粘性阻尼系统解耦的充要条件

陈洪奎

(西安公路交通大学基础部，西安 710064)

多自由度粘性阻尼系统的运动微分方程为

$$M\ddot{x}+C\dot{x}+Kx=f(t) \tag{1}$$

式中，M、C、K 分别为系统的质量、阻尼与刚度矩阵，设它们是 $n\times n$ 阶实对称矩阵

定理 1 设M 是正定的，则系统 (1) 解耦的充要条件是

$$CM^{-1}K=KM^{-1}C$$

必要性：由M 正定的假设，存在正交矩阵 P，使

$$P^{-1}MP=\mathrm{diag}\,[M_i]$$

式中，$M_i>0$，定义

$$M^{1/2}=P\,\mathrm{diag}\,[\sqrt{M_i}]\,P^{-1},$$

$$M^{-1/2}=P\,\mathrm{diag}\left[\frac{1}{\sqrt{M_i}}\right]P^{-1}$$

令 $y=M^{1/2}x$，则

$$\ddot{y}+M^{-1/2}CM^{-1/2}\dot{y}+M^{-1/2}KM^{-1/2}y=M^{-1/2}f(t)$$

由于$M^{-1/2}CM^{-1/2}$是对称矩阵，存在正交矩阵Q_1，使

$$Q_1^{-1}M^{-1/2}CM^{-1/2}Q_1=\mathrm{diag}\,[\lambda_rE_r],\quad \lambda_i\neq\lambda_j$$

这里E_r 表示单位矩阵 因为$CM^{-1}K=KM^{-1}C$，知 $CM^{-1}K$ 为对称矩阵，所以

$$(M^{-1/2}CM^{-1/2})(M^{-1/2}KM^{-1/2})=(M^{-1/2}KM^{-1/2})(M^{-1/2}CM^{-1/2})$$

$$(Q_1^{-1}M^{-1/2}CM^{-1/2}Q_1)(Q_1^{-1}M^{-1/2}KM^{-1/2}Q_1)=(Q_1^{-1}M^{-1/2}KM^{-1/2}Q_1)(Q_1^{-1}M^{-1/2}CM^{-1/2}Q_1)$$

即 $Q_1^{-1}M^{-1/2}KM^{-1/2}Q_1$ 与 $Q_1^{-1}M^{-1/2}CM^{-1/2}Q_1$ 可换，因此有

$$Q_1^{-1}M^{-1/2}KM^{-1/2}Q_1=\mathrm{diag}\,[B_r]$$

由$M^{-1/2}KM^{-1/2}$对称性，易知B_r 都是对称的，于是存在正交矩阵 P_r，使 $P_r^{-1}B_rP_r=D_r$ 为对角形矩阵，令

$$Q=Q_1\,\mathrm{diag}\,[P_r]$$

则易见

$$Q^{-1}M^{-1/2}CM^{-1/2}Q=\mathrm{diag}\,[\lambda_r]$$

$$Q^{-1}M^{-1/2}KM^{-1/2}Q=\mathrm{diag}\,[D_r]$$

显然，用坐标变换 $x=M^{-1/2}QZ$，系统 (1) 解耦

充分性：设系统 (1) 在$Q=[q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n]$ 坐标下解耦，则

$$Q^{-1}MQ=\mathrm{diag}\,[M_i],\ Q^{-1}CQ=\mathrm{diag}[C_i]$$

$$Q^{-1}KQ=\mathrm{diag}\,[k_i]$$

此时

$$Q^{-1}CM^{-1}KQ=Q^{-1}KM^{-1}CQ$$

即

$$CM^{-1}K=KM^{-1}C$$

定理 2 设C 是正定的，则系统 (1) 解耦的充要条件是

$$MC^{-1}K=KC^{-1}M$$

定理 3 设K 是正定的，则系统 (1) 解耦的充要条件是

$$MK^{-1}C=CK^{-1}M$$

参 考 文 献

1 季文美，方同，陈松淇 机械振动 北京：科学出版社，1985

2 同济大学数学教研室编 线性代数 (第二版). 北京：高等教育出版社，1991

(本文于 1995 年 7 月 2 日收到)