动静组合载荷作用下岩石失稳破坏的突变理论模型与试验研究

左宇军，李夕兵，马春德，张义平，王卫华
(中南大学 资源与安全工程学院，湖南 长沙　410083)

摘要：应用突变理论分析了受一维静载岩石系统的稳定性及变化规律，建立了一维静载岩石系统在动载作用下的非线性动力学模型，发现静载岩石系统自振频率变化规律，以及动载作用与一维静载岩石系统的响应存在非线性关系，当动载力幅和频率达到一定值时，会引起一维动静组合加载岩石系统振幅的突跳，从而引起岩样子系统的失稳破坏，在一维静载岩石系统动载作用演化过程中，动载信号强度的大小起着决定性作用。上述理论分析与一维动静组合载荷岩石系统的失稳破坏试验结果是吻合的。

关键词：岩石力学；一维静载岩石系统；动载荷；岩爆；突变
中图分类号：TU 452　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000－6915(2005)05－0741－06

CATASTROPHIC MODEL AND TESTING STUDY ON FAILURE OF STATIC LOADING ROCK SYSTEM UNDER DYNAMIC LOADING

ZUO Yu-jun，LI Xi-bing，MA Chun-de，ZHANG Yi-ping，WANG Wei-hua
(*School of Resources and Safety Engineering*，*Central South University*，*Changsha* 410083，*China*)

Abstract：The stability and its changing law of uniaxial static loading rock system are analyzed by the catastrophe theory. The relationship between dynamic loading and the response of uniaxial static loading rock system is nonlinear and changing law of self-vibration frequency of the system is found out to be adherent to the nonlinear dynamics model of uniaxial static loading rock system. It is shown that when dynamic loading frequency and amplitude reach certain value，fierce jump of amplitude of uniaxial static loading rock system under dynamic loading will occur，then failure of rock specimen subsystem will appear. And the intensity of dynamic signal plays a decisive role in the evolution of uniaxial static loading rock system under dynamic loading. These theoretical analytical results are proved by experiment on uniaxial static loading rock system under dynamic loading.

Key words：rock mechanics；uniaxial static loading rock system；dynamic loading；rock burst；catastrophe

1　引　言

岩爆是采矿过程中发生的最严重的自然灾害之一。在深部开采中，脆性岩石满足一定高的应力积累和一定范围内的能量积聚是岩爆发生的先决条件。为了研究岩爆的发生机理，在实验室常采用单轴加载脆性岩石的方法近似模拟岩爆的发生，从而掌握岩石发生岩爆的规律[1~5]。根据文[6]，从致因来看，岩爆可大致分为两类，一类是由于内部因素的作用，岩体内应力达到一定值，满足一定范围的能量积聚时发生的岩爆；另一类是岩体内应力值虽

收稿日期：2003－07－05；**修回日期：**2004－01－09
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10472134)；国家自然科学基金重大项目(50490272，50490274)
作者简介：左宇军(1965－)，男，博士，1987 年毕业于东北工学院采矿工程专业，现为高级工程师，主要从事岩石力学、爆破方面的研究工作。E-mail：zyj_great@163.com。

然不高，但由于外部因素的作用，如爆破扰动等，导致内、外应力叠加造成的岩爆，从应力特点看，该类岩爆是动静组合载荷造成的岩爆。以往的单轴加载试验主要模拟第 1 类岩爆，而模拟第 2 类岩爆的试验还很少。本文将应用突变理论对一维静载岩石系统在动力作用下的失稳破坏进行研究，并设计相关试验进行验证，以达到近似模拟第 2 类岩爆的目的。该研究对进一步了解岩爆发生的机理，预防和预报岩爆的发生都有一定的意义。

2　一维静载岩石系统稳定性突变理论分析

考虑到单轴压缩试验中岩样破坏机理与实际岩体中发生的岩爆有一定程度的相似性[5]，将岩石试件与试验机视为一个统一的力学系统来研究岩爆的准静态运动过程。由岩石试件和试验机 2 个子系统组成的岩石力学系统是非线性的，其特性由两个子系统的相互作用决定[7]。显然试验机子系统在工作范围内是线性的，它的演化直接控制着整个岩石试件－试验机力学系统的稳定性。

