

饱和嵌入维数确定最大 Lyapunov 指数的准则探讨

刘传孝

(山东农业大学 水利土木工程学院, 山东 泰安 271018)

摘要: 基于对大量砂岩试样裂隙系统的 MTS 全应力 - 应变时间序列的非线性动力学分析, 构造单位阶跃函数并引入到最大 Lyapunov 指数 LE_1 的判别模型中, 建立了确定 LE_1 的新准则。新准则充分考虑 LE_1 - m 关系中普遍存在的阶跃现象, 更符合确定 LE_1 的理论条件。新准则确定的 LE_1 与传统准则的解释结果比较, 偏离幅度巨大, 使得对系统稳定性程度的混沌判别结果迥异, 并且 LE_1 的正负号会因此改变, 导致对系统所处状态的定性评价不同。研究成果在一定程度上克服了传统准则确定 LE_1 鲁棒性较差的缺陷, 对混沌动力学基础研究具有一定的理论意义。

关键词: 岩石力学; 混沌; 裂隙系统; 相空间; 嵌入维数; Lyapunov 指数; 准则; 鲁棒性

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2005)22 - 4088 - 06

DISCUSSION ON A NEW RULE TO FIND LARGEST LYAPUNOV EXPONENT BY SATURATED EMBEDDED DIMENSION

LIU Chuan-xiao

(College of Water Conservancy and Civil Engineering, Shandong Agricultural University, Tai'an 271018, China)

Abstract: Based on the analysis of nonlinear dynamics to time series of strain and stress which are tested by MTS to lots of joint systems of sandstone specimens, a new rule to find the largest Lyapunov exponent is established by introducing LE_1 - m mathematical model and unit-step function. The new rule involves step feature that confirms theoretic condition of finding the largest Lyapunov exponent even more. Value of the largest Lyapunov exponent erected by the new rule is very different to that of the old rule, which will lead to a very different valuing conclusion of chaos to stability of a system. Meanwhile, different sign of the largest Lyapunov exponent will produce different conclusions of system state of which the characteristic has been changed completely. Conclusions of the paper improve robustness to erect LE_1 by old rule and are useful to basic theoretic research of chaotic dynamics.

Key words: rock mechanics; chaos; joint system; phase space; embedded dimension; Lyapunov exponent; rule; robustness

1 引言

Lyapunov 指数 LE_1 是系统宏观、整体特性的表示, 可以反映出系统所处的状态是混沌的、随机的、有序的还是临界的, 对评价一个系统的稳定性具有

实用价值。精度足够小时信息在足够长时间内的平均变化率为信息流率, 亦称之为熵, Kolmogorov 熵为所有正的 Lyapunov 指数之和, 是一个系统被确定处于混沌状态后混沌程度的量度, 该指标与系统稳定性程度的定量评价关系密切。Renyi 二阶熵的倒数为一个系统的平均可预报时间尺度, 是系统稳定

收稿日期: 2004 - 05 - 19; **修回日期:** 2004 - 11 - 08

作者简介: 刘传孝(1970 -), 男, 博士, 1992年毕业于山东科技大学采矿工程系, 现为副教授, 主要从事非线性动力学、计算力学、岩土力学与工程方面的教学与研究工作。E-mail: lchuanx@163.com.

性状态混沌预测的指标^[1~4]。因此,科学地确定 LE_1 具有重要的理论价值和实际意义。

传统的确定 LE_1 的准则,是确定饱和嵌入维数,其对应的趋于稳定时 LE_1 值即为最大 Lyapunov 指数^[5]。本文研究多种条件下的时间序列,以判断对应系统的混沌特征或评价其稳定性程度,发现了与传统的确定 LE_1 准则的不同之处,且差异颇大。基于对砂岩试样裂隙系统的 MTS 全应力-应变时间序列的分析,本文提出了确定 LE_1 的新准则或新方法,并进行了理论分析。研究成果从岩石力学试验角度,提出了克服 Wolf 方法确定 LE_1 鲁棒性较差问题的新思路,在一定程度上解决了长期困扰国内外科研工作者的难题,具有新颖性。

2 传统准则确定最大 Lyapunov 指数

采用 Wolf 方法从单变量时间序列中提取 LE_1 。如图 1 所示,对单变量时间序列进行 m 维相空间重构,选择令相空间坐标相关性最小的时滞 τ ,则在延拓的 m 维相空间内,初始参考相点为 $A(t_1): x(t_1), x(t_1 + \tau), \dots, x(t_1 + (m-1)\tau)$ 。

