

三参数双 τ^2 强度理论及其在岩石材料中的应用

陈四利¹, 宁宝宽^{1,2}, 鲍文博¹, 周辉³, 金生吉¹, 孙秀丽¹

(1. 沈阳工业大学 建筑工程学院, 辽宁 沈阳 110023; 2. 东北大学 资源与土木工程学院, 辽宁 沈阳 110004;

3. 中国科学院 岩土力学重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘要: 岩石力学中的强度理论是土木、采矿和水利等众多岩石工程中的安全性和稳定性设计的重要基础理论, 它的研究具有重要的意义。首先, 在二参数的双 τ^2 强度理论的基础上, 建立了三参数双 τ^2 强度理论, 并给出了材料的极限强度比, 从而说明了对应不同材料的不同强度理论。其次, 利用三参数双 τ^2 强度理论分析了岩石材料的脆性破坏, 并同某些岩石岩样的试验数据进行了对比。结果表明, 三参数双 τ^2 强度理论在岩样的强度分析中是令人满意的。

关键词: 岩石力学; 复杂应力状态; 强度理论

中图分类号: TU 451

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2005)07-1106-04

A TRI-PARAMETER STRENGTH THEORY (TWIN τ^2) AND ITS APPLICATION FOR ROCK MATERIALS

CHEN Si-li¹, NING Bao-kuan^{1,2}, BAO Wen-bo¹, ZHOU Hui³, JIN Sheng-ji¹, SUN Xiu-li¹

(1. School of Architecture and Civil Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, China;

2. Institute of Resources and Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China;

3. Key Laboratory of Rock and Soil Mechanics, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China)

Abstract: Strength theory of rock is important in safety evaluation and designs of the civil, mining and hydraulic rock engineering, and has important significance in the study of rock mechanics. In this paper, the tri-parameter strength theory under complex stress states, called twin τ^2 , is derived. At first, the relations among the compressive strength, tensile strength and shear strength are proposed. Secondly, the brittle failure of rock is analyzed by using the developed twin τ^2 strength theory and compared with the available experimental data for some rock materials. The results are shown to be satisfactory.

Key words: rock mechanics; complex stress states; strength theory

1 引言

岩石是一种应用广泛的脆性天然材料, 其破坏准则的研究一直受到众多学者的重视^[1-4]。由于工程结构中的岩石大多数处于复杂应力状态下, 因此,

建立复杂应力状态下的岩石强度理论, 对土木、采矿和水利等众多岩石工程中的安全性和稳定性的分析研究和设计具有重要的理论意义和工程实际意义。本文在文[5~7]中提出了两参数的双 τ^2 强度理论, 并成功应用于金属的塑性材料和脆性材料的研究中。本文在二参数的双 τ^2 强度理论的基础上, 建

收稿日期: 2003-12-01; **修回日期:** 2004-02-25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50204009); 沈阳工业大学学科建设基金资助项目(521100401)

作者简介: 陈四利(1959-), 男, 博士, 1982年毕业于沈阳工业大学应用力学专业, 现任教授, 主要从事建筑工程和岩石力学与工程方面的教学与研究工作。E-mail: chensl@sut.edu.cn。

立了三参数双 τ^2 强度理论,给出了岩石材料的极限强度比,并利用三参数双 τ^2 强度理论分析了岩石的脆性破坏,并与某些岩石岩样的试验数据进行了对比分析。结果表明,不同的材料对应着不同的强度理论。三参数双 τ^2 强度理论在岩样的强度分析中是令人满意的,并且完善了岩石强度理论。

2 三参数双 τ^2 强度理论表达式

根据文[5,6]中给出的二参数的双 τ^2 强度理论,本文所建立的二参数表达式为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{13}^2 + \tau_{12}^2 + A\sigma_m^2 + B\sigma_m &= C & \tau_{12} & \tau_{23} \\ \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 + A\sigma_m^2 + B\sigma_m &= C & \tau_{12} & \tau_{23} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $\tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{12}$ 均为主剪应力,且 $\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$,
 $\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$, $\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$; σ_m 为平均应力,
 $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$; 其中 σ_1, σ_2 和 σ_3 为主应力;
 A, B 和 C 为 3 个待定的参数,当 $A=0$ 时,式(1)即为双 τ^2 强度理论的推广表达式^[6]; 当 $A=B=0$ 时,式(1)即为双 τ^2 屈服准则^[7]。

