

# 基岩地震动随机特性有限元反分析算法

严松宏<sup>1</sup>, 高峰<sup>1</sup>, 高波<sup>2</sup>

(1. 兰州交通大学 土木工程学院, 甘肃 兰州 730070; 2. 西南交通大学 土木工程学院, 四川 成都 610031)

**摘要:** 从有限元动力分析的基本原理出发, 将地面地震运动看作一个随机过程, 利用脉冲响应函数、随机振动理论和傅立叶变换原理, 推导了由地面地震运动统计特性反算基岩地震运动统计特性的有限元反分析计算公式, 提出了一种用于由地面地震动统计特性计算基岩地震动统计随机特性的二维有限元反分析法。该方法可由已知的地面地震动模型方便地计算出基岩地震动统计参数。算例表明: 地层改变了地震动的频率组成, 同时对基岩地震动有一定的放大作用, 在地下结构抗震计算时, 应以基岩地震运动作为地震动输入。

**关键词:** 岩石力学; 基岩; 地震动特性; 随机振动; 有限元反分析; 傅立叶变换

**中图分类号:** TU 457; TU 311.3

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-6915(2005)15-2629-05

## FINITE ELEMENT BACK ANALYSIS METHOD FOR EVALUATING STOCHASTIC SEISMIC CHARACTERISTICS OF BEDROCK

YAN Song-hong<sup>1</sup>, GAO Feng<sup>1</sup>, GAO Bo<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China;

2. School of Civil Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract:** With considering the earthquake motion as a stochastic process, based on the basic principles of dynamical analysis by using finite element method, formulas for the back-evaluating stochastic seismic characteristics of the bedrock from the stochastic seismic characteristics of the ground surface are derived by using the impulse-response function, the theories of random vibration, and the principles of Fourier transform. A method of finite element back analysis for this purpose is put forward. By using this method, the stochastic seismic characteristics of the bedrock could be calculated from the stochastic seismic characteristics of the ground surface. A numerical example shows that the ground changes the frequency composition of earthquake motion and has an obviously amplifying effect on seismic motion of the bedrock. The seismic motion of the bedrock should be input to earthquake motion during the analysis of earthquake resistance of underground structures.

**Key words:** rock mechanics; bedrock; seismic characteristics; random vibration; finite element back analysis; Fourier transform

## 1 引言

世界各国地震灾害资料表明, 地震不仅破坏地面建筑物, 其引起地下结构的地震破坏也不断出

现, 因此, 地下结构抗震问题越来越受到人们的重视。

强震观测资料通常为地震地面运动加速度、速度以及位移等观测资料, 因此, 目前地下结构的抗震计算主要参照地面建筑物的抗震分析方法, 多以

**收稿日期:** 2004-04-20; **修回日期:** 2004-07-07

**基金项目:** 兰州交通大学“青蓝”人才工程基金资助计划资助项目

**作者简介:** 严松宏(1966-), 男, 博士, 1989年毕业于西南交通大学工程力学专业, 现任教授, 主要从事岩土与地下结构数值分析、动力可靠性等方面的教学与研究工作。E-mail: yansonghong@163.com。

地面地震运动加速度作为作用于基岩顶面的地震运动加速度，并建立其动力方程，对地层-结构体系进行动力分析<sup>[1]</sup>。目前，常用的地震随机模型都是地面地震运动的随机模型。在已有的少量地下结构随机地震反应分析中也是以地面地震运动统计特性作为输入的基岩地震运动统计特性，并根据随机振动理论来求地下结构的随机地震响应的统计特性。然而由于基岩地震运动经过了地层的作用，且地震地面运动特性与基岩地震运动特性并非吻合，从而导致计算结果不能确切反应实际情况。

为了得到更加合理的地下结构随机地震反应分析结果，有必要研究基岩地震运动的统计特性，即由已知的地面地震运动统计特性反算基岩地震运动统计特性。在数值分析中，由反应求输入的分析方法称为反分析法。

