

令界面摩擦系数  $\mu = 0.25$ , 应该说明此值是偏小的估计. 其他参数已由前文给出. 于是算得  $k = 0.0213$ .  $\theta = 1.351$ ,  $\bar{\lambda} = 0.002367 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\bar{\sigma} = 1.924 \text{ GPa}$ . 图 3 中虚线为无量纲拔出应力  $\bar{\sigma}_d^p = \sigma_d^p / \sigma_0$ , 其值由图 3 的右纵坐标标出. 实线为无量纲能量释放率  $\bar{G}_{II} = G_{II} / \left( \frac{\sigma_0^2 r_f}{4E_f} \right)$ , 左侧纵坐标表示  $\bar{G}_{II}$  的值. 可见, 界面残余应力与摩擦对界面断裂能量释放率有明显的影响.

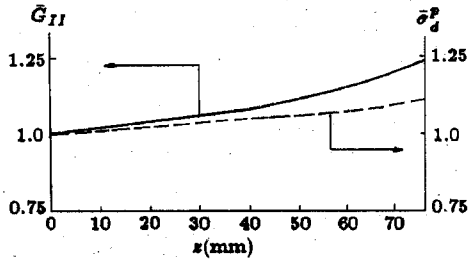


图 3  $\bar{G}_{II}$  与  $\bar{\sigma}_d^p$  随裂纹长度  $z$  的变化

#### 4 结束语

关于纤维 / 基体界面开裂能的研究虽然已有 20 多年的历史了, 并发展了多种力学模型, 但至今仍不能说问题已经解决了. 从理论上说,  $G_{II}$  的精确计算需要知道纤维与基体内的应力分布. 然而, 不论剪滞理论还是简化的弹性理论, 都只能给出近似的结果. 从试验上看, 用轴对称单纤维拔出试验法测定  $G_{II}$  原理很简单颇受人们欢迎, 但是实施起来却相当麻烦, 纤维埋入长度, 纤维自由长度 (纤维

夹具与基体之间的距离), 试验系统的刚性, 界面残余应力与摩擦力等因素都对试验结果造成很大影响. 若计及树脂粘弹性效应问题就更复杂多了.

#### 参 考 文 献

- 1 Outwater J O and Murphy M C. Proc. 24th SPI/RP Conference. Paper C11, New York, 1989
- 2 Kelly A. Strong Solids. 2nd Ed. Oxford: Clarendon Press, 1973: 212
- 3 Hull D. An Introduction to Composite Materials. Cambridge University Press, 1981: 145. 也可见中译本《复合材料导论》张双寅等译, 北京: 中国建筑工业出版社, 1992: 182
- 4 Kim J K, Mai Y W. *Comp Sci Tech*, 1991, 41: 333~378
- 5 Chua P S, Piggott M R. *Comp Sci Tech*, 1985, 22: 107~119
- 6 Chua P S, Piggott M R. *Comp Sci Tech*, 1985, 22: 295
- 7 Charalambides P G, Evans A G. *J Am Ceram Soc*, 1989, 72(5): 746~753
- 8 张双寅. 纤维 / 基体界面脱粘能释放率. 材料研究学报, 1996, 9(6): 563~567
- 9 Kim J K, Mai Y W. *J Mater Sci*, 1992, 27: 3143~3154
- 10 Chua P S, Piggott M R. *Comp Sci Tech*, 1985, 22: 185~196

(本文于 1995 年 6 月 9 日收到)

## 一种新的隐格式构造及在跨音流动中的应用

刘 仪 曹春丽 刘 斌

(西安交通大学叶轮机械研究所, 西安 710049)

**摘要** 本文提出了一种任意曲线坐标系下的 Navier-Stokes 方程组的隐式矢量通量分裂格式的构造方法. 该方法避开了近似因子分解、无矩阵运算, 具有精度高、稳定性好、计算量少等优点. 在扩压器进气道跨音流场的计算中, 准确地捕获了激波, 与实验比较, 结果令人满意.