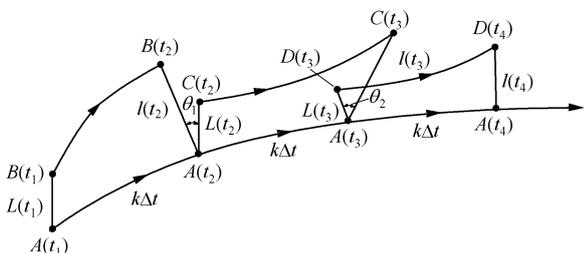


图 1 相轨线辐散图

Fig.1 Evolution of phase trajectory

依据欧几里德空间意义上的两点间的距离公式,可求得初始相点 $A(t_1)$ 的最近邻点 $B(t_1)$, 其间距为 $L(t_1) = \overline{A(t_1)B(t_1)}$ 。到时刻 $t_2 = t_1 + k\Delta t$ 时, $A(t_1)$ 和 $B(t_1)$ 分别演化到 $A(t_2)$ 和 $B(t_2)$, $A(t_2)$ 和 $B(t_2)$ 的间距为 $l(t_2) = \overline{A(t_2)B(t_2)}$ 。用 λ_1 表示 $k\Delta t$ 时间段内线段的指数增长率,则有

$$\lambda_1 = \frac{1}{k\Delta t} \ln \frac{l(t_2)}{L(t_1)} \quad (1)$$

同样依据欧几里德空间意义上的两点间的距离公式,在相点 $A(t_2)$ 附近找到满足 θ_1 很小的近邻点 $C(t_2)$, 其间距为 $L(t_2) = \overline{C(t_2)A(t_2)}$ 。到时刻 $t_3 = t_2 + k\Delta t$ 时, $A(t_2)$ 和 $C(t_2)$ 分别演化到 $A(t_3)$ 和 $C(t_3)$, $A(t_3)$

和 $C(t_3)$ 的间距为 $l(t_3) = \overline{C(t_3)A(t_3)}$ 。用 λ_2 表示 $(t_3 - t_2)$ 时间段内线段的指数增长率,则有

$$\lambda_2 = \frac{1}{k\Delta t} \ln \frac{l(t_3)}{L(t_2)} \quad (2)$$

依次类推,一直进行到点集 (x_i) 结束,这里, $i = 1, 2, \dots, n'$, 且有

$$n' = NN - m\tau - k\Delta t \quad (3)$$

式中: NN 为时序样本空间, m 为嵌入维数, τ 为时滞, $k\Delta t$ 为步长。

取一系列 n' 个指数增长率的平均值,作为该嵌入维数下 LE_1 的估计值,即

$$LE_1(m) = \frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{k\Delta t} \frac{l(t_i)}{L(t_i - 1)} \quad (4)$$

式中: N 为演化总步数,且有 $N = \frac{n'}{k\Delta t}$ 。

依次增加嵌入维数,循环上述过程,直至 $LE_1(m)$ 趋向平稳,此时的 m 被称作饱和嵌入维数 m_c , $LE_1(m)$ 即为最大 Lyapunov 指数 LE_1 ^[5]。

3 确定 LE_1 的新准则研究

3.1 砂岩试样 MTS 试验应力-应变时间序列

本次试验是在山东科技大学从美国 MTS 公司引进的 MTS815.03 电液伺服岩石试验系统上进行的。加工的标准砂岩试样为圆柱形,直径和高度分别为 50 和 100 mm,其平整度、垂直度等均能达到岩石试验规范标准。采用轴向应变作为主控变量即可以得出完整的 $\sigma-\varepsilon$ 曲线,但由于岩石破坏前后应变速度差别较大,故峰前加载速率采用 0.000 1 mm/s,峰后加载速率采用 0.000 2 mm/s^[6~8]。

试验所得砂岩的全应力-应变曲线共 23 条,图 2 所示为部分砂岩试样 MTS 全应力-应变曲线,进行非线性动力学分析的轴向应力时间序列均源于此。

3.2 砂岩裂隙系统 LE_1-m 关系

对不同条件的时间序列进行非线性动力学分析,每一时间序列均选用固定的 $\tau = 2, k\Delta t = 2 \times 2$, 探测吸引子的长度标度为 1、出现噪音的长度尺度为 1,而唯一改变的是嵌入维数 m ,进行相空间重构^[9]。适度扩大 m 的取值范围,最大计算到 $m = 20$,砂岩裂隙系统 LE_1-m 关系如图 3 所示。从图 3 可以看出,有些试块产生了混沌现象,有些试块未产生混沌现象。

