

# 有限板中裂纹应力强度因子的计算

王 静, 师俊平

(西安理工大学 工程力学系, 陕西 西安 710048)

**摘要:**采用 Muskhelishvili 复势理论和 Riemann-Hilbert 问题的解法, 给出了裂纹表面受伪集中力作用时的基本解。并利用“伪力法”和叠加原理给出了含中心斜裂纹的岩石类材料在压缩荷载作用下的应力强度因子的解法, 分析了裂纹方向对应力强度因子的影响。利用基本解和边界条件可以计算板长和板宽对应力强度因子的影响。

**关键词:**岩石力学; 有限板; 复势理论; 伪力法; 叠加原理; 斜裂纹; 压缩荷载

**中图分类号:** TU 45

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1000-6915(2005)06-0963-06

## CALCULATION OF STRESS INTENSITY FACTOR FOR CRACK IN A FINITE PLATE

WANG Jing, SHI Jun-ping

(Department of Engineering Mechanics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** The fundamental solutions for a crack under concentrated pseudo-traction are given by using the Muskhelishvili's complex potential theory and by the solution of Riemann-Hilbert problem. With the aid of the 'pseudo-traction' method and the superposition technique, the stress intensity factors for materials such as rock with center inclined crack under compressive load are determined and the effects of crack direction on the stress intensity factor are analyzed. The effects of finite length and finite width on the stress intensity factor are achieved by using the fundamental solution and the boundary condition.

**Key words:** rock mechanics; finite plate; complex potential theory; pseudo-traction method; superposition technique; inclined crack; compressive load

## 1 引言

含裂隙岩体在自然界是普遍存在的, 其力学特性与各项重大工程能否安全运行密切相关。近年来岩石力学领域的研究工作有了不断的深入, 并取得了重要进展: 针对无限板, 文[1]利用 G 准则和不连续位移法(DDM)研究了岩石等脆性材料在压缩荷载作用下裂纹的开裂情况; 文[2]利用试验的方法得到了裂纹在单轴受压情况下应力场的变化; 文[3]研究了裂纹在压缩状态下的联合情况, 以及翼形裂纹和

次级裂纹的初始应力和初始开裂角; 文[4]进行了单轴受荷条件下岩石的声学特性模型与试验研究; 文[5]在断裂力学的基础上, 对于材料整体受拉和局部受压情况下裂纹的闭合问题进行了讨论。针对有限板, 文[6]利用 CT 对外力作用下土体内部裂隙发育过程进行了研究; 文[7]用权函数法研究了板宽对一些简单的 I 型应力强度因子的影响。尽管如此, 从理论到实践尚有许多问题都还未得到解决。例如, 在工程实践中常常遇到受压岩石的断裂问题, 并且, 裂纹的长度与有限结构的尺寸相比已不能忽略, 因而对这方面进行深入的研究具有重要的理论与实践

**收稿日期:** 2003-09-23; **修回日期:** 2003-12-01

**基金项目:** 陕西省自然科学基金项目(2002A05)

**作者简介:** 王 静(1980-), 女, 现为硕士研究生, 主要从事岩体断裂力学方面的研究工作。E-mail: shijp@xaut.edu.cn; wj1925@sohu.com.

意义。本文利用“伪力法”<sup>[8]</sup>结合边界配置法给出了解决有限边界对应力强度因子影响的方法。以往的断裂模型是建立在裂面应力边界为自由边界条件下的，而事实上裂面上存在摩擦力。本文所建立的模型，裂面上作用有伪力。

### 2 基本方程

由文[9]理论，利用复变函数法，其应力场和位移场可表示为

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4 \operatorname{Re}[\Phi(z)] \tag{1a}$$

$$\sigma_{yy} + i\sigma_{xy} = \overline{\Phi(z)} + \Omega(z) + (\bar{z} - z)\Phi'(z) \tag{1b}$$

$$2G(u + iv) = \chi\varphi(z) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} - \overline{\omega(z)} \tag{1c}$$

$$-Y + iX = \varphi(z) + \omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} \tag{1d}$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Omega(z) = \omega'(z) \tag{1e}$$

式中： $\Phi(z)$ ， $\Omega(z)$ 均为平面内的复势函数； $G$ 为材料剪切弹性模量； $\chi = 3 - 4\nu$  (平面应变)， $\chi = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$  (平面应力)， $\nu$ 为材料泊松比； $u, v$ 分别为 $x, y$ 方向的位移分量； $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ 均为应力分量。