运用突变理论可以很好地描述上述岩石力学系统的准静态失稳过程[8]。从而对一维静载岩石系统稳定性进行分析，其力学模型见图 1。

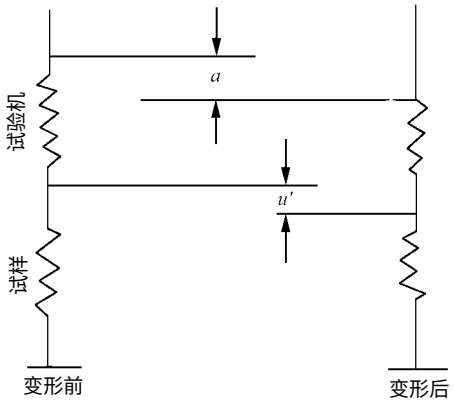

图 1　岩石静载系统力学模型[8]

Fig.1　The mechanical model of static loading rock system[8]

对于截面为 S、长为 L 的试样，荷载 R 与变形 u' 的关系为[8]

$$R = \lambda u' \mathrm{e}^{\frac{-u'}{u_0}} \tag{1}$$

式中：$\lambda = ES/L$ 为岩样的初始刚度，E 为弹性模量；u_0 为荷载－变形曲线峰值荷载所对应的变形值。系统的势函数是系统的总能量，即

$$V = \int_0^{u'} \lambda u' \mathrm{e}^{-u'/u_0} \mathrm{d}u' + \frac{1}{2} k (a - u')^2 \tag{2}$$

式中：k 为试验机的刚度，a 为系统的全位移。

对于上述力学系统，其势函数通过一定的数学变换，可写成如下形式：

$$V = x^4 + ux^2 + vx \tag{3}$$

式中：x 为状态变量，它主要表征系统当前所处的状态，此处以岩样的变形 u' 为状态变量，并用无量纲参数表示，即 $x = (u' - u_1)/u_1$，u_1 为岩样弱化本构曲线的拐点的位移，也是尖点的位置；u，v 为控制变量，可控制和决定系统的演化进程、演化途径，$u = 3(K-1)/2$，$v = 3(1 - K\xi)/2$，$K = k/\lambda_1$，$\xi = (a - u_1)/u_1$，其中 K 为试验机的刚度 k 与岩样弱化本构曲线拐点处的斜率 λ_1 之比，称为刚度比，ξ 为全位移参数，即与全位移 a 有关的无量纲参数。

对式(3)求导，便可以得到突变理论中尖点突变模型(见图 2)的平衡方程为

$$4x^3 + 2ux + v = 0 \tag{4}$$

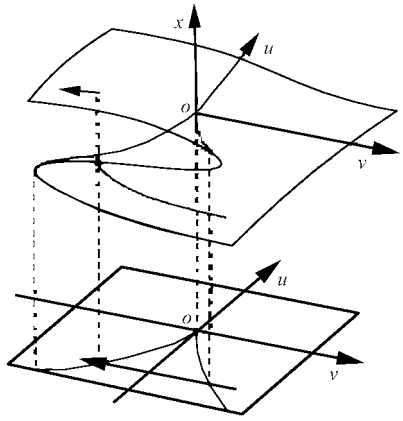

图 2　受静载岩石尖点突变理论模型

Fig.2　Cusp catastrophic model of rock under static loading

式(4)也是系统的力学平衡式。

奇点集为

$$12x^2 + 2u = 0 \tag{5}$$

从图 2 可以看出，系统的平衡曲面是一个折叠的曲面，其折叠或尖拐点的集合即为奇点集[8]，奇点集在 u-v 平面的投影称为分叉集。消去式(4)，(5)的 x，得到分叉集的方程为

$$8u^3 + 27v^2 = 0 \tag{6}$$

分叉集为一半立方抛物线。分叉集上的任意点(u，v)对应于系统的某个临界状态。图 2 表明，只要控制变量 u＜0，系统从一种状态演化到另一种状

态，穿过分叉集曲线时，系统的状态(此处为岩样的变形)将发生一个突跳，导致上述岩石力学系统失稳破坏。系统发生失稳破坏的条件为[8]

$$k-\lambda_1 \le 0 \tag{7}$$

因此，上述岩石力学系统发生失稳破坏的必要条件取决于系统的内部特性，即要求试验机的刚度必须小于或等于岩石弱化段曲线的拐点处斜率(瞬时刚度)。当试验机对岩样稳定加载到一定程度时，满足上述条件就可使岩样子系统失稳。当 $k-\lambda_1>0$，岩样子系统处于稳定状态，随着施加载荷的增加，岩样内部应力增大，岩样变形增大，稳定状态也在变化，岩样子系统的稳定程度逐渐降低。所以，该力学系统的稳定性是一个变量。当 $k-\lambda_1=0$，力学系统处于临界稳定状态。

