

σ_{r4} 在应力圆上的几何表示

萧敬勋

(河北工学院, 天津 300130)

第四强度理论与第三强度理论计算结果的差异问题, 一向被人们所关注. 一般人们在主应力空间用立体几何图形来表示其差异^[1], 或在平面应力状态下 ($\sigma_3 = 0$), 于 σ_1, σ_2 平面上用平面几何图形表示其差异^[2], 但均为定性描述. 有人通过计算得出: 由第四强度理论算出的结果与第三强度理论算出的结果相差 15%, 认为这是最大的差异, 且仅发生在纯剪切 (即 $\sigma_2 = 0$) 的情况下^[3].

本文将第三、第四强度理论导出的相当应力 σ_{r3}, σ_{r4} 在应力圆上首次用几何方法表示出来, 并论证了两者的最大差异为 15.47%, 且发生在主应力间的关系为 $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ 的情况下. 纯剪切 ($\sigma_2 = 0$ 时) 仅为这一情况的特例.

1 σ_{r4} 在应力圆上的几何表示

1.1 几何表示法的推导

众所周知, 按第四强度理论材料的塑性条件为

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s \quad (1)$$

其中相当应力

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2)$$

按第三强度理论材料的塑性条件为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \quad (3)$$

其中相当应力

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (4)$$

现在推导 σ_{r4} 在应力圆上的几何表示. 设受力构件某点处的应力状态由 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 表示, 相应的应力圆如图 1 所示. σ_{r4} 在其上的几何表示作法如下:

(1) 以 B 为圆心, 以 AB 为半径作弧使与 OA 线过 B 点的垂线 BB_1 交于 B_1 .

(2) 连 B_1, A 两点, 则 $\angle B_1AC = 45^\circ$.

(3) 以 C 为圆心, 以 CB_1 线为半径作弧使与 OA 线过 C 点的垂线交于 C_1 , 则 $CC_1 = CB_1$, 连 A, C_1 两点得 $\triangle AC_1C$.

(4) 以 A 为圆心, 以 AC_1 为半径作弧交 AB_1 于 D_1 点, 则 $AC_1 = AD_1$.

(5) 设 D_1 点在 OA 线上投影为 D , 则直线

$$AD = \sigma_{r4}$$

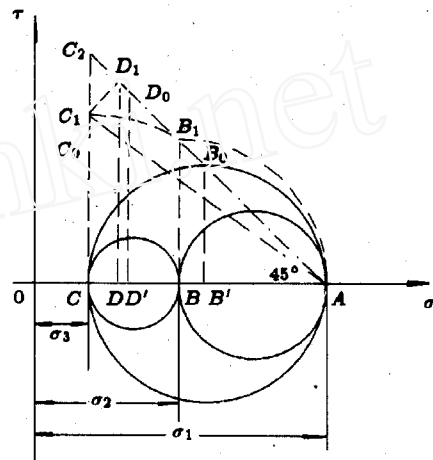


图 1

1.2 证明

(1) 在 $\triangle BCB_1$ 中 (为避免线条太乱, C, B_1 两点没连)

$$CB_1 = \sqrt{BB_1^2 + BC^2}$$

由图可见

$$CB_1 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

考虑到作法 (3), 得到

$$CC_1 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (5)$$

(2) 在 $\triangle ACC_1$ 中

$$AC_1 = \sqrt{CC_1^2 + AC^2}$$

考虑到作法 (4), 得到

$$AD_1 = \sqrt{CC_1^2 + AC^2}$$

由图并考虑式(5), 得到

$$AD_1 = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \quad (6)$$

(3) 在 $\triangle ADD_1$ 中

$$AD = AD_1 \cos 45^\circ$$

将式(6)代入, 得到

$$AD = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

考虑到式(2)可知

$$AD = \sigma_{r4} \quad (7)$$

若受力构件某点的应力状态为 $\sigma_2 = \sigma_3$, 即图中的 B 、 D 两点均与 C 点重合(若 $\sigma_2 = \sigma_1$, 则 B 点与 A 点重合), 则式(7)变为

$$AC = \sigma_{r4}$$

参阅附图可知

$$\sigma_{r4} = \sigma_{r3}$$

这一结论与式(2)当 $\sigma_2 = \sigma_3$ (或 $\sigma_2 = \sigma_1$) 时得出式(4)的结果是一致的.

2 σ_{r4} 与 σ_{r3} 的差值问题

现在讨论在什么情况下, σ_{r4} 与 σ_{r3} 的差值最大, 以及最大差值是多少?

由图可见, σ_{r3} 与 σ_{r4} 的差值为图中的 CD 线, 欲使 CD 线最长, 由作图过程可知: 需使 CC_1 线或 CB_1 线最短, 显然 C 与 B_0 的连线 CB_0 垂直于线 AD_1 (半圆的弓形角是直角), CB_0 即是 C 到 AD_1 线的最短距离.

2.1 σ_{r3} 与 σ_{r4} 最大差值的几何作法

(1) 在 OA 线上, 取 $OB' = \frac{1}{2}(OC + OA)$, 即取

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (8)$$

这时图中的 B 点移到 B' 的位置, 并被 B' 点取代.

过 B' 点作 OA 线的垂线, 交应力圆 AC 于 B_0 点, 连 C 、 B_0 两点则

$$CB_0 \perp AD_1$$

(2) 以 C 为圆心, CB_0 线为半径作弧, 交 OA 线的垂线 CC_0 于 C_0 点, 则

$$CC_0 = CB_0$$

延长 CC_0 线与 AB_0 线交于 C_2 点.