### 3 法向伪集中力作用下裂纹的基本解

如图1所示的矩形有限板中含有1条斜裂纹，其中心与矩形板中心重合，板宽为 $2W$ ，板长为 $2H$ ，中心斜裂纹长为 $2a$ ，裂面上 $x = b$ 处作用有一对自相平衡的法向伪集中力 $P$ ，矩形边界上有力

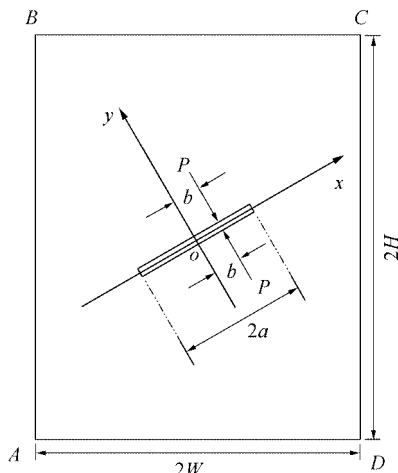


图1 裂纹受法向伪集中力作用

Fig.1 A pair of normal concentrated pseudo-force applied to a crack

$p(x, y)$ 和 $q(x, y)$ 作用。计算中采用图1所示的坐标系：坐标原点位于裂纹中心，裂纹与 $x$ 轴重合。

与图1相应的裂面应力边界条件为

$$\sigma_{yy}^+ + i\sigma_{xy}^+ = \sigma_{yy}^- + i\sigma_{xy}^- = \overline{\Phi(t)} + \Omega(t) + (\bar{t} - t)\Phi'(t) = P\delta(t - b) \quad (|t| < a) \tag{2}$$

式中： $\delta$ 为Dirac函数。

由式(1b)和(2)可得

$$\left. \begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2P\delta(t - b) \quad (|t| < a) \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

考虑到裂纹尖端附近应力场具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性，结合式(1e)和(3)及位移单值条件，可设

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^M E_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^M F_k z^k - \int \frac{P\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} dz \tag{4a}$$

$$\omega(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^M E_k z^{k-1} - \sum_{k=1}^M F_k z^k - \int \frac{P\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} dz \tag{4b}$$

式中： $E_k, F_k$ 均为待定的复系数。

由式(4a)可得

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^M E_k \frac{z^k}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[ k - (k - 1) \left( \frac{a}{z} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^M F_k k z^{k-1} - \frac{P\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} \tag{5}$$

由式(1d)，结合式(4a)，(4b)和(5)可得

$$\begin{aligned} -Y + iX &= \sum_{k=1}^M E_k \left[ \sqrt{z^2 - a^2} z^{k-1} + \sqrt{\bar{z}^2 - a^2} \bar{z}^{k-1} \right] + \sum_{k=1}^M F_k (z^k - \bar{z}^k) - \int \frac{P\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{1}{(\bar{z} - b)\sqrt{\bar{z}^2 - a^2}} \right) dz + (z - \bar{z}) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^M E_k \frac{z^k}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[ k - (k - 1) \left( \frac{a}{z} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^M F_k k z^{k-1} - \frac{P\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} \end{aligned} \tag{6}$$

为了在引入边界条件时表述的方便, 设

$$-Y + iX = \varphi(z) + \omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} = f(x, y) \quad (7)$$

边界条件为

(1) 在边界  $AB, BC, CD, DA$  上均有

$$\operatorname{Re}[f(x, y)] = p(x, y), \quad \operatorname{Im}[f(x, y)] = q(x, y)$$

(2)  $z = b$  时, 有

$$\operatorname{Re}[f(x, y)] = -P, \quad \operatorname{Im}[f(x, y)] = 0$$

在如图 1 所示的矩形有限板外部边界和内部裂纹处分别选取一定的配点。根据边界条件, 对于任选的一个配点, 式(6)左边已知, 右边项中包含待定的复系数  $E_k, F_k$ , 可根据精度要求选定幂级数的项数, 然后根据未知数的个数选定配点数, 即确定方程的个数。当方程的个数等于未知数的个数时, 方程即可求解。但通常为了得到较好的结果, 可取较多配点, 用最小二乘法求解待定的复系数  $E_k, F_k$ , 再根据式(4a), (4b)和(5)求得复势函数  $\varphi(z), \omega(z)$  和  $\Phi(z)$  的表达式。