3　一维静载岩石系统在动力作用下的演化分析

上述突变理论模型仅考虑了岩样失稳的准静态过程，没有考虑动力作用对系统演化过程的影响。事实上，当该系统处于临界状态时，只要施加一个微小的扰动，系统便有可能发生失稳。即使该力学系统远离临界失稳状态，施加较强的动力同样可以使远离临界点的系统发生失稳[9]。显然，系统越接近临界点，使系统失稳所需的动力 Δp 就越小，反过来，动力 Δp 就应越大。

3.1　一维静载岩石系统动力作用下的非线性动力学模型

假设动力作用下的一维静载岩石系统为一非线性动力学系统，受载岩样在动力作用下表现出非线性。在岩样动态失稳过程中，其非平衡合力可根据式(2)得出[10]：

$$F=-\frac{\partial V}{\partial u'}=-c(x^3+ux+v) \tag{8}$$

式中：$c=4\lambda_1 u_0{}^2/3$，c 值可由式(2)在尖点处经泰勒级数展开并截取至三次项求得[7]；$x=(u'-u_1)/u_1$，并有 $\dot{u}'=u_1\dot{x}$，$\ddot{u}'=u_1\ddot{x}$，其中 $\dot{u}'$ 和 $\ddot{u}'$ 分别为试样的速度和加速度。

设试样所受静载荷为 A_0，与 A_0 同方向的动载荷为 $A\sin\omega t$ (A 为动载的力幅，ω 为频率)，则系统的组合载荷为 $A_0+A\sin\omega t$。如果岩样振动的阻尼力是速度的线性函数，取为 $\mu\dot{u}'=\mu u_1\dot{x}$($\mu$ 为粘滞阻尼系数)，于是 F 可表示为

$$F=m\ddot{u}'+\mu\dot{u}'-(A_0+A\sin\omega t)=$$

$$mu_1\ddot{x}+\mu u_1\dot{x}-(A_0+A\sin\omega t) \tag{9}$$

式中：m 为岩样质量。

将式(8)代入式(9)得

$$mu_1\ddot{x}+\mu u_1\dot{x}+cx^3+cux+cv=A_0+A\sin\omega t \tag{10}$$

令：$\eta=\mu/m$ 为阻尼比；$\alpha=c/mu_1$ 为结构的非线性系数；$\omega_0^2=cu/mu_1$ ($u>0$)，ω_0 为岩样受载前结构系统的时振频率；$d=cv/mu_1$；$e=A_0/mu_1$；$f=A/mu_1$。这样式(10)变为

$$\ddot{x}+\eta\dot{x}+\alpha x^3+\omega_0^2x+d=e+f\sin\omega t \tag{11}$$

由于外载荷为 $A_0+A\sin\omega t$，故式(11)的解可设为以下形式：

$$x=\frac{u'-u_1}{u_1}=\frac{1}{u_1}\left[H_0+H\sin(\omega t+\phi)-u_1\right]=$$

$$\frac{H_0-u_1}{u_1}+\frac{H}{u_1}\sin(\omega t+\phi)=H_0'+H'\sin(\omega t+\phi) \tag{12}$$

式中：H_0 为初始位移，根据式(1)，H_0 与 A_0 的关系为 $A_0=\lambda H_0 e^{-H_0/u_0}$；$H$ 为系统的振幅；ϕ 为初相；$H_0'=\dfrac{H_0-u_1}{u_1}$；$H'=\dfrac{H}{u_1}$。

