

# 关于“基于突变理论的深井巷道 临界深度”的讨论

潘岳, 张勇

(青岛理工大学 土木工程学院, 山东 青岛 266520)

## DISCUSSION ON “A STUDY ON THE CRITICAL DEPTH OF DEEP ENTRY WITH CATASTROPHE THEORY”

PAN Yue, ZHANG Yong

(College of Civil Engineering, Qingdao Technological University, Qingdao 266520, China)

中图分类号: TD 322

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2005)16-2998-03

### 1 引言

贵刊 2004 年第 23 卷第 24 期刊登了题为“基于突变理论的深井巷道临界深度”的文章(以下简称为文[1]或原文)。由于研究方向相同,故仔细地阅读了文[1],提出一些问题与作者商榷。为便于比较,文中公式编号采用原文编号,而本文提出的公式则采用式(A), (B), (C), (D)等表示。

### 2 讨论

(1) 文[1]给出关系式:

$$\sigma_c^p = \sigma_c - M_o(\varepsilon_1 - \varepsilon_c) \quad (1)$$

式中:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_\theta$  为切向应变, 并称其中  $\sigma_c^p$  为软化区强度。这样式(1)中  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_c$  时, 软化区强度  $\sigma_c^p = \sigma_c$ 。巷道围岩任一单元体受有三向应变  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_z (=0)$ , 不能只考虑切向应变  $\varepsilon_\theta$ , 而不考虑  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_z (=0)$  及三者间的耦合作用效应, 仅像单轴应力状态那样来处理问题。按照式(1)的逻辑, 只考虑切向应变  $\varepsilon_\theta$  的作用, 文[1]利用式(5)中  $r = R$  ( $R$  为软化区半径)时  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_c$  的条件, 得到积分常数:

$$A = \varepsilon_c R^2 = \frac{\sigma_c}{E} R^2 \quad (9)$$

文[1]又在式(18), (19)中分别给出围岩软化区应变强度  $\varepsilon_i$  和应力强度  $\sigma_i$  表达式:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{A}{r^2} \quad (18)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_\theta^p - \sigma_z^p)^2 + (\sigma_z^p - \sigma_r^p)^2 + (\sigma_r^p - \sigma_\theta^p)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta^p - \sigma_r^p) \quad (19)$$

研究者通常是在可以实际测定的单轴应力  $\sigma$  与应变  $\varepsilon$  关系或在其简化模型基础上对问题展开讨论的。遇到复杂应力状态, 可据 Нлющин 提出并经试验验证的应力强度  $\sigma_i$  与应变强度  $\varepsilon_i$  之间单一曲线的物理关系<sup>[2]</sup>, 利用将单轴  $\sigma - \varepsilon$  关系推广得到的应力强度  $\sigma_i$  与应变强度  $\varepsilon_i$  的关系来对问题进行阐述。

例如通过应变强度  $\varepsilon_i$  的途径, 利用式(18)中  $r = R$  时  $\varepsilon_i = \varepsilon_c$  (相应应力强度  $\sigma_i = \sigma_c$ ) 的条件, 得到积分常数:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2 \varepsilon_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma_c}{E} R^2 \quad (A)$$

由于应变强度  $\varepsilon_i$  同时考虑应变  $\varepsilon_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_z (=0)$  的作用效应, 因此式(A)中所确定的积分常数  $A = \sqrt{3}\sigma_c R^2 / (2E)$  是正确的。软化区强度  $\sigma_c^p$  的提法和通过式(1)确定  $A = \sigma_c R^2 / E$  概念不清, 并将  $A = \sigma_c R^2 / E$  与导得式(A)中  $A = \sqrt{3}\sigma_c R^2 / (2E)$  的式(18)中  $\varepsilon_i = 2A / (\sqrt{3}r^2)$  两个相矛盾结果, 在后文式(21)中同时使用。