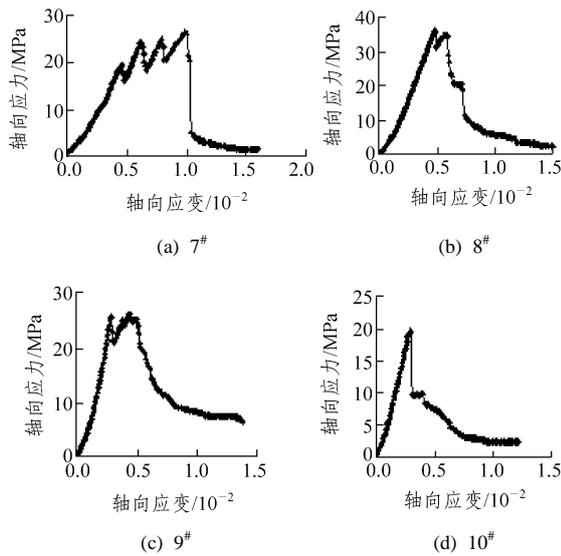


图2 部分砂岩试样 MTS 全应力 - 应变曲线

Fig.2 Curves of strain-stress of some sandstone specimens tested on MTS

3.3 传统准则确定最大 Lyapunov 指数的解释结论

由图 3 可以看出, LE_1 随 m 的增加, 由剧烈波动逐渐趋于稳定。按照传统准则的解释, 往往容易把第一次趋于稳定的 LE_1 和对应的 m 确定为最大 Lyapunov 指数和饱和嵌入维数^[10~12], 这是前述 Wolf 方法确定 LE_1 具有鲁棒性差的特点的体现, 本文将其定义为亚 LE_1 和亚 $m_c(m'_c)$, 提取指标值列于表 1。

3.4 确定最大 Lyapunov 指数的新准则及其解释结论

图 3 所含各图中存在的普遍现象是, 在 m 大于亚 $m_c(m'_c)$ 之后, 随 m 的继续增加, LE_1 由亚 LE_1 的稳定态产生了明显的阶跃, 而且无论正阶跃还是负阶跃, 阶跃幅度均较大, 阶跃后的曲线又趋于新的稳定态。本文把阶跃位置的 m 值定义为真正的饱和嵌入维数 m_c , 对应的 LE_1 确定为最大 Lyapunov 指数, 该方法为相对于传统准则的确定最大 Lyapunov 指数的新准则。探讨采用试验方法在一定程度上克服 Wolf 方法确定 LE_1 鲁棒性差的缺陷。按照新准则提取砂岩裂隙系统演化的混沌特征参数见表 1。

3.5 确定 LE_1 的新准则分析与研究

对表 1 砂岩裂隙系统演化的混沌特征参数的分析表明, 传统准则确定的亚 $m_c(m'_c)$ 平均值为 7, 新准则确定的 m_c 的平均值为 14, 由 m'_c 到 m_c 致使 LE_1 产生的平均阶跃高度为 1.577 4。其中 30% 的试样呈现 $LE_1 >$ 亚 LE_1 , 定义为正阶跃高度, 平均为

1.525 9; 70% 的试样呈现 $LE_1 <$ 亚 LE_1 , 定义为负阶跃高度, 平均为 1.599 9。可见正、负阶跃程度基本对称。

3.5.1 模型的建立

对所有砂岩试样裂隙系统的 m_c 之前(不含 m_c) 的所有 LE_1 值进行回归计算, 得到 LE_1-m 呈一元反比关系($m < m_c$), 这一点与传统结论相一致。考虑 $m = m_c$ 处的正、负阶跃, 构造单位阶跃函数 $h^0(m)$ ^[13] 为

$$h^0(m) = \begin{cases} 1 & (m \geq m_c) \\ 0 & (m < m_c) \end{cases} \quad (5)$$

