梁内各段的剪力、弯矩方程为

AD: $V = 10^5 - 10x$ (N), $M = 10^5x - 5x^2$ (N·mm)

DE: $V = 10^4 - 10x$ (N), $M = -5x^2 - 10^4x + 9\times 10^6$ (N·mm)

将截面尺寸数值代入式 (6), 得腹板内极值存在条件

$$244 < \left|\frac{M}{V}\right| \le 277 \ (\mathrm{mm})$$

在 DE 段内, $\left|\frac{M}{V}\right| > 277$ (mm), 故该段腹板内无 σ_{r4} 的极值点

考察 AD 梁段, 将 $M(x)$、$V(x)$ 代入上式, 有

$$244 < \frac{10^5x - 5x^2}{10^5 - 10x} \le 277$$

其解为

$$241 < x \le 277$$

故 σ_{r4} 极值存在的区域为

$$241 < x \le 277 \quad 0 < |y| < 108$$

采用数值搜索方法, 可求得极值点的近似位置 $x_0 = 257$ mm, $y_0 = 78$ mm; 将其代入 (7) 式, 满足取极大值条件. 将截面尺寸及 x_0、y_0 值代入式 (3) 得

$$\sigma_{r4} = 100.2 \ (\mathrm{N/mm^2})$$

近似为腹板内的极大值. 将此值与边界极值比较, 便可确定全梁的危险应力点

(1995 年 8 月 25 日收到第 1 稿, 1995 年 11 月 14 日收到修改稿)

也谈矩形截面梁剪应力公式推导

罗开彬
(重庆建筑大学, 重庆 630045)

文献 [1] 对矩形截面梁剪应力公式在变剪力情况下进行了推导, 文献 [2] 对该推导提出了质疑, 对此笔者也谈点粗浅的看法

材料力学中, 该公式是在无分布荷载梁段 (即剪力 Q = const) 的情况下由弯曲正应力公式导出的. 对于均布荷载作用下的简支梁, 弹性力学也导出了完全相同的结果[3]. 可见该公式对变剪力或常剪力都具有普遍意义. 文献 [1] 的推导得到同一结果是预料中的事.

其实, 当其梁段上有均布荷载时, 剪力出现增量 $\Delta Q = q\Delta x$, 对应的弯矩增量 $\Delta M = \frac{1}{2} q\Delta x^2$ (图 1a). 显然, 由二阶微量弯矩产生的同样为二阶微量的正应力以及对应的一阶微量剪应力原本是可以忽略的. 因此, 用不同的方法推导该公式都必然得到相同的结果

文献 [2] 指出文献 [1] 中微段部分脱离体由于剪应力差将引起 y 向不平衡, 即有下式

$$\iint_{A^*} \Delta\tau(x, y)\,\mathrm{d}A = \frac{\Delta Q}{I_z b}\iint_{A^*} S_z^*\,\mathrm{d}A \neq 0$$

其实只要将上式完成就会发现

$$\iint_{A^*} \Delta\tau(x, y)\,\mathrm{d}A = \frac{q\Delta x}{I_z b}\int_y^{h/2} \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right) b\,\mathrm{d}y = \sigma_y b\Delta x$$

式中, $\sigma_y = \frac{q}{2}\left(1 - \frac{3}{h}y + \frac{4}{h}y^3\right)$, 这正是文献 [3] 导出的纵截面上的正应力 (图 1b). 这就说明并不存在 y 向不平衡的问题. 材料力学之所以不取含分布荷载微段, 是因为这确实超出了材料力学的范围, 而不是什么 "避免不平衡的矛盾".