(2) 文[1]用下式作为巷道围岩单元体软化区能量表达式:

$$W = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i \quad (20)$$

式(20)中积分是从 0 开始的, 单元体经历过弹性阶段(0  $\varepsilon_i$   $\varepsilon_c$ )后才能进入软化阶段( $\varepsilon_i$   $\varepsilon_c$ )。如图 1 所示<sup>[1]</sup>, 岩体弹性与软化阶段的本构关系不同, 因此单元体软化区能量表达式正确写法应当为

$$W = \int_0^{\varepsilon_c} \sigma_i d\varepsilon_i + \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i \quad (B)$$

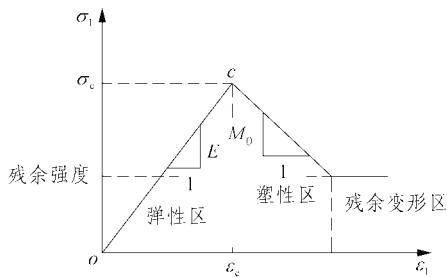


图 1 线性弱化理想残余塑性模型<sup>[1]</sup>  
Fig.1 Ideal residual and plastic model<sup>[1]</sup>

$\sigma_i(\varepsilon_i)$  是  $\varepsilon_i$  的函数, 文[1]对式(20)做积分前没有明确过  $\sigma_i$  与  $\varepsilon_i$  间的函数关系。现假设文[1]中图 2 为单轴本构模型。由式(2)可知, 巷道围岩中应变分量保持固定比例,  $\varepsilon_z : \varepsilon_\theta : \varepsilon_r = 0 : 1 : -1$ , 属简单加载, 按 Плющин 单一曲线的物理关系<sup>[2]</sup>, 可将同属简单加载的岩石单轴本构关系式(1)推广, 而得到巷道围岩极限状态下应力强度  $\sigma_i$  与应变强度  $\varepsilon_i$  之间的关系式, 则弹性阶段和软化阶段的  $\sigma_i - \varepsilon_i$  关系分别为正斜率为  $E$  和负斜率为  $M_0$  的双线性关系。也就是说, 文[1]中式(19), (20)的  $\sigma_i = \sqrt{3}(\sigma_\theta - \sigma_r) / 2$  在  $[0, \varepsilon_c), [\varepsilon_c, \varepsilon_i)$  间是个变量。但在文[1]得到式(21)积分值的计算中将应力强度  $\sigma_i = \sqrt{3}(\sigma_\theta - \sigma_r) / 2$  作为常量对待。参见以下运算(文[1]运算中  $\varepsilon_i = 2A / (\sqrt{3}r^2)$ ,  $A = \sigma_c R^2 / E$  取自相互矛盾的结果), 由式(20)得

$$W = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i = \int_0^{\varepsilon_i} \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) \int_0^{\varepsilon_i} d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) \varepsilon_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{A}{r^2} = (\sigma_\theta - \sigma_r) \frac{\sigma_c R^2}{E r^2} \quad (21)$$

式中:  $\sigma_i, A$  取自文[1]中的式(18), (19)。

(3) 文[1]软化区能量计算结果:

$$V^p = k_1 R^{N-1} + k_2 R^{-2} - I \quad (23)$$

由文[1]式(12)可知:

$$R = r_p + \frac{1-\lambda'}{2} f(\theta) \quad (12)$$

软化区半径  $R(\theta)$  是极角  $\theta$  的函数。这样, 由式(23)表示的软化区能量  $V^p$  也成了  $\theta$  的函数, 极角  $\theta$  的变化范围为  $0 \sim 2\pi$ , 这样同一块面积、应力-应变状态相同的软化区, 有了无数个不同的能量值。

同理, 文[1]软化区能量的计算式:

$$V^p = \int_{R_0}^R \left( \int_0^{2\pi} W d\theta \right) r dr \quad (22)$$

二重积分中外层积分的上限, 即式(12)中的  $R = r_p + (1-\lambda')f(\theta)/2$  是  $\theta$  的函数。进行积分必须将积分顺序调换过来, 内层积分上限为变量  $R(\theta)$ , 外层上、下限为常量, 即

$$V^p = \int_0^{2\pi} \left( \int_{R_0}^{R(\theta)} W r dr \right) d\theta \quad (C)$$