将式(12)代入式(11)，并略去谐波的二次项和带有 $\sin 3\omega t$ 的项[11]，并根据 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 项前的系数在等式两边分别相等，常数也相等，可得

$$H_0'\,\omega_0^2+\alpha H_0'^3+d=e \tag{13}$$

$$H'\left[(\omega_0{}^2-\omega^2+3\alpha H_0'^2)+\frac{3}{4}\alpha H'^2\right]\cos\phi-$$

$$\eta H'\omega\sin\phi=f \tag{14}$$

$$H'\left[(\omega_0{}^2-\omega^2+3\alpha H_0'^2)+\frac{3}{4}\alpha H'^2\right]\sin\phi+$$

$$\eta H'\omega\cos\phi=0 \tag{15}$$

式(13)是动载施加前内部结构与初始条件的相容关系，是否满足这种关系，对非线性方程的演化本质及特征影响甚微，在此只分析式(14)，(15)的影响。

由式(14)，(15)得

$$H'^2(\omega_0{}^2-\omega^2+3\alpha H_0'^2+\frac{3}{4}\alpha H'^2)^2+\eta^2H'^2\omega^2=f^2 \tag{16}$$

对式(16)作微分同坯变换[10]，消去其中关于 H'^2 的二次项，得

$$(B+Q)^3+(B+Q)u+v=0 \tag{17}$$

其中，

$$B=H'^2 \tag{18}$$

$$Q=8\rho/(9\alpha) \tag{19}$$

$$\rho = \omega_0^2 - \omega^2 + 3\alpha H_0'^2 \tag{20}$$

$$u = 16(3\eta^2\omega^2 - \rho^2)/(27\alpha^2) \tag{21}$$

$$v = -16[(8\rho^2 + 9\eta^2\omega^2) + 81\alpha f^2]/(729\alpha^3) \tag{22}$$

式(17)即为标准的尖点突变平衡曲面方程，其中 $B+Q$ 称为状态变量，u，v 称为控制变量，由于状态变量本身又由 2 个变量组成，故式(17)实际为 2 个尖点突变组合而成的双尖点突变。

3.2　一维静载岩石系统自振频率变化规律

当施加的动载荷小于一定值时，系统将产生振动。由式(20)知，ρ 表示外部动力作用频率与岩样静载系统自振频率的关系[10]。由于岩样被预加静载荷 A_0，使岩样静载系统($A_0 = 0$)自振频率发生了变化，从系统受载为 0 的初始自振频率 ω_0 变为 W_0 ：

$$W_0 = \sqrt{\omega_0^2 + 3\alpha H_0'^2} \tag{23}$$

从式(23)知，当系统的非线性系数 α>0 时，岩样预变形值越大，静载系统的自振频率也越大。从广义来说，当 α >0 时，系统的刚度随变形的增加而加强，表现为渐硬弹簧，此时变形增加，静载系统的自振频率也增加；当 α <0 时，系统的柔度随变形的增加而加强，表现为渐软弹簧，此时变形增加，自振频率减少；当 α = 0 时，系统为线性振动系统，变形值不影响自振频率。同时，由式(16)得

$$H' = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \eta^2\omega^2}} \tag{24}$$

式(24)表明，当外部动载信号频率与岩样静载系统的初始自振频率 ω_0 接近时，岩样子系统振动的振幅接近最大值，出现所谓的共振效应。

3.3　一维动静组合加载岩石系统的失稳条件

对式(17)求导得

$$3(B+Q)^2 + u = 0 \tag{25}$$

从式(17)，(25)得分歧点集为

$$8u^3 + 27v^2 = 0 \tag{26}$$

从图 3 可看出，当动载幅值及频率越过分歧点集位置时，岩样结构振幅将随之发生突跳，从而诱发岩样子系统失稳破坏。由于式(17)只有 u<0 时成立，即只有在 $u \le 0$ 时才能跨越分歧点集，因而由式(21)，可得岩样子系统发生失稳的必要条件为

$$\frac{16}{27}(3\eta^2\omega^2 - \rho^2)/\alpha^2 \le 0 \tag{27}$$

令 $\omega_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta - \frac{1}{2}\sqrt{3\eta^2 + 4\omega_0^{\ 2} + 12\alpha H_0'^2}$ ， $\omega_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\eta + \frac{1}{2}\sqrt{3\eta^2 + 4\omega_0^{\ 2} + 12\alpha H_0'^2}$ ，由式(27)解得动载信号使岩样子系统失稳破坏的频率 ω_L 需满足如下条件：