本文从有限元动力分析的基本原理出发，利用加速度脉冲响应函数和傅立叶变换原理，探讨了由地面地震运动特性反算基岩地震运动特性的反分析法，提出了用于由地面地震运动特性计算基岩地震运动特性的二维有限元反分析法，为建立地下结构随机地震反应计算体系提供一定的理论参考。该方法旨在根据已知的地面地震随机模型(功率谱密度函数)，通过有限元反分析计算，求得基岩地震运动特性的统计参数(功率谱密度函数)，在地下结构随机地震响应分析中，将其作为输入的地震动参数，从而获得更为合理的地下结构地震响应统计特性参数。

## 2 粘-弹性人工边界

在地下结构动力响应分析中，边界条件的选择对分析结果有着显著的影响，地震波的传播通常与无限域的辐射阻尼有关，而且无限域的地基动力刚度是激振频率的复杂函数。在考虑地下结构动力问题时，应注意到天然地基是无限延伸的，地基能量将向无穷远处逸散。在数值计算中如何正确有效地模拟无限地基的能量辐射作用，即在数值分析中如何模拟分析体系的边界条件，是决定能否更精确的模拟地下结构地震反应的关键技术之一。目前，解决这一问题的方法主要有无穷元法、边界元法、远置人工边界条件、叠加边界条件、粘性边界、Clayton-Engquist 人工边界、Higdon 人工边界、一致边界条件、透射边界和粘-弹性边界等<sup>[2]</sup>。本文采用粘-弹性边界<sup>[3]</sup>来模拟波向无穷远辐射的问题。

对于一维波动情形，考虑一个具有均匀横截面的半无限长杆，设杆轴方向为  $x$  轴，杆上点的轴向位移记为  $u(x)$ ，杆的弹性模量为  $E$ ，杆的质量密度为  $\rho$ ，时间为  $t$ ，若在杆轴上一点  $x_b$  处将杆截断，则该点处的应力和该点的速度有如下的关系<sup>[4]</sup>：

$$\sigma(x_b, t) = -\frac{E}{c_b} \frac{\partial u(x_b, t)}{\partial t} = -\rho c_b \frac{\partial u(x_b, t)}{\partial t} \quad (1)$$

式中： $\sigma(x_b, t)$  为截断点  $x_b$  处在时刻  $t$  时的正应力， $c_b = \sqrt{E/\rho}$  为波沿轴向传播的速度。

由式(1)可以看出，在一维波动情形下，在人工边界上施加相应的粘性(阻尼系数  $c = \rho c_b$ ) 边界条件后，就可以消除由于截断而在人工边界上产生的反射波，从而精确地模拟波由近场向远场的传播。

对于平面柱面波，任一半径  $r_b$  处的应力同该处的速度和位移的关系可表示如下<sup>[4]</sup>：

$$\tau(r_b, t) = -G \left[ \frac{1}{2r_b} v(r_b, t) + \frac{1}{c_s} \frac{\partial v(r_b, t)}{\partial t} \right] = -\frac{G}{2r_b} v(r_b, t) - \rho c_s \frac{\partial v(r_b, t)}{\partial t} \quad (2)$$

式中： $\tau(r_b, t)$  为介质中的剪应力， $v(r_b, t)$  为介质的切向位移， $G$  为连续介质的剪切模量， $\rho$  为介质的质量密度， $c_s = \sqrt{G/\rho}$  为剪切波在连续介质中的传播速度。

方程(2)等价于一阻尼系数为  $\rho c_s$  的阻尼器并联上一个刚度系数为  $G/2r_b$  的线性弹簧，这说明如果在半径  $r_b$  处(边界处)截断介质，同时施加相应的边界元件后，即可以消除剪切波在边界  $r_b$  处产生的反射波。

在岩土工程及地下工程动力分析中，与固定边界相比，采用基于上述原理的粘-弹性人工边界可以消除剪切波在边界处产生的反射波的影响，提高分析结果的合理性。

## 3 基岩地震加速度反分析计算

本文假定基岩面上各点的地震加速度是相同的，采用有限元动力分析方法反算基岩地震运动加速度。包含地面加速度观测点  $P$  在内的地层体系在基岩顶面加速度为  $\ddot{u}_g(t)$  的地震运动作用下，其动力平衡方程<sup>[1]</sup>为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{I\}\ddot{u}_g(t) \quad (3)$$