**关键词** 隐格式, 矢量通量分裂, 数值计算, 跨音流场, 激波

随着计算流体力学的发展, 数值模拟的流动现象越来越复杂, 这就要求我们发展一种高效、高精度的计算方法, 近年来发展起来的矢量通量分裂格式由于能较好地模拟物理上扰动信息的传播规律, 是一种很有潜力的方法. Steger 和 Warming 于 1981 年对此作了较全面的论述<sup>[1]</sup>, 文献 [2] 将矢量通量分裂技术应用于 McCormack 的两步显格式中, 但其时间步长必须满足 CFL 条件, 收敛较慢, 且两步

格式的收敛数值解往往并不一致, 容易引起数值振荡, 稳定性较差. 文献 [3] 首次提出了利用高阶添加项构造隐格式的思想, 并进行了开拓性的研究. 本文就是参照该思想方法, 构造了隐式矢量通量分裂格式, 该格式具有时间、空间的二阶精度, 且没有二阶数值耗散, 也未加入任何人工耗散, 明显提高了对激波和各种间断面的分辨率, 精度较高, 同时对差分方程的求解避免了近似因子分解、矩阵运算, 稳定性也明显增强.

### 1 控制方程及隐式格式构造方法

在任意曲线坐标系下, 二维无因次 N-S 方程组的守恒型如下

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \hat{F}r}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}r}{\partial \eta} \right) \quad (1)$$

应用 Steger & Warming 分裂原理 [1] 对矢量通量  $\hat{F}, \hat{G}$  进行分裂, 并由无矩阵运算、无近似因子分解的隐格式构造思想 [3], 再结合矢量通量沿不同方向分裂的特点, 在方程组 (1) 右端添加高阶无穷小量, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}^-}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}^+}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}^-}{\partial \eta} = & \\ \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \hat{F}r}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}r}{\partial \eta} \right) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_{\xi}^+ \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right) + & \\ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda_{\xi}^- \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda_{\eta}^+ \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right) + & \\ \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda_{\eta}^- \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} \right) & \end{aligned} \quad (2)$$

式中,  $\hat{F}^{\pm}, \hat{G}^{\pm}$  是亚矢量通量,  $\lambda_{\xi}^{\pm}, \lambda_{\eta}^{\pm}$  分别为与  $\hat{F}^{\pm}, \hat{G}^{\pm}$  的特征值有关的标量. 这些添加项都是与  $\partial \hat{U} / \partial t$  有关的非定常项, 对方程的定常解至少在理论上认为是没有影响的. 添加的高阶小量实质上是一种隐式残差平滑手段 [3].

对 (2) 差开展开, 整理可得

$$\begin{aligned} A \delta \hat{U}_{i-1,j}^{n+1} + B \delta \hat{U}_{i,j-1}^{n+1} + C \delta \hat{U}_{i,j}^{n+1} + D \delta \hat{U}_{i,j+1}^{n+1} + \\ E \delta \hat{U}_{i+1,j}^{n+1} = \Delta \hat{U}_{i,j}^n \end{aligned} \quad (3)$$

这里

$$\begin{aligned} \delta \hat{U}^{n+1} = \hat{U}^{n+1} - \hat{U}^n \\ \Delta \hat{U}^n = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \hat{F}r}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}r}{\partial \eta} \right)^n - \left( \frac{\partial \hat{F}^+}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}^-}{\partial \xi} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \hat{G}^+}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{G}^-}{\partial \eta} \right)^n \\ A = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\lambda_{\xi}^+)^{n-1,j} \\ B = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\lambda_{\eta}^+)^{n,i,j-1} \\ C = 1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\lambda_{\xi}^+)^{n,i,j} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\lambda_{\xi}^-)^{n,i,j} - \\ \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\lambda_{\eta}^+)^{n,i,j} + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\lambda_{\eta}^-)^{n,i,j} \\ D = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\lambda_{\eta}^-)^{n,i,j+1} \\ E = -\frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\lambda_{\xi}^-)^{n,i+1,j} \end{aligned}$$

求解时, 在显式部分  $\Delta \hat{U}^n$  中,  $\hat{F}^{\pm}, \hat{G}^{\pm}$  采用二阶精度的单侧三点前(后)差, 粘性项采用中心差分, 这样在空间上具有二阶精度, 且格式构造中没有二阶耗散, 也未加入任何人工粘性, 因此该方法精度较高, 同时避免了近似因子分解和繁杂的矩阵运算, 稳定性好、收敛也较快.

对式 (3) 的求解, 可在  $i$  站上沿  $\eta$  方向用追赶法直接解, 从而提高了求解的效率, 减少了计算量.

经稳定性分析,  $\lambda$  取下述各式时, 方程组 (3) 是无条件收敛的

$$\begin{aligned} \lambda_{\xi}^