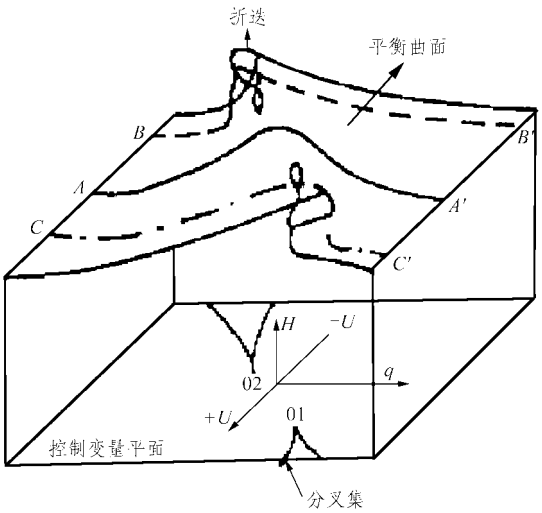

图 3　双尖点突变模型

Fig.3　Catastrophic model with double cusps

(1) 当 $W_0^2 \ge \omega^2$ 时，

$$\omega_1 \le \omega_L \le \omega_2 \tag{28}$$

(2) 当 $W_0^2 < \omega^2$ 时，

$$\omega_L < \omega_1 \quad 或 \quad \omega_L > \omega_2 \tag{29}$$

从式(28)，(29)知，由于岩样预先承受静载荷，使岩样子系统失稳破坏所需的动载频率 ω_L 取值范围发生了变化，其变化值与岩样预变形值及系统非线性系数大小有一定关系。

3.4　一维动静组合加载岩石系统的非线性演化规律

对式(25)求导得

$$6(B+Q) = 0 \tag{30}$$

由式(17)，(25)，(30)知，尖点可由 $u = 0$ 和 $v = 0$ 求得。

令 $W_0^2 = \omega_0^2 + 3\alpha H_0'^2$，$q = \omega^2 - W_0^2 = -\rho$ ， $U = A^2$ ，可得

$$q_1 = \eta\left(\frac{3}{2}\eta + \sqrt{\frac{9}{4}\eta^2 + 3W_0^2}\right) \tag{31}$$

$$q_2 = \eta\left(\frac{3}{2}\eta - \sqrt{\frac{9}{4}\eta^2 + 3W_0^2}\right) \tag{32}$$

$$U_1 = \frac{32m^2q_1^3}{81\alpha} \tag{33}$$

$$U_2 = \frac{32m^2q_2^3}{81\alpha} \tag{34}$$

即图 3 中 2 个尖点的坐标分别为 $O_1(q_1, U_1)$ 和 $O_2(q_2, U_2)$。图 3 表示在动载影响下岩样静载系统的振幅 H、频率关系 q 与动载信号强度 U 三者之间的关系。下面分析动载信号的强度 U (定义 U 的正负表示岩样静载系统受压和受拉状态)的不同取值对系统稳定性的影响：

(1) 当 $U_2 < U < U_1$ 时，对应图中路线 AA'。系统表现出弹性，系统不失稳破坏。

(2) 当 $U < U_2$ 时，对应图中的路线 BB'。振幅极大的位置出现在 $q < q_2$ 某一频率范围。

(3) 当 $U > U_1$ 时，对应图中的路线 CC'。当 $q > q_1$，系统振幅极大，产生失稳破坏。

上述分析说明岩样静载系统受动载作用时拉力、压力对岩样子系统的影响是不同的。同时动载信号强度 U 的大小对系统稳定性影响起决定性作用。

4　一维动静组合加载岩石系统的失稳破坏试验

为了对上述理论分析结果进行验证，特进行如下试验并进行分析。

4.1　试件制备

本试验的材料选择完整性和均匀性相对较好的中等强度的红砂岩。根据岩石的常规力学性能测试要求制作标准试件，试样规格为 50 mm×50 mm×100 mm 的长方体试件。并对试件的两端进行了仔细研磨，不平行度和不垂直度均小于 0.02 mm，达到国际标准的技术要求，试件表面光滑，没有明显缺陷。试件呈粉红色，平均体积密度为 1.94 g/cm^3，平均单轴抗压强度为 11.88 MPa。