### 4 切向伪集中力作用下裂纹的基本解

考虑尺寸如图 2 所示的矩形有限板, 矩形边界上有力  $p(x, y), q(x, y)$  作用, 矩形有限板中所含斜裂纹, 其中心与矩形有限板中心重合, 裂面上  $x = b$  处作用有一对自相平衡的切向伪集中力  $Q$ 。

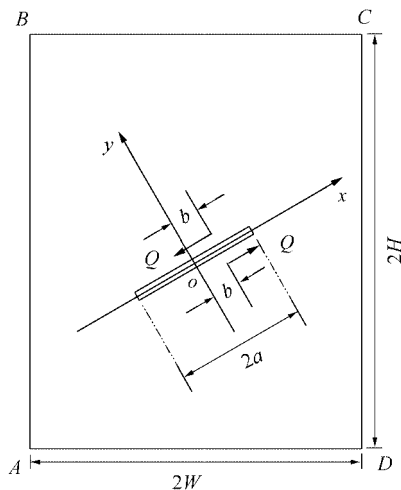


图 2 裂纹受切向伪集中力作用

Fig.2 A pair of tangent concentrated pseudo-force applied to a crack

与图 2 相应的裂面应力边界条件为

$$\sigma_{yy}^+ + i\sigma_{xy}^+ = \sigma_{yy}^- + i\sigma_{xy}^- = \overline{\Phi(t)} + \Omega(t) +$$

$$(\bar{t} - t)\Phi'(t) = iQ\delta(t - b) \quad (|t| < a) \quad (8)$$

由式(1b)和(8)可得

$$\left. \begin{aligned} [\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- &= 2iQ\delta(t - b) \\ [\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- &= 0 \end{aligned} \right\} (|t| < a) \quad (9)$$

同样, 根据式(1e), (9), 考虑到裂纹尖端附近应力场的奇异性及位移单值条件, 可有

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^M E_k z^{k-1} + \sum_{k=1}^M F_k z^k + \int \frac{iQ\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} dz \quad (10a)$$

$$\omega(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \sum_{k=1}^M E_k z^{k-1} - \sum_{k=1}^M F_k z^k + \int \frac{iQ\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} dz \quad (10b)$$

由式(10a)结合式(1e), 可得

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^M E_k \frac{z^k}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[ k - (k-1) \left( \frac{a}{z} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^M F_k k z^{k-1} + \frac{iQ\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (11)$$

由式(1d), 结合式(10a), (10b)和(11)可得

$$\begin{aligned} -Y + iX &= \sum_{k=1}^M E_k \left[ \sqrt{z^2 - a^2} z^{k-1} + \sqrt{\bar{z}^2 - a^2} \bar{z}^{k-1} \right] + \sum_{k=1}^M F_k (z^k - \bar{z}^k) + \int \frac{iQ\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi} \cdot \\ &\left( \frac{1}{(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{1}{(\bar{z} - b)\sqrt{\bar{z}^2 - a^2}} \right) dz + (z - \bar{z}) \cdot \\ &\left\{ \sum_{k=1}^M E_k \frac{z^k}{\sqrt{z^2 - a^2}} \left[ k - (k-1) \left( \frac{a}{z} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^M F_k k z^{k-1} + \frac{iQ\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

边界条件为

(1) 在边界  $AB, BC, CD, DA$  上均有

$$\operatorname{Re}[f(x, y)] = p(x, y), \quad \operatorname{Im}[f(x, y)] = q(x, y)$$

(2) 在  $z = b$  时有

$$\text{Re}[f(x, y)] = 0, \text{Im}[f(x, y)] = Q$$

在如图 2 所示的矩形有限板外部边界和内部裂纹处分别选取一定的配点。根据边界条件，对于任意的一个配点，式(12)左边已知，右边项中包含待定的复系数  $E_k, F_k$ ，可根据精度要求选定好幂级数的项数，然后根据未知数的个数选定配点数。同样，为了得到较好的结果，可取较多配点，用最小二乘法求解待定的复系数  $E_k, F_k$ ，再根据式(10a)，(10b)和(11)求得复势函数  $\varphi(z), \omega(z)$  和  $\Phi(z)$  的表达式。