式中： $\{u\}$ ， $\{\dot{u}\}$ ， $\{\ddot{u}\}$  分别为体系各质点沿所论方向相对于基岩顶面的位移、速度、加速度向量； $\ddot{u}_g(t)$  为基岩顶面的地震加速度； $[M]$  为体系总质量矩阵； $[K]$  为体系总刚度矩阵； $[C]$  为体系总阻尼矩阵； $\{I\}$  为激振方向指示矢量，由 0 和 1 组成，与所论位移方向(激振方向)对应位置上的元素为 1，其他元素为 0。

由于方程(式(3))中的基岩加速度输入  $\ddot{u}_g(t)$  为待求的未知量，通过正分析法不能求得其解。作者曾就此运用振型迭加法探讨了求基岩加速度  $\ddot{u}_g(t)$  的反分析法，得到了  $\ddot{u}_g(t)$  的有限元数值解。然而振型迭加法只取有限个低频振型进行计算而略去了高频振型的作用，从而有可能导致一定的计算误差。本文从地下结构动力平衡方程出发，利用单位加速度脉冲函数，探讨了由地面地震运动特性求基岩地震运动特性的计算方法。

为了直接通过动力有限元分析获得地层体系的脉冲响应函数，将动力平衡方程(式(3))中右端的输入加速度  $\ddot{u}_g(t)$  改为单位脉冲函数  $\delta(t)$ ，这样，式(3)可变<sup>[5, 6]</sup>为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{I\}\delta(t) \quad (4)$$

式中： $\delta(t)$  为单位基岩加速度脉冲函数，且有

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases} \text{ 及 } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

求解式(4)即可获得地层体系各点的反应值(脉冲响应函数)。设对应于地面加速度观测点  $P$  的加速度反应值为  $h_{i_p}(t)$  (脉冲响应函数)，则在输入基岩加速度  $\ddot{u}_g(t)$  的作用下， $P$  点绝对加速度  $\ddot{u}_p(t)$  可通过下式表示<sup>[6]</sup>：

$$\ddot{u}_p(t) = \ddot{u}_g(t) + \int_0^t h_{i_p}(t - \tau) \ddot{u}_g(\tau) d\tau \quad (5)$$

对式(5)作傅立叶变换，基岩地震加速度频域值  $\ddot{u}_g(\omega)$  表示<sup>[7]</sup>为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_g(\omega) &= K(\omega) \ddot{u}_p(\omega) \\ K(\omega) &= \frac{1}{1 + H_{i_p}(\omega)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中： $H_{i_p}(\omega)$  为地面地震加速度观测点  $P$  的频域响应函数，由其脉冲响应函数  $h_{i_p}(t)$  通过傅立叶变换得到； $\ddot{u}_p(\omega)$  为地面地震加速度观测点  $P$  的绝对加速度的频域值，由其时域内的加速度  $\ddot{u}_p(t)$  通过傅立叶变换得到。

时域内的基岩加速度  $\ddot{u}_g(t)$  可由式(6)通过傅立叶逆变换得到<sup>[7]</sup>。

由上述分析过程可知，通过求解动力平衡方程(式(4))可得地面加速度观测点加速度脉冲响应函数，通过傅立叶变换获得其频域响应函数，在频域内建立基岩地震加速度与地面地震观测点地震加速度的关系，从而在频域内由地面地震观测点地震加速度频域反推出基岩地震运动加速度，再通过傅立叶逆变换计算得到基岩地震运动加速度的时域值。这就是由地面地震运动加速度反算基岩地震运动加速度的基本原理及主要分析步骤。

## 4 基岩地震动统计特性

结构随机振动分析，是由体系输入的统计特性来计算体系输出的统计特性，研究的基本问题都是由输入的自相关函数或功率谱密度函数来确定体系输出的自相关函数或功率谱密度函数，从而确定体系响应的方差和均方差。因此，在地下结构随机地震反应分析时，首先需要确定基岩地震运动的统计特性。