4.2　试验设备

试验在 Instron1342 型电液伺服材料试验机上进行，压力传感器的最大载荷为±250 kN，具有模拟控制和计算机控制两种控制方式，除了静态加载外，还能完成正弦波、三角波和方波等幅信号和随机信号的低周疲劳加载，进行各种常规力学性能和断裂参数的测试。试验中应用低频疲劳试验控制软件 SAX 来模拟岩石材料的动态应力波加载；动态数据采集与记录采用江苏省东华测试技术开发有限公司生产的 DH－5932 数据采集记录分析仪以及 DH－3840 可编程应变放大器。该系统包括以 A/D 转换器为核心的数据采集记录仪，以控制、记录和分析为目的的微型计算机以及相应的控制软件和分析软件。可用于各种电压信号的采集、存贮、显示和处理。

4.3　试验方法和步骤

所有试件的测试，均采用连续加载方式由计算机自动控制，计算机软件的操作在中文 Windows 98 下进行。量测数据实行实时同步连续采样、存贮，整个过程由计算机自动、完整地记录试件受力与变形的全过程。

本试验采用载荷控制方式。试验步骤如下：(1) 将试件放在试验机的工作平台上，上下各放置一块 50 mm×50 mm×10 mm 规格的钢垫片；(2) 试验参数设置为：动载波形为正弦波，周期数为 1，力幅为 100 kN(合 40 MPa)，加荷频率为 2 Hz，数据采样频率为 5 kHz。最后设置极限保护以保障设备安全。(3) 利用微调在试件上加所要求的预静载 P_s (0，5，10，15 kN，对应的应力为 0，2，4，6 MPa)，然后输入动态加载指令，将试件一次性冲坏。

4.4　试验结果分析

试验中将测得的每一个试件的数据，分别处理成载荷－位移曲线。然后，按预静载的不同分类，将每一类的试验数据取平均值，再作平均值的应力－应变曲线，如图 4。

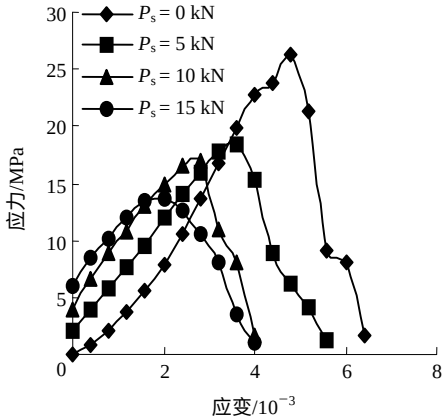

图 4　动静组合加载下的全应力－应变曲线

Fig.4　Stress-strain curves under different loading

如果动载开始点为应变零点，定义动载应变能为全应力－应变曲线下的面积，则对图 4 进一步分析，可得岩样在不同静载作用下动载应变能的变化规律，如图 5 所示。

从图 4，5 可以看出：静载荷越大，岩样失稳破坏所需的动荷载幅值和动载应变能量越小。这就说明了静载系统由于预加不同的静载荷，存在不同的稳定度，其稳定度随静应力的增大而减小。

上述试验结果与理论分析所得结论是吻合的。但不同的动载频率和幅值对动静组合加载岩石系统失稳破坏的影响有待进一步试验。

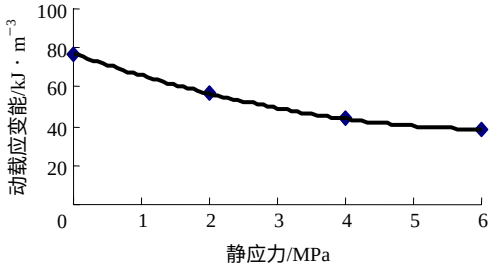

图 5　动载应变能随静应力的变化规律

Fig.5　Dynamic strain energy of rock versus static stress

从理论分析和试验所得结论来看，不同应力状态的岩体，处于不同的稳定状态，低稳定状态的岩体在小扰动下就可能发生岩爆，而较高稳定状态的岩体必须在叠加大的动载荷下才可能发生岩爆。这与实际是相符的。