### 5 任意分布荷载作用下的应力强度因子

考虑几何尺寸如图 3 所示的矩形有限板，矩形有限板中有一斜裂纹，其中心与矩形有限板中心重合，裂纹面上作用有任意分布的伪力。

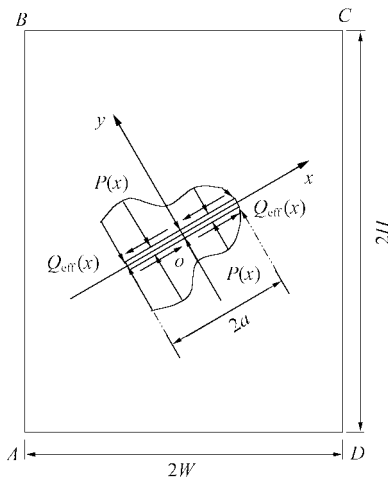


图 3 任意分布荷载作用下的有限板

Fig.3 The finite plate with an arbitrary distributed load along the face of crack

前面已分别得到任意点处有法向伪集中力作用和切向伪集中力作用时的势函数，当裂纹表面上作用任意分布的法向伪集中力  $P(x)$  和切向伪集中力  $Q(x)$  时，势函数可利用叠加原理积分得到，即

$$\Phi(z) = \int_{-a}^a \Phi_1(z) dz + \int_{-a}^a \Phi_2(z) dz \quad (13)$$

式中： $\Phi_1(z)$  为法向伪集中力作用时的复势函数，如式(5)； $\Phi_2(z)$  为切向伪集中力作用时的复势函数，如式(11)。

对于如图 4 所示的矩形有限板中含有 1 条斜裂纹，其中心与矩形有限板中心重合，板宽为  $2W$ ，

板长为  $2H$ ，中心斜裂纹长为  $2a$ ，裂纹倾角为  $\beta$ ，受双向压应力  $\sigma_{yy}(z), \sigma_{xx}(z)$  作用。由“伪力法”和叠加原理，同时考虑到裂纹面的摩擦作用，可得其远场应力在裂纹面上的作用力为

$$P(x) = -\sigma_{yy}(z) \sin^2 \beta - \sigma_{xx}(z) \cos^2 \beta \quad (14a)$$

$$Q(x)_{\text{eff}} = \begin{cases} 0 & (|\tau'| > |\tau|) \\ \tau + \tau' & (|\tau'| < |\tau|) \end{cases} \quad (14b)$$

$$\tau = -(\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \beta \cos \beta \quad (14c)$$

$$\tau' = f P(x) \quad (14d)$$

式中： $\tau'$  为裂面间由于裂纹面的相互滑动或滑动趋势所产生的相对摩擦力； $Q(x)_{\text{eff}}$  为有效剪应力； $f$  为裂纹面上的摩擦系数， $f = \tan \varphi$ ， $\varphi$  为裂纹面的内摩擦角，与裂纹面的粗糙程度有关，同时还受湿度的影响。

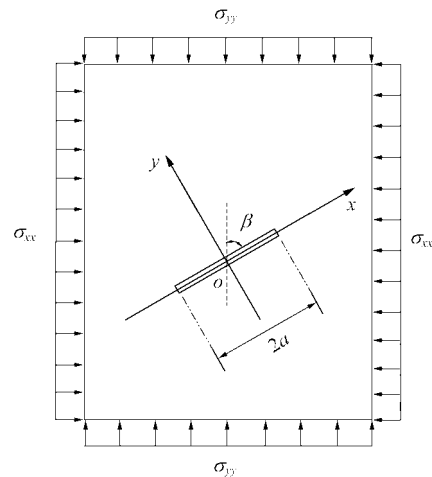


图 4 双向压应力作用下的有限板

Fig.4 Biaxial compression forces applied to the finite plate

将式(14a)，(14b)分别代入式(5)，(11)，可得复势函数  $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$ ，再将所得的复势函数  $\Phi_1(z)$  和  $\Phi_2(z)$  代入式(13)，从而可得势函数  $\Phi(z)$ 。则应力强度因子可由下式计算：

$$K = K_I - i K_{II} = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow \pm a} (\sqrt{z \mp a} \Phi(z)) \quad (15)$$

式中： $z = \pm a$  分别为裂纹的右端点和左端点。

由于在压缩荷载作用下不产生张开断裂，式(15)中的应力强度因子  $K_I$  为负值，其意义是引起裂纹的闭合。

### 6 算例

(1) 在如图 5 所示的岩石试样的中央，预制 1 条穿透矩形板的裂纹，取长×宽= $2H \times 2W = 100 \text{ mm} \times$

100 mm，中心斜裂纹长  $2a = 10$  mm，裂纹倾角为  $\beta$ 。试验中预裂纹裂面一般比较平直、光滑，摩擦系数应取较小值。这里裂面间的摩擦系数可取  $f = 0.2$ 。