通过前述分析，建立了基岩地震加速度与地面地震加速度的关系表达式。下面来讨论地震地面运动为平稳随机过程时的基岩地震运动加速度的几个数字特征。

### 4.1 数学期望

基岩地震运动加速度的数学期望为<sup>[8]</sup>

$$E_{\ddot{u}_g} = E[\ddot{u}_g(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}_p(t - \tau) \kappa(\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E[\ddot{u}_p(t - \tau) \kappa(\tau)] d\tau \quad (7)$$

式中： $\kappa(\tau)$  为与地层条件有关的函数，由  $K(\omega)$  通过傅立叶逆变换得到，在地层参数确定的情况下， $\kappa(\tau)$  为确定函数。

当考虑地震地面加速度  $\ddot{u}_p(t)$  为中心化的平稳随机过程时，有  $E_{\ddot{u}_g} = 0$ 。

### 4.2 自相关函数与功率谱密度函数

对于平稳随机过程，基岩地震运动加速度的自相关函数  $R_{\ddot{u}_g}(\tau)$ <sup>[8]</sup>为

$$R_{\ddot{u}_g}(\tau) = E[\ddot{u}_g(t) \ddot{u}_g(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(\zeta) \kappa(\eta) R_{\ddot{u}_p}(\tau + \zeta - \eta) d\zeta d\eta \quad (8)$$

式中： $R_{\ddot{u}_p}(\tau + \zeta - \eta)$  为地面地震运动加速度的自相关函数。

根据随机振动理论，地震加速度的自相关函数

与其自功率谱密度函数是傅立叶变换对<sup>[9, 10]</sup>，由式(8)通过积分变换可方便地获得基岩地震运动加速度谱密度函数  $S_{\ddot{u}_g}(\omega)$  与基岩地震运动加速度谱密度函数  $S_{\ddot{u}_p}(\omega)$  的关系表达式为

$$S_{\ddot{u}_g}(\omega) = |K(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_p}(\omega) \quad (9)$$

### 4.3 方差和均方差

对于中心化的平稳随机过程，基岩地震运动加速度的方差  $D_{\ddot{u}_g}$  和均方差  $\sigma_{\ddot{u}_g}$  由下式计算<sup>[8, 9]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} D_{\ddot{u}_g} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_p}(\omega) d\omega \\ \sigma_{\ddot{u}_g} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 S_{\ddot{u}_p}(\omega) d\omega} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由此可以归纳出基岩地震动特性有限元反分析的主要计算过程：(1) 根据有限元动力分析式(式(4))计算出地面加速度观测点的脉冲响应函数  $h_{\ddot{u}_p}(t)$ ，通过傅立叶变换，可得到其频域响应函数  $H_{\ddot{u}_p}(\omega)$ ，从而计算出由地面地震加速度反算基岩地震加速度的传递系数  $K(\omega)$ ；(2) 由已知的地面地震动功率谱密度函数  $S_{\ddot{u}_p}(\omega)$ ，根据式(9)计算出基岩地震动功率谱密度函数  $S_{\ddot{u}_g}(\omega)$ ；(3) 根据式(10)可计算出基岩地震动的方差及均方差。

## 5 计算实例

某地层断面，其计算模型所取尺寸如下：左、右边界距地面加速度记录观测点位置  $P$  水平距离均为 50 m，底边界(即为基岩顶面)距地面观测点垂直距离为 66.75 m。分析中采用 8 节点四边形等参单元，边界条件采用粘-弹性人工边界。计算中采用的主要地层参数如下：容重  $\gamma = 19.4 \text{ kN/m}^3$ 、泊松比  $\mu = 0.3$ 、弹性模量  $E = 70 \text{ MPa}$ ，与基频对应的振型阻尼比取为  $\zeta_0 = 0.05$ 。分析中只考虑水平向地震运动，并按平面应变问题计算。

地面地震动过程采用目前广为使用的金井-田治见建议的高斯平稳随机过程模型<sup>[8]</sup>：

$$\left. \begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} \\ S_{\ddot{u}_p}(\omega) &= |H(\omega)|^2 S_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中： $|H(\omega)|^2$  为金井-田治见建议的滤波函数； $\omega_g$ ， $\xi_g$  分别为基岩特征频率和特征阻尼比，可取