5　结　论

(1) 一维静载岩石系统，其稳定性状态随着静载荷的变化而变化，系统发生失稳的必要条件取决于系统的内部特性：$k-\lambda_1 \leq 0$。

(2) 针对具有不同稳定性的一维静载岩石系统，施加不同的动应力，可能引起岩样子系统失稳破坏。

(3) 建立了一维动静组合加载岩石系统的非线性动力学模型，发现了一维静载岩石系统自振频率随预加载荷的变化规律。

(4) 动载频率满足一定条件是使一维动静组合加载岩石系统失稳的必要条件。

(5) 当动载力幅值和频率达到一定值时，会引起一维动静组合加载岩石系统振幅的突跳，从而引起岩样子系统的失稳破坏。动载信号强度大小对系统的非线性演化起决定性作用。

(6) 上述理论分析所得结论与动静组合加载岩石系统失稳破坏试验结果是吻合的。

参考文献(References)：

[1] 马春德. 一维动静组合加载下岩石力学特性的试验研究[硕士学位论文][D]. 长沙：中南大学，2004.(Ma Chunde. Experimental study on mechanics properties of rock under uniaxial coupled static-dynamic loading[M. S. Thesis][D]. Changsha：Central South University，2004.(in Chinese))

[2] Li X，Ma C. Experimental study of dynamic response and failure behavior of rock under coupled static-dynamic loading[A]. In：Aoki O ed. Proceedings of the ISRM International Symposium 3rd ARMS[C]. Rotterdam：Mill Press，2004. 891－895.

[3] 冯　涛，潘长良，王宏图等. 测定岩爆岩石弹性变形能量指数的新方法[J]. 中国有色金属学报，1998，8(2)：352－355.(Feng Tao，Pan Changliang，Wang Hongtu，et al. A new method for determining elastic strain energy index of burst rocks[J]. The Chinese Journal of Nonferrous Metals，1998，8(2)：352－355.(in Chinese))

[4] 李庶林. 岩爆倾向性的动态破坏实验研究[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版)，2001，20(4)：436－438.(Li Shulin. Experimental study of dynamics damage on rock burst tendency[J]. Journal of Liaoning Technical University (Natural Science Edition)，2001，20(4)：436－438.(in Chinese))

[5] 刘小明，李焯芬. 脆性岩石损伤力学分析与岩爆损伤能量指数[J]. 岩石力学与工程学报，1997，16(2)：140－147.(Liu Xiaoming，Li Zhuofen. The damage mechanics analysis and rock burst damage index for brittle rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，1997，16(2)：140－147.(in Chinese))

[6] 郭　然，于润沧. 有岩爆危险巷道的支护设计[J]. 中国矿业，2002，11(3)：23－26.(Guo Ran，Yu Runcang. The support design for rock burst tendency tunnels[J]. China Mining Magazine，2002，11(3)：23－26.(in Chinese))

[7] 王来贵，黄润秋，张倬元等.超前强扰诱发岩石力学系统失稳及其防灾意义的探讨[J]. 自然灾害学报，1997，6(2)：55－59.(Wang Laigui，Huang Runqiu，Zhang Zhuoyuan，et al. Inducing failure of rock mechanics system by advanced great disturbance and its significance for hazard prevention[J]. Journal of Natural Disasters，1997，6(2)：55－59.(in Chinese))

[8] 唐春安. 岩石破裂过程中的灾变[M]. 北京：煤炭工业出版社 1993.(Tang Chun′an. Catastrophe under Failure of Rock[M]. Beijing：China Coal Industry Publishing House，1993.(in Chinese))

[9] 许　强，黄润秋，王来贵. 外界扰动诱发地质灾害的机理分析[J]. 岩石力学与工程学报，2002，21(2)：280－284.(Xu qiang，Huang Runqiu，Wang Laigui. Mechanism analysis on geological hazards triggered by external disturbance[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2002，21(2)：280－284.(in Chinese))

[10] 秦四清. 斜坡失稳的突变模型与混沌机制[J]. 岩石力学与工程学报，2000，19(4)：486－492.(Qin Siqing. Nonlinear catastrophe model of slope instability and chaotic dynamics mechanism of slope evolution process[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2000，19(4)：486－492.(in Chinese))

[11] Saunders P T. An Introduction to Catastrophe Theory[M]. Cambridge，U. K.：Cambridge University Press，1980.