(3) 以 A 为圆心, 以 AC_0 为半径作弧, 交 AB_0 线于 D_0 点, 则

$$AD_0 = AC_0$$

(4) 设 D_0 在 OA 线上的投影为 D' , 则 CD' 线即为 σ_{r3} 与 σ_{r4} 的最大差值.

2.2 σ_{r3} 与 σ_{r4} 的最大差值

(1) 由图可见, 在 $\triangle ACB_0$ 中(避免线条太乱, C 、 B_0 两点没连)

$$CB_0 = AC \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

由作法(2)可知

$$CC_0 = CB_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (9)$$

(2) 由图可见, 在 $\triangle ACC_0$ 中(A 、 C_0 两点没连)并考虑式(9), 可得

$$AC_0 = \sqrt{CC_0^2 + CA^2} = \sqrt{\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1 - \sigma_2)\right]^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

根据作法(3), 可知

$$AD_0 = AC_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (10)$$

(3) 由图可见, 在 $\triangle ACC_2$ 中

$$AC_2 = \frac{AC}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (11)$$

(4) 由图可见, 并考虑式(10), 式(11), 可得

$$C_2D_0 = AC_2 - AD_0 = (\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}})(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (12)$$

(5) 由作法(4)可知

$$CD' = C_2D_0 \cos 45^\circ$$

考虑到式(12), 可得

$$CD' = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (13)$$

(6) 由图可见, 并考虑式(10)

$$AD' = AD_0 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (14)$$

(7) σ_{r3} 与 σ_{r4} 的最大差值, 由式 (13)、式 (14) 可知 σ_{r3} 与 σ_{r4} 的最大差值为

$$\frac{\sigma_{r3} - \sigma_{r4}}{\sigma_{r4}} = \frac{CD'}{AD'} = 15.47\% \quad (15)$$

这一情况发生在式 (8) $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$ 所示的条件, 当 $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$ 时, 为纯剪切应力状态, 是式 (8) 的特例, 当然也包括在式 (8) 所示的

应力状态之中.

参 考 文 献

- 1 徐秉业. 塑性理论简明教程. 北京: 清华大学出版社, 1981
- 2 铁摩辛柯 S. 高等材料力学. 北京: 科学出版社, 1964
- 3 刘鸿文. 材料力学. 北京: 高等教育出版社, 1982

(本文于 1994 年 10 月 24 日收到)

关于偏心梁单元刚度矩阵的几点说明

傅永华

(武汉交通科技大学港机系, 武汉 430063)

用有限单元法分析加筋板或加筋箱形结构件时, 采用板梁组合单元计入筋板的作用. 由于视为梁单元的筋板相对于板中性面往往有较大的偏心, 宜采用偏心梁单元刚度矩阵进行分析. 偏心梁单元刚度矩阵由通常的梁单元刚度矩阵向偏心轴转换得来, 这种转换过程是讲授板梁组合问题的基本内容之一, 多见于机械结构分析有限元教材. 分析中往往通过几何作图描述偏心轴与中和轴对应结点的位移转换关系^[1,2], 这种叙述方式相当费解. 其实运用矢量分析这一数学工具可以较圆满地处理好这个问题. 个别教科书也有这样的尝试^[3], 但其中对矢量积的定义有误, 而且在结点力的转换中套用结点位移的转换关系, 并对这种转换矩阵运用正交矩阵的性质, 这都是不妥当的, 由此得到的最后结论不可避免地出现错误.

教学实践说明, 关于板梁组合单元的这部分内容如不加以改造处理, 学生很难接受. 经过反复推敲, 我们对此作如下分析, 并取得了较满意的教学效果.

如图 1 所示, 梁单元中和轴为 i_1, j_1 , 它在板单元中面上的偏心轴为 i, j . 先考察偏心轴结点 i 与中和轴结点 i_1 之间的位移转换关系.

记矢量

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}i_1 = \{e_x, e_y, e_z\}$$

其中偏心

$$e_x = x_{i_1} - x_i, \quad e_y = y_{i_1} - y_i, \quad e_z = z_{i_1} - z_i$$

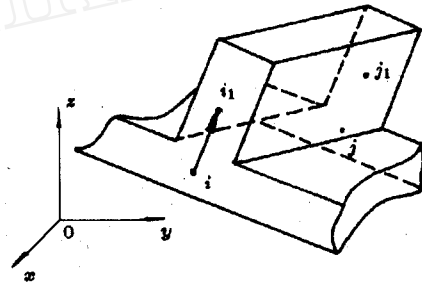


图 1

设弹性体受力变形后矢量 \mathbf{r} 转动了角度 θ , 用双矢量标绘矢量 θ (图 2). 注意到小变形基本假定, 由矢量积的定义可知^[4], i_1 点对 i 点的相对位移矢量为

$$\mathbf{S} = \theta \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = (e_z\theta_y - e_y\theta_z)\mathbf{i} + (e_x\theta_z - e_z\theta_x)\mathbf{j} + (e_y\theta_x - e_x\theta_y)\mathbf{k}$$

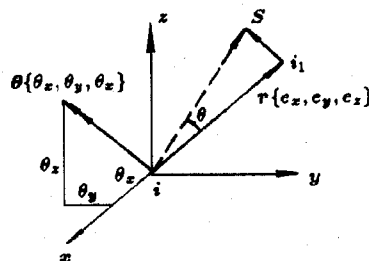


图 2