在岩石的受力分析中,本文假设应力以压缩为正,拉伸为负。所以,应力 σ_1, σ_2 和 σ_3 分别表示最大主应力、中间主应力和最小主应力。设单轴压缩极限应力为 σ_c ,单轴拉伸极限应力为 σ_t ,剪切极限应力为 τ_k ,则利用式(1)可求得 3 个参数为

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{9(5\tau_k^2 - 2\sigma_c\sigma_t)}{4\sigma_c\sigma_t} \\ B &= -\frac{15(\sigma_c - \sigma_t)\tau_k^2}{4\sigma_c\sigma_t} \\ C &= \frac{5}{4}\tau_k^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

将式(2)及主剪应力和平均应力表达式代入式(1)可得

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{\alpha}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \\ \frac{5(\alpha - 1)\beta^2}{\alpha^2}\sigma_c(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{5\beta^2}{\alpha^2}\sigma_c^2 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{\alpha}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \\ \frac{5(\alpha - 1)\beta^2}{\alpha^2}\sigma_c(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{5\beta^2}{\alpha^2}\sigma_c^2 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中: σ, β 为极限应力比, $\sigma = \sigma_c / \sigma_t, \beta = \tau_k / \sigma_t$,

极限应力 σ_c, σ_t 和 τ_k 由试验确定。这样,不同材料就有不同的 α 和 β 值,也就对应着不同的强度理论。

3 结果应用与分析

式(3)适用于脆性材料的强度理论,同时也适用于 $\sigma_c = \sigma_t = \sigma_s(\alpha = 1)$ 且 $\tau_k = \sqrt{2/5}\sigma_s(\beta = \sqrt{2/5})$ 的塑性材料表达式,此时式(3)即为双 τ^2 屈服准则^[1] 表达式。对于岩石类材料来说,其抗压强度远大于抗拉强度。现讨论常见的几种岩石应力状态。

3.1 $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ 的应力状态

这是一种常见的岩石三轴试验加载工况,由式(3)的第 1 式可得

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_c} - \frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{2\alpha} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right)^2 - \frac{5(\alpha - 1)\beta^2}{2\alpha^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + 2 \frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right) - \frac{5\beta^2}{2\alpha^2} = 0 \quad (4)$$

对于不同岩性岩石的极限应力比 α 和 β 值,即得到 $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ 应力状态下的不同性质岩石的强度判据。

3.2 $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ 的应力状态

这也是一种常见的岩石三轴试验加载工况,由式(3)的第 2 式可得

$$\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c} - \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{2\alpha} \left(2 \frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right)^2 - \frac{5(\alpha - 1)\beta^2}{2\alpha^2} \left(2 \frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_3}{\sigma_c} \right) - \frac{5\beta^2}{2\alpha^2} = 0 \quad (5)$$

对于不同岩性岩石的极限应力比 α 和 β 值,即得到 $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3 > 0$ 应力状态下的不同性质岩石的强度判据。

3.3 $\sigma_3 = 0$ 的双轴应力状态

在双轴应力状态下,由式(3)可得

$$\left. \begin{aligned} 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right)^2 - 2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right) \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{\alpha} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right)^2 - \\ \frac{5(\alpha - 1)\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right) - \frac{5\beta^2}{\alpha^2} = 0 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{\alpha} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right)^2 - \\ \frac{5(\alpha - 1)\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_c} + \frac{\sigma_2}{\sigma_c} \right) - \frac{5\beta^2}{\alpha^2} = 0 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

取不同的极限应力比 α 和 β 值，即得到 $\sigma_3 = 0$ 应力状态下的不同性质岩石的极限曲线，如图 1 所示(取 $\beta = 2$)。从图中可以看出，在双向压应力状态下，当 σ_2 较小时，破坏极限应力 σ_1 随 σ_2 的增加而增加；而当 σ_2 较大时，则 σ_1 随 σ_2 的增加而减小。