式(22)的被积函数  $W$  中包含  $R$  的若干个不同幂次的项, 文[1]应当写出式(12)中的  $R = r_p + (1-\lambda')f(\theta)/2$  中  $f(\theta)$  的显式,  $f(\theta)$  是个重要关系式, 不能仅仅停留在  $f(\theta)$  可由式(13)~(17)解出的文字叙述层次上。

(4) 弹性理论中著名的 Kirsch 解或 Timoshenko 解给出侧压系数  $\lambda \neq 1$  时, 围岩弹性区有 2 个位移分量, 即径向位移  $u(r, \theta)$  和切向位移  $v(r, \theta)$ :

$$u(r, \theta) = \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2}{r} \left\{ \frac{1}{2} (1+\lambda) p_0 + \left[ 4(1-\mu) - \frac{a}{r^2} \right] \frac{1-\lambda}{2} p_0 \cos 2\theta \right\} \quad (D)$$

$$v(r, \theta) = \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2}{r} \left[ 2(1-\mu) + \frac{a^2}{r^2} \right] \frac{1-\lambda}{2} p_0 \sin 2\theta \quad (E)$$

俄国学者 Руппенейт 对 Kirsch 解前后作了 2 次近似, 给出理想弹塑性条件下巷道围岩软化区边界形状表达式和软化区内径向位移  $u(r, \theta)$  的近似表达式。但是在围岩弹性区中半径  $r > R$  ( $R$  为软化区半径)的圆上, 类似式(E)的切向位移  $v(r, \theta)$  仍然存

在。文[2]在式(26)外力功  $Q$  的计算式中仅考虑形式为  $u = \frac{B}{r}$  的径向位移，将其写为

$$Q = \int_0^{2\pi} \sigma_r r \frac{B}{r} d\theta = \int_0^{2\pi} \sigma_r u r dr \quad (26)$$

由于文[1]的图 2 中侧压系数  $\lambda \neq 1$ ，弹性区中半径  $r > R$  的圆表面切应力  $\tau_{\theta r}$  (见文[1]式(11))和切向位移  $v(r, \theta)$  均存在且不为 0。因此外力功  $Q$  的计算式显然应当为

$$Q = \int_0^{2\pi} [\sigma_r u(r, \theta) + \tau_{\theta r} v(r, \theta)] r d\theta \quad (F)$$

但是文[1]式(26)中没有  $\tau_{\theta r} v(\theta, r)$  项。

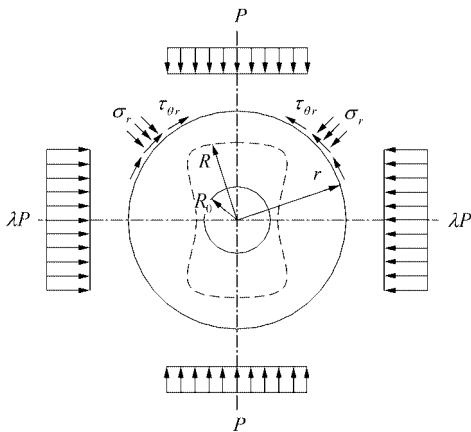


图 2 巷道受力和分区<sup>[1]</sup>

Fig.2 Stress around an entry and division of stress zone<sup>[1]</sup>

(5) 突变理论是研究突发性跳跃现象的，例如岩爆、矿震、地震等岩体动力失稳问题。埋深较浅的巷道挖成后，围岩向空区有较小收敛和位移便趋于稳定；当巷道埋深较大而达到某深度(称之为临界深度)，巷道挖成后围岩向空区位移显著，有的一昼夜达 4, 5 cm，不能自稳。但这种位移相对于能够自稳的围岩位移来说仍然是准静态的，而与岩爆、矿震、地震、煤岩突出等突发性有大量弹性能于瞬间释放、激发地震波动力效应的跳跃性位移本质上是不同的。也即巷道临界埋深问题并不适用于用突变理论描述。运用突变理论研究问题时通常应绘出平衡曲面，在平衡曲面上标出临界埋深应当对应的位置，至少是定性位置，在文[1]中未能见到。