至于横截面上正应力 σ_x, 此时确实是非线性的, 但文献 [1] 按线性处理, 在作法上是站得住脚的, 事实上按照文献 [3]

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z}y + q\frac{y}{h}\left(4\frac{y^2}{h^2} - \frac{3}{5}\right)$$

其非线性项对较长的梁而言是非常小的, 以 $L = 4h$ 为例, 该项仅为线性项的 1/60! 更何况材料力学中正应力公式在横力弯曲下的使用条件通常为 $L \ge 5h$ 呢? 但是, 文献 [1] 将其推导说成是 "严格" 的, 在措词上欠妥

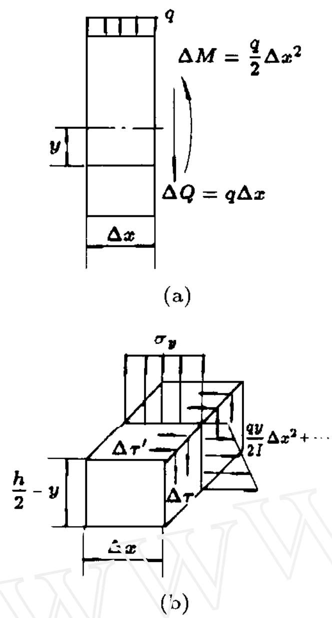

图 1

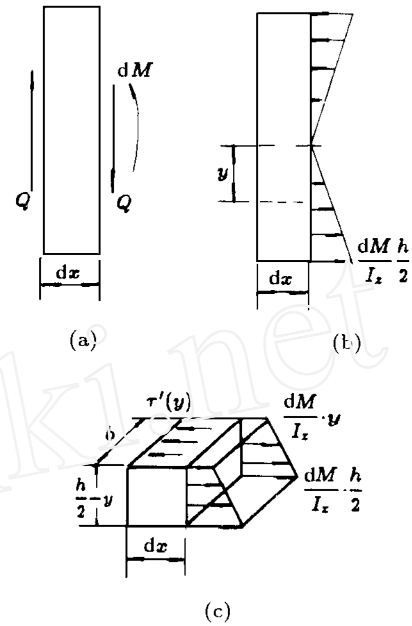

图 2

笔者建议将现行材料力学矩形截面梁剪应力公式推导过程稍作简化 根据剪力与弯矩间的微分关系 $dM/dx = Q$ 可以看出: 剪力 Q 与弯矩增量 dM 总是同时存在且互为因果关系 因此由剪力 Q 产生的剪应力, 应该是与弯矩增量 dM 产生的正应力存在联系 强调弯矩增量 dM 在推导中的作用, 就可使推导过程更简捷

为此, 建议以图 2 (a) 为分析模型 其弯矩增量 dM 产生的正应力如图 2 (b) 示, 距中性层为 y 的微段部分脱离体如图 2 (c) 示 由静力平衡

$$_x = 0:$$

$$y)b\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{dM}{I_z}\frac{h}{2} + \frac{dM}{I_z}y\right)\left(\frac{h}{2} - y\right) b = \frac{dM}{I_z} S_z^*$$

因此 $$\tau'(y) = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

由剪应力互等即得

$$\tau(y) = \frac{QS_z^*}{I_z b}$$

$$S_z^* = \int_* y_1\, dA = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

参 考 文 献

1 李正良, 陈春 矩形截面梁剪应力计算公式的严格推导 力学与实践, 1992, 14 (4)

2 薛福林 我看“矩形截面梁剪应力计算公式的严格推导” 力学与实践, 1994, 16 (5)

3 徐芝纶 弹性力学 (上册). 北京: 科学出版社, 1979

(本文于 1994 年 12 月 30 日收到)

在材料力学教学实验中如何验证第四屈服准则

肖隆秀

(北京航空航天大学, 北京 100083)

文献 [1] 提出了“屈服准则验证实验”方法, 则将屈服准则表达式统一写为 $\sqrt{\sigma^2 + \alpha\tau^2} = \sigma_s$, (第三强度理论 $\alpha = 4$, 第四强度理论 $\alpha = 3$), 用圆截面试件先拉到屈服, 但并不使屈服阶段完毕, 求出 σ_s, 然后再对这根试件进行扭转试验, 求出 τ_s, 在纯剪应力状态下, 得到 $\alpha = 3.32 \sim 3.55$ 笔者用低碳钢圆