综上所述, 所建立的 LE_1-m 关系模型如图 4 所示。

LE_1 与 m 的关系可表示为

$$LE_1 = \left(a_0 + \frac{a_1}{m} \right) \pm ch^0(m) \quad (6)$$

式中: a_0, a_1 均为待定系数, 由试验数据回归统计所得, 本文可分别取为 -0.017 9 和 0.217 5; c 为单向阶跃或正负阶跃高度相同时的 LE_1 阶跃高度, 本文可取 1.577 4。 LE_1 的正负阶跃高度差异较大时, 正阶跃时式(6)取正号, 本文砂岩裂隙系统正阶跃高度 c_{01} 可取 1.525 9; 负阶跃时式(6)取负号, 本文砂岩裂隙系统负阶跃高度 c_{0-1} 可取 1.599 9; m_c 对本文砂岩裂隙系统可取 14。

因此, 砂岩裂隙系统的 LE_1-m 关系模型为

$$LE_1 = \left(-0.017 9 + \frac{0.217 5}{m} \right) \pm 1.577 4h^0(m) \quad (7)$$

3.5.2 新准则作用效果分析

对砂岩裂隙系统而言, 新准则确定的 LE_1 与传统准则的解释结果平均相差 1.577 4 倍, 无论正向还是负向, 其偏离幅度是巨大的, 可能使得对系统稳定性程度的混沌判别产生大幅提高或降低。最为严重的是, LE_1 的正负号可能因此而改变, 从而导致对系统所处状态的评价出现质的不同。从 LE_1-m 关系研究出发, 与传统的确定 LE_1 的准则相比较, 充分考虑了阶跃的新准则更能准确体现确定该指标的理论条件, 即“依次增加嵌入维数, 循环上述过程, 直至 $LE_1(m)$ 趋向平稳, 此时的 m 被称作饱和嵌入维数 m_c , 此时的 $LE_1(m)$ 即为最大 Lyapunov 指数”, 因为大的阶跃高度的普遍存在恰恰说明 $LE_1(m)$ 在 m'_c 处远未趋于平稳。