$\omega_g = 16.9 \text{ rad/s}$ ， $\xi_g = 0.94$ ； $S_0$  为地面地震加速度功率谱密度，本文分析中地震烈度按 7 度考虑，即取  $S_0 = 14.53 \text{ cm}^2/\text{s}^3$ 。

7 度地震的地面运动加速度功率谱密度如图 1 所示。该模型的地面地震运动加速度均值为 0，均方差为  $11.56 \text{ cm/s}^2$ 。

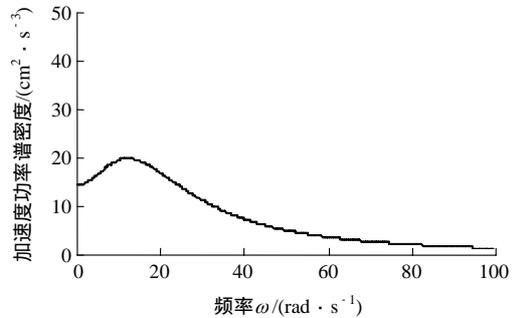


图 1 地面地震加速度功率谱密度

Fig.1 Power spectrum density of ground surface

利用现有动力分析程序求解式(4)即可获得地面加速度观测点的脉冲响应函数，计算中时间间隔  $\Delta t$  取为 0.02 s，将  $\Delta t = 0$  时刻的地震加速度以  $1/\Delta t$  输入(以保证第一个积分区间曲线下的面积为 1)，而其余时刻地震加速度值均为 0，从而得到地面加速度观测点的脉冲响应函数  $h_{\ddot{u}_p}(t)$  对应于时间间隔  $\Delta t$  的离散值。当单位脉冲函数(第一个积分区间曲线下的面积为  $1 \text{ cm/s}^2$ )作用于基岩时，地面加速度观测点的脉冲响应函数如图 2 所示。

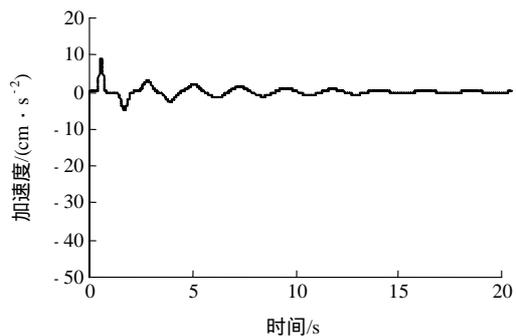


图 2 地面加速度观测点脉冲响应函数

Fig.2 Impulse response function of ground surface

对脉冲响应函数  $h_{\ddot{u}_p}(t)$  进行傅立叶变换得到地面加速度观测点的频率响应函数  $H_{\ddot{u}_p}(\omega)$ ，根据式(6)计算出由地面加速度反求基岩加速度的传递函数  $K(\omega)$ ，进而由式(9)计算得到基岩加速度功率谱(如图 3 所示)，由式(7)和(10)计算得到基岩地震加速度均值为 0、均方差为  $7.57 \text{ cm/s}^2$ 。

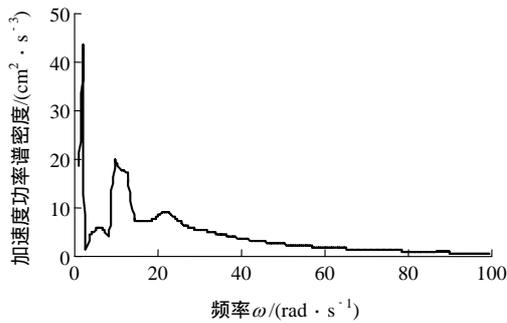


图 3 基岩地震加速度功率谱密度

Fig.3 Power spectrum density of bedrock

由计算结果可以看出, 由于地层的作用, 基岩地震加速度功率谱密度曲线与地面观测点加速度功率谱密度曲线形状不同, 尤其在低频区域(图 3), 地层作用改变了地震动的频率组成; 地层对地震运动有一定的放大作用, 对于本文的算例, 基岩地震加速度经过地层作用到达地面, 其均方差放大了 1.53 倍。由此可见, 在地下结构及岩土结构抗震计算中, 将地面地震运动作为基岩地震运动输入, 将会过低地估计结构的安全度。为了合理地估计结构安全度, 有必要研究基岩的地震运动特性。