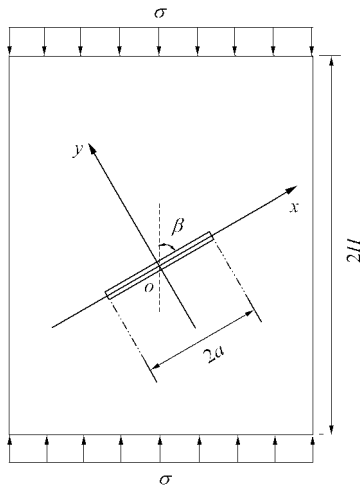


图 5 轴向均布压力作用下的有限板

Fig.5 An axial uniform pressure applied to the finite plate

(2) 如图 5 所示，轴向均布压力作用下，裂纹倾角  $\beta = 45^\circ$ ，摩擦系数  $f = 0.2$ ， $\frac{H}{W} = 1$  时，有限板中  $\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  与  $\frac{a}{W}$  的关系曲线、 $\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  与  $\frac{a}{W}$  的关系曲线分别如图 6(a)，(b)所示。斜裂纹的应力强度因子见表 1。

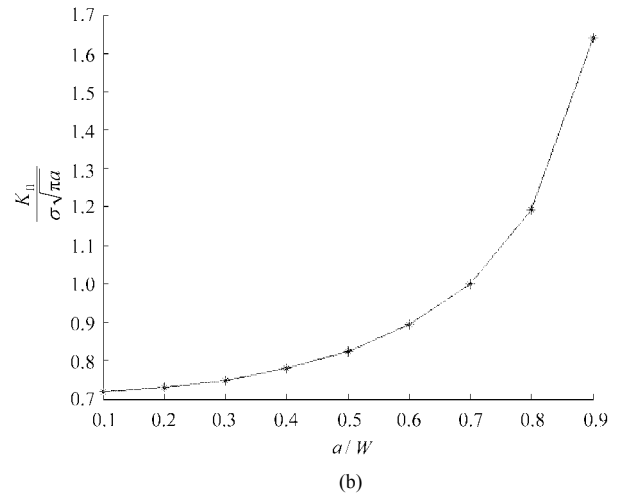
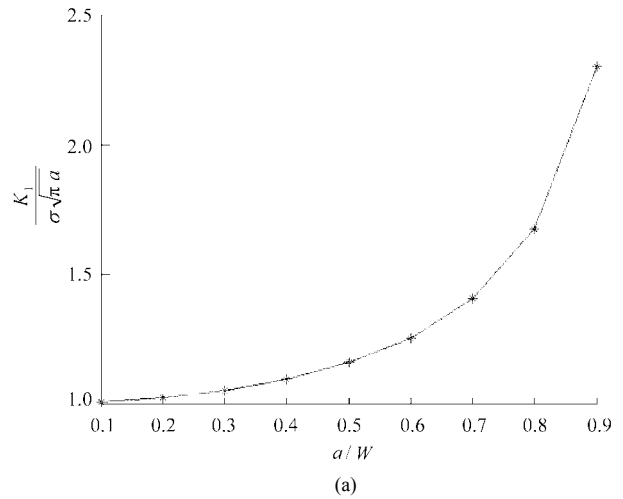