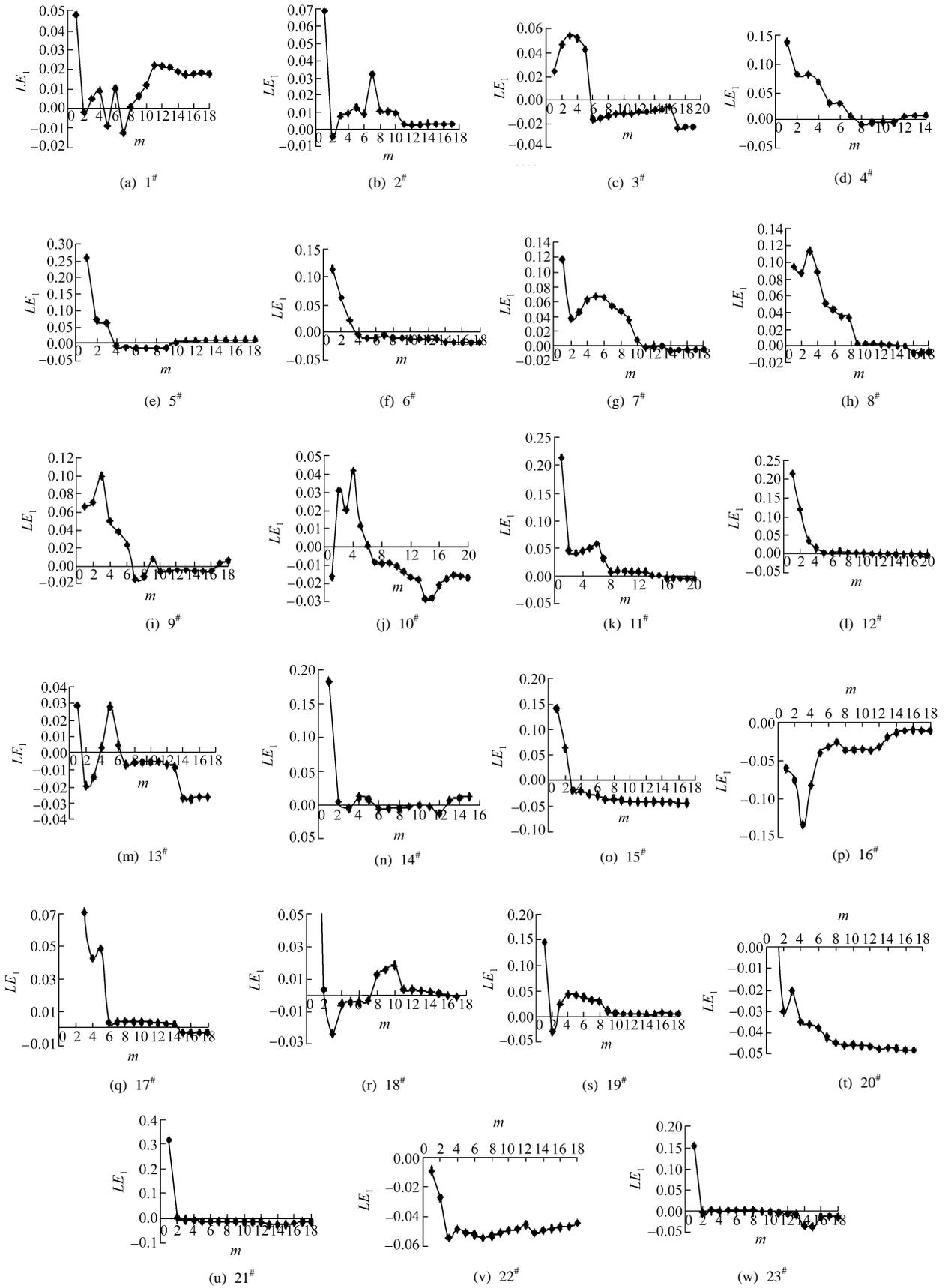


图3 砂岩裂隙系统的混沌特征

Fig.3 Chaotic features of sandstone joint system

表 1 砂岩裂隙系统强度随应变演化的混沌特征参数

Table 1 Chaotic features of sandstone joint system in different evolutionary stages of strength

砂岩试件编号	σ_c /MPa	$\bar{m}_c (m'_c)$	\bar{LE}_1	m_c	LE_1	$LE_1 > \bar{LE}_1$	$LE_1 < \bar{LE}_1$	$m_c - \bar{m}_c$	$ (LE_1 - \bar{LE}_1) / \bar{LE}_1 \%$
1#	45.494 470	11	0.022 153	15	0.017 450		✓	4	21.23
2#	69.683 880	8	0.011 097	11	0.003 179		✓	3	71.35
3#	87.525 470	6	-0.016 455	17	-0.023 235		✓	11	41.20
4#	49.273 060	8	-0.006 400	12	0.006 543	✓		4	202.23
5#	85.509 380	4	-0.005 421	10	0.006 162	✓		6	213.67
6#	41.081 490	5	-0.008 564	14	-0.016 195		✓	9	89.11
7#	26.338 890	11	-0.002 150	14	-0.006 288		✓	3	192.47
8#	36.181 980	9	0.002 935	16	-0.008 266		✓	7	381.64
9#	26.324 570	10	-0.006 027	17	0.003 319	✓		7	155.07
10#	19.797 880	7	-0.008 297	18	-0.015 373		✓	11	85.28
11#	167.290 400	8	0.008 959	16	-0.003 284		✓	8	136.66
12#	151.226 990	5	0.003 014	11	0.001 455		✓	6	51.73
13#	77.883 580	7	-0.006 863	14	-0.026 817		✓	7	290.75
14#	109.186 950	6	-0.005 074	13	0.007 564	✓		7	249.07
15#	34.940 040	7	-0.037 196	10	-0.042 956		✓	3	15.49
16#	73.210 430	8	-0.037 075	15	-0.011 247	✓		7	69.66
17#	82.403 690	6	0.003 475	15	-0.002 730		✓	9	178.56
18#	154.826 030	4	-0.005 933	11	0.004 290	✓		7	172.31
19#	83.293 236	4	0.043 233	11	0.006 262		✓	7	85.52
20#	35.593 857	9	-0.045 875	13	-0.047 821		✓	4	4.24
21#	76.888 756	3	-0.007 753	13	-0.026 041		✓	10	235.88
22#	79.504 326	7	-0.053 952	13	-0.050 640	✓		6	6.14
23#	105.359 030	3	0.002 220	16	-0.012 851		✓	13	678.87
		平均值 7		平均值 14		占 30%	占 70%	平均值 7	均阶跃高度(c_0)1.577 4: (-)1.599 9; (+)1.525 9