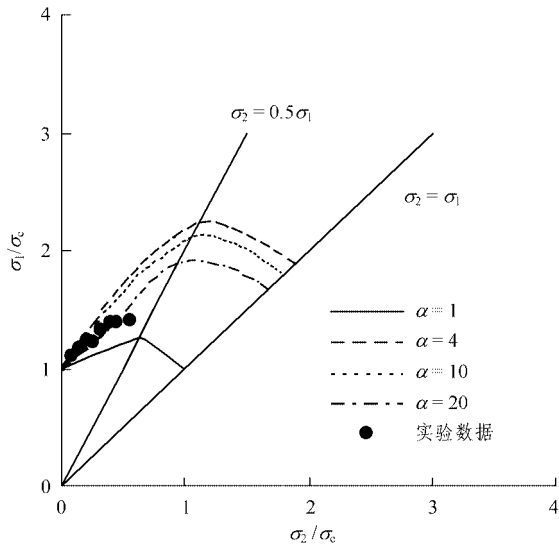


图 1 $\sigma_3 = 0$ 的双轴应力状态
Fig.1 Twin-axis stress state of $\sigma_3 = 0$

3.4 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$ 的三轴应力状态

在三轴应力状态下，式(3)可以变为

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c - \sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_c - \sigma_c} \right)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{\alpha} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_c + \sigma_c + \sigma_c} \right)^2 - \\ & \frac{5(\alpha-1)\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_c + \sigma_c + \sigma_c} \right) - \frac{5\beta^2}{\alpha^2} = 0 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ & \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_c - \sigma_c} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_c - \sigma_c} \right)^2 + \frac{5\beta^2 - 2\alpha}{\alpha} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_c + \sigma_c + \sigma_c} \right)^2 - \\ & \frac{5(\alpha-1)\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_c + \sigma_c + \sigma_c} \right) - \frac{5\beta^2}{\alpha^2} = 0 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

取不同的极限应力比 α 和 β 值，即得到 $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$ 的三轴应力状态下的不同性质材料的强度判据，如图 2 所示。

4 与试验数据的比较

为了验证三参数双 τ^2 强度理论的合理性和适用性，现将国内外的岩石试验结果与其进行对比分析。在双轴应力状态下，如图 1 所示，图中的试验

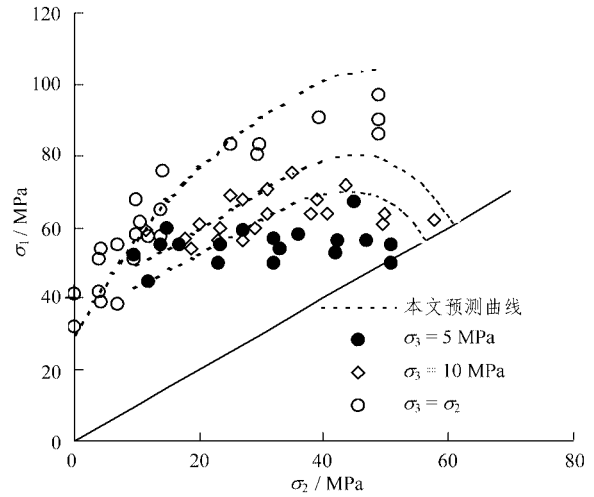


图 2 试验数据与本文预测曲线对比

Fig.2 Comparison between the predicted curves and experimental data

数据取自文[8, 9]。在三轴应力状态下，如图 2 所示，为软弱砂岩的试验结果^[10]，这里取 $\alpha = 5, \beta = 2.5$ 和 $\sigma_c = 30$ MPa。图中的试件数据，白圈表示 σ_1 与围压关系，黑圈表示 $\sigma_3 = 5$ MPa 时 $\sigma_1 - \sigma_2$ 的关系，菱形表示 σ_3 为 10 MPa 时 $\sigma_1 - \sigma_2$ 的关系。

5 结 语

本文利用三参数双 τ^2 强度理论分析了岩石材料的破坏问题，其结果讨论如下：

(1) $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ 应力状态下的强度高于 $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ 应力状态下的强度，而且在双轴应力状态 ($\sigma_3 = 0$) 下，当 σ_2 较小时， σ_1 随 σ_2 的增加而增大，而当 σ_2 较大时，则 σ_1 随 σ_2 的增加而减小，这与某些试验数据基本吻合。