图 6 应力强度因子随裂纹长度变化

Fig.6 Normalized stress intensity factor vs. normalized crack length

### 7 结 论

对于有限板或裂纹分布复杂的情况，难以选择能满足控制方程和全部边界条件的函数。本文的思

路是选择满足控制方程和裂纹表面边界条件的函数，作为权函数的基本解严格满足问题的微分方程，所包含的近似只是在表面，而基本解的奇异性将使

表 1 斜裂纹的应力强度因子

Table 1 Stress intensity factors for the inclined cracks

预裂纹倾角 $\beta / (^\circ)$	均布应力 $\sigma / \text{MPa}$	计算值		试验值 <sup>[10]</sup>	
		$K_I / \text{kg} \cdot \text{cm}^{-3/2}$	$K_{II} / \text{kg} \cdot \text{cm}^{-3/2}$	$K_I / \text{kg} \cdot \text{cm}^{-3/2}$	$K_{II} / \text{kg} \cdot \text{cm}^{-3/2}$
5	31.0	- 3.052 4	- 33.600 7	- 3.0	- 33.6
10	23.2	- 8.708 4	- 49.505 0	- 8.7	- 49.6
15	20.8	- 17.344 7	- 64.955 4	- 17.4	- 65.0
30	21.5	- 66.909 9	- 115.810 0	- 67.2	- 116.4
40	24.2	- 124.740 0	- 148.910 0	- 125.0	- 149.0
45	27.5	- 171.160 0	- 169.570 0	- 171.9	- 171.9
60	34.5	- 323.100 0	- 186.530 0	- 323.4	- 186.8
70	34.0	- 376.540 0	- 99.395 1	—	—
80	34.0	- 413.560 0	- 31.560 0	—	—
90	34.0	- 426.420 0	0.000 0	—	—

最后形成的代数方程组的系数矩阵中对角线元素的值远大于其他元素的值，这些特点使精度大大提高，并且，只需将裂隙间的摩擦力计为零。本文的计算方法也可适用于拉应力的情况。

**参考文献(References)：**

[1] Shen B, Stephansson O. Numerical analysis of mixed I and II fracture propagation[J]. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 1993, 30(7) : 861-867.

[2] Michel K, Paul L, Jean C M. Steady-state flow experiments to visualize the stress field and potential crack trajectories in 2D elastic-brittle cracked media in uniaxial compression[J]. Int. J. Fract., 1998, 92(4) : 349-357.

[3] Antonio B. The initiation of secondary cracks in compression[J]. Engng. Fract. Mech., 2000, 66(2) : 187-219.

[4] 赵明阶, 吴德伦. 单轴受荷条件下岩石的声学特性模型与试验研究[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(5) : 540-546.(Zhao Mingjie, Wu Delun. Ultrasonic properties of rock under loading and unloading : theoretical model and experimental research[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, 21(5) : 540-546.(in Chinese))

[5] Chen Y Z. A contact crack problem in an infinite plate[J]. Int. J. Engng. Sci., 1999, 37(5) : 621-630.

[6] 施斌, 姜洪涛. 在外力作用下土体内部裂隙发育过程的 CT 研究[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(5) : 537-541.(Shi Bin, Jiang Hongtao. A study on the development of failures inside soil under the external force using CT technique[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(5) : 537-541.(in Chinese))

[7] Wang Q Z. Some simple mode-I SIF expressions of finite width strip with a center crack derived by using an approximate weight function[J]. Eng. Fract. Mech., 1998, 60(1) : 37-45.

[8] Horill H, Netmet N S. Compression induced microcrack growth in brittle solids : axial splitting and shear failure[J]. J. Geophysics Res., 1985, 90(B4), 3 105-3 125.

[9] Muskhelishvili N I. Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity[M]. [s. l.] : [s. n.], 1953.

[10] 夏熙伦, 任放. 在压缩荷载下岩石和水泥试样的复合型断裂试验及判据[J]. 水利学报, 1984, (9) : 48-53.(Xia Xilun, Ren Fang. Cement specimens under compressive loading[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1984, (9) : 48-53.(in Chinese))

**新书简介**

《土力学原理》一书由赵成刚，白冰，王运霞编著，清华大学出版社 2004 年 8 月出版，定价 29 元。

该书结合土力学学科近年来的发展，系统地介绍了土力学的基本原理和分析方法，力求深入全面地阐述土力学的基本内容和实质。该书共分 11 章，主要内容包括：土的物理性质及工程分类、土的渗透性和渗流、土体中的应力计算、土的压缩与固结、土的抗剪强度、土压力计算、地基承载力、土坡稳定分析、土的压实性等。各章后附有思考题和习题，书末附有例题精选和部分习题的详细解答。

该书可作为高等学校土木工程各专业及相近专业土力学课程的教材或参考书，也可供土木工程研究人员和工程技术人员参考。

《土木工程材料》一书由赵方冉编著，同济大学出版社 2004 年 7 月出版，定价 37 元。

该书是高等学校土木工程及相关专业本科生的“土木工程材料”课程的教材。该书根据全国高等学校土木工程专业指导委员会对土木工程专业学生的基本要求和审定的教学大纲而编写，共分 14 章，各章还附有练习题，便于教学使用。

该书可作为继续教育的教材或工程技术人员的参考书。