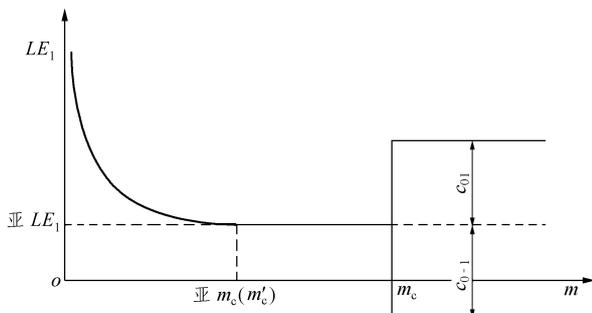


图 4 LE_1 - m 关系模型

Fig.4 Mathematical model of LE_1 - m

4 结 论

(1) 构造单位阶跃函数及其定义域条件，并引入到最大 Lyapunov 指数判别的数学模型中，具体给出了 LE_1 - m 关系式中各参数的实现渠道，建立了确定 LE_1 的新准则。

(2) 新准则充分考虑了 LE_1 - m 关系中阶跃的影响，更符合确定 LE_1 的理论条件。

(3) 新准则确定的 LE_1 与传统准则的解释结果

相比较, 无论正向还是负向, 其偏离幅度是巨大的, 可能使得对系统稳定性程度的混沌判别产生大幅提高或降低, 且 LE_1 的正负号可能因此而改变, 导致对系统所处状态的评价出现质的不同。

(4) 新准则确定的砂岩试样裂隙系统的 LE_1 与传统准则的解释结果平均相差 1.577 4 倍。30% 的试样为正阶跃, 阶跃高度平均为 1.525 9; 70% 的试样为负阶跃, 阶跃高度平均为 1.599 9。正、负阶跃程度基本对称。

参考文献(References):

- [1] 黄润生. 混沌及其应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2000.(Huang Runsheng. Chaos and Chaotic Application[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2000.(in Chinese))
- [2] 盛昭瀚, 马军海. 非线性动力系统分析引论[M]. 北京: 科学出版社, 2001.(Sheng Zhaohan, Ma Junhai. Introduction to Nonlinear Dynamical System[M]. Beijing: Science Press, 2001.(in Chinese))
- [3] 周凌云, 王瑞丽, 吴光敏, 等. 非线性物理理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2000.(Zhou Lingyun, Wang Ruili, Wu Guangmin, et al. Theory and Application of Nonlinear Physics[M]. Beijing: Science Press, 2000.(in Chinese))
- [4] 陆同兴. 非线性物理概论[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2002.(Lu Tongxing. Introduction to Nonlinear Physics[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 2002.(in Chinese))
- [5] 林振山. 非线性动力学与大气科学[M]. 南京: 南京大学出版社, 1993.(Lin Zhenshan. Nonlinear Dynamics and Atmospheric Science[M]. Nanjing: Nanjing University Press, 1993.(in Chinese))
- [6] Blair S C, Cook N G. Analysis of compressive fracture in rock using statistical techniques(part I): a non-linear rule based model[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 1998, 35(7): 837 - 848.
- [7] Blair S C, Cook N G. Analysis of compressive fracture in rock using statistical techniques(part II): effect of micro scale heterogeneity on macroscopic deformation[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Science, 1998, 35(7): 849 - 861.
- [8] 夏才初, 孙宗硕. 工程岩体节理力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 2002.(Xia Caichu, Sun Zongqi. Joints Mechanics of Engineering Rock Mass[M]. Shanghai: Tongji University Press, 2002.(in Chinese))
- [9] 马军海, 陈予恕. 混沌时序相空间重构及其应用研究[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(11): 1 237 - 1 245.(Ma Junhai, Chen Yushu. An analysis and application to state space reconstruction about chaotic time series[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2000, 21(11): 1 237 - 1 245.(in Chinese))
- [10] Rosenstein M T, Collins J J, De Luca C J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets[J]. Physica D, 1993, 24(2): 117 - 134.
- [11] 康 炜, 史朋亮, 胡 岗. 接近零的最大 Lyapunov 指数的计算[J]. 北京师范大学学报(自然科学版), 2000, 36(6): 762 - 764.(Kang Wei, Shi Pengliang, Hu Gang. Method for calculating the first Lyapunov exponent which is close to zero[J]. Journal of Beijing Normal University (Natural Science), 2000, 36(6): 762 - 764.(in Chinese))
- [12] Wolf A J, Swift B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica D, 1985, 16(3): 285 - 317.
- [13] 秦四清, 张倬元, 王士天, 等. 非线性工程地质学导引[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.(Qin Siqing, Zhang Zhuoyuan, Wang Shitian, et al. An Introduction to Nonlinear Engineering Geology[M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 1993.(in Chinese))