限元法研究开挖边坡的稳定[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 407 - 411.(Lian Zhenying, Han Guocheng, Kong Xianjing. Stability analysis of excavation by strength reduction FEM[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(4): 407 - 411.(in Chinese))
- [6] 赵尚毅, 郑颖人, 张玉芳. 有限元强度折减法中边坡失稳的判据探讨[J]. 岩土力学, 2005, 26(2): 332 - 336.(Zhao Shangyi, Zheng Yingren, Zhang Yufang. Study on the slope failure criterion in strength reduction finite element method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(2): 332 - 336.(in Chinese))
- [7] 郑宏, 李春光, 李焯芬, 等. 求解安全系数的有限元法[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 626 - 628.(Zheng Hong, Li Chunguang, Lee C F, et al. Finite element method for solving the factor of safety[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(5): 626 - 628.(in Chinese))
- [8] 宋二祥. 土工结构安全系数的有限元计算[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(2): 1 - 7.(Song Erxiang. Finite element analysis of safety factor for soil structures[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1997, 19(2): 1 - 7.(in Chinese))