(2) 图 2 中的理论预测曲线部分区域略大于试验数据，是由于作者仅仅利用了现有其他学者的试验数据，只能近似取得 α, β 和 σ_c 值而引起的理论预测曲线偏差。

(3) 本文给出的岩石材料的极限应力比 α 和 β 值，表明岩石材料的破坏与材料的特性 α 和 β 值有关，即不同材料的 α 和 β 值，对应着不同的强度判据，三参数双 τ^2 强度理论不是仅仅适用于某一类岩石材料，具有一定的普遍性。

(4) 文中的 3 个参数 A, B, C 是通过 σ_c, σ_1 和 τ_k 得到的，如果通过真三轴试验获得真实的 3 个参数，其结果将更准确和更有实际意义。与某些岩石

试验数据比较表明,本文的三参数双 τ^2 强度理论在岩石材料的强度分析中是可行的,完善了岩石材料的强度理论。

参考文献(References):

- [1] 俞茂宏. 岩石类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1-10.(Yu Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its applications[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(2): 1-10.(in Chinese))
- [2] 朱浮声. 岩石的强度理论与本构关系[J]. 力学与实践, 1997, 19(5): 8-14.(Zhu Fusheng. Strength theory and constitutive relationship of rock[J]. Mechanics in Engineering, 1997, 19(5): 8-14.(in Chinese))
- [3] 李云安,葛修润. 岩土强度准则及其参数估算研究[J]. 西部探矿工程, 2003, (4): 43-46.(Li Yun'an, Ge Xiurun. Strength criteria of rock soil and parameters estimate[J]. West-China Exploration Engineering, 2003, (4): 43-46.(in Chinese))
- [4] 曾月稳,俞茂宏,王思敬. 岩石的非线性统一强度准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(14): 1435-1441.(Zan Yuewen, Yu Maohong, Wang Sijin. Nonlinear unified strength criterion of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(14): 1435-1441.(in Chinese))
- [5] 陈四利,俞秉义. 双 T^2 和双 τ^2 屈服准则及其推广[J]. 力学与实践, 1994, 16(5): 60-62.(Chen Sili, Yu Bingyi. Twin T^2 and τ^2 yield criteria and its generalization[J]. Mechanics in Engineering, 1994, 16(5): 60-62.(in Chinese))
- [6] 陈四利. 双 τ^2 强度理论及其推广[J]. 沈阳工业大学学报, 1995, 17(1): 65-69.(Chen Sili. Twin τ^2 strength theory and its generalization[J]. Journal of Shenyang University of Technology, 1995, 17(1): 65-69.(in Chinese))
- [7] 陈四利,俞秉义,赵利军. 双 τ^2 屈服准则及其统一表达式[J]. 沈阳工业大学学报, 1997, 19(4): 41-45.(Chen Sili, Yu Bingyi, Zhao Lijun. Twin τ^2 yield criterion and its unified form[J]. Journal of Shenyang University of Technology, 1997, 19(4): 41-45.(in Chinese))
- [8] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.(Yu Maohong. Twin Shear Stress Strength Theory and Its Applications[M]. Beijing: Science Press, 1998.(in Chinese))
- [9] Mogi K. Effects of intermediate principal stress on rock failure[J]. J. Geophys. Res., 1967, 72: 5117-5131.
- [10] 许东俊,耿乃光. 岩石强度随中间主应力变化规律[J]. 固体力学学报, 1985, (1): 72-80.(Xu Dongjun, Geng Naiguang. The variation law of rock strength with increase of intermediate stress[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1985, (1): 72-80.(in Chinese))

国际会议通知

由同济大学、上海市土木工程学会、美国土木工程师学会(ASCE)联合举办的国际会议(Geoshanghai International Conference)将于2006年6月2~4日在上海召开,会议主题涉及岩土工程的理论与实践,包括土力学与微观土力学、土动力学与地震工程、深基坑与围护结构、深基础、隧道及地下工程、岩土工程原位测试与监控、地基处理、土工织物、非饱和土力学、环境岩土工程、岩土工程信息化、现代城市岩土工程新技术、工程实录等,论文将以美国ASCE专辑(ASCE Geotechnical Special Publication)的形式发表,并被EI检索。详细信息请浏览<http://www.geoshanghai.org>或email至geoshanghai@mail.tongji.edu.cn,欢迎投稿和参加会议。