## 6 结 语

(1) 本文提出对地面地震加速度(加速度时程、功率谱等), 利用脉冲响应函数和傅立叶变换, 通过反分析计算基岩地震加速度(加速度时程、功率谱等)。为地下结构动力分析及随机地震反应分析中地震荷载的计算提供了一种有限元反分析计算方法。

(2) 算例表明, 由于地层的作用, 基岩地震加速度功率谱密度曲线与地面观测点加速度功率谱密度曲线有比较明显的差异(尤其在低频区域), 可见地层作用改变了地震动的频率组成。

(3) 地层对地震运动有一定的放大作用, 对于本文的算例, 基岩地震加速度经过地层作用到达地面, 其均方差放大了 1.53 倍。由此可见, 在岩土工程及地下工程抗震计算中, 若将地面地震运动作为基岩地震运动输入, 将会使得结构地震响应的计算结果偏大, 从而过低地估计结构的安全度。为了合理地估计结构安全度, 有必要研究基岩的地震运动特性, 以便在抗震分析中有合理的地震动输入。

(4) 需要说明的是, 本文只是对一些简单问题进行了探讨, 其目的是为地下结构抗震计算提供一种分析思路, 为完善地下结构抗震计算理论提供一

定的理论参考。实际上, 利用二维动力有限元反分析方法计算基岩地震动统计特性是一个十分复杂的问题, 有很多问题都有待进一步研究。

## 参考文献(References):

- [1] 潘昌实, 张 弥, 吴鸿庆. 隧道力学数值方法[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1995.(Pan Changshi, Zhang Mi, Wu Hongqing. The Numerical Method of Tunnel Mechanics[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1995.(in Chinese))
- [2] 廖振鹏. 工程波动导引[M]. 北京: 科学出版社, 1996.(Liao Zhenpeng. Introduction to Wave Motion in Engineering[M]. Beijing: Science Press, 1996.(in Chinese))
- [3] 刘晶波, 吕彦东. 结构-地基动力相互作用问题的一种直接方法[J]. 土木工程学报, 1998, 31(3): 55-64.(Liu Jingbo, Lu Yandong. A direct method for analysis of dynamic soil-structure interaction[J]. China Civil Engineering Journal, 1998, 31(3): 55-64.(in Chinese))
- [4] 高 峰, 马泽宝. 无限地基的数值模拟[J]. 兰州铁道学院学报, 2002, 21(3): 9-13.(Gao feng, Ma Zebao. A numerical simulation method for infinite media[J]. Journal of Lanzhou Railway Institute, 2002, 21(3): 9-13.(in Chinese))
- [5] 曹国安. 地下结构随机地震响应和极值分析[博士学位论文][D]. 北京: 北方交通大学, 1997.(Cao Guoan. Analysis of stochastic seismic responses and peak value of the underground structures[Ph. D. Thesis][D]. Beijing: North Jiaotong University, 1997.(in Chinese))
- [6] 严松宏. 结构地震响应分析的广义脉冲函数法[J]. 兰州铁道学院学报, 2002, 21(6): 61-64.(Yan Songhong. A generalized impulse function method of structural seismic responses analysis[J]. Journal of Lanzhou Railway Institute, 2002, 21(6): 61-64.(in Chinese))
- [7] 倪汉根, 金崇磐. 大坝抗震特性与抗震计算[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1994.(Ni Hangan, Jin Chongpan. Anti-seismic Characteristics and Calculation of Dam[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1994.(in Chinese))
- [8] 李桂青, 曹 宏, 李秋胜, 等. 结构动力可靠性理论及其应用[M]. 北京: 地震出版社, 1993.(Li Guiqing, Cao Hong, Li Qiusheng, et al. Theory of Structural Dynamic Reliability and Its Application[M]. Beijing: Earthquake Press, 1993.(in Chinese))
- [9] 戴宗信. 结构动力学的概率分析[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1989.(Dai Zongxin. Probability Analysis of Structural Dynamics[M]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 1989.(in Chinese))
- [10] 徐昭鑫. 随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.(Xu Zhaoxin. Stochastic Vibration[M]. Beijing: Higher Education Press, 1990.(in Chinese))