(6) 采用突变理论研究失稳问题，在得到用状态变量表示的系统总势能函数或平衡方程的 Taylor 展开式之后，须根据确定性原则<sup>[3]</sup>截断 Taylor 级数(所谓确定性原则即是 Taylor 级数中第 1 个系数不为零的幂次项的拓扑性质，已规定失稳原型本质上应当对应突变模式，详见文[3])。舍去高次项后得到的多项式才是失稳原型突变模型的总势能函数或平衡

方程。展开后 Taylor 级数不能随意截断或多保留。文[1]未作阐明，便在式(29)中保留到  $(R - R_c)^3$  项。 $R_c$  的具体位置也未曾明确，只是笼统地说  $R_c < R$ ，在第 3.3 节中再行选定。需要指出， $R_c$  的位置不是由主观选定的， $R_c$  必须对应岩体单轴压缩或本构曲线或其推广的  $\sigma_i - \varepsilon_i$  曲线软化段上的特征点。对于符合岩体实际的本构模型，该特征点便是其峰后非线性软化曲线上的拐点。峰后按线性软化的斜直线上，没有这样的特征点。

(7) 导致软化岩体动力失稳的原因是：与软化岩体以串联形式赋存和受力的处于完好(或相对完好)部分的弹性岩体，在软化岩体承载力下降时，以弹性方式卸载而释放弹性能，当释放的弹性能超过软化岩体以准静态方式形变耗散的能量时，所超过的弹性能量部分，于瞬间释放而造成岩体动力失稳。

巷道围岩软化区向空区收敛时，围岩弹性区也发生收敛位移，同时环向受到压缩，吸收能量。巷道围岩弹性区是与软化区一起构成承受地应力的复合承载环的组成部分(这是巷道围岩分析中熟知的事实)，而不是造成巷道软化区动力失稳的弹性能释放主体，其作用与对岩样作单轴压缩使岩样脆坏爆裂的压力机的作用是完全不同，不至因为采用突变理论研究巷道失稳问题，巷道围岩弹性区会改变其工作特点，而成为围岩软化区破坏的能量供给源。

对于侧压系数  $\lambda = 1$  受均匀围压的特殊情况，围岩收敛时，巷道围岩弹性区中任一部分吸收能量的定量分析，请参见文[4]。

参考文献(References)：

[1] 勾攀峰,汪成兵,韦四江. 基于突变理论的深井巷道临界深度[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(24): 4 137-4 141. (Gou Panfeng, Wang Chengbing, Wei Sijiang. A study on the critical depth of deep entry with catastrophe theory[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(24): 4 137-4 141. (in Chinese))

[2] 贾乃文. 粘塑性力学及工程应用[M]. 北京:地震出版社, 2000. 51-52. (Jia Naiwen. Viscoplasticity and Its Application to Engineering[M]. Beijing: Earthquake Press, 2000. 51-52. (in Chinese))

[3] 凌复华. 突变理论——历史、现状和展望[J]. 力学进展, 1984, 14(4): 289-403. (Ling Fuhua. History, present and advances of the catastrophe theory[J]. Advances in Mechanics, 1984, 14(4): 289-403. (in Chinese))

[4] 潘岳,王志强. 圆形硐室岩爆的折迭突变模型[J]. 岩土力学, 2005, 26(2): 175-181. (Pan Yue, Wang Zhiqiang. Fold catastrophe model of circular tunnel rockburst[J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(2): 175-181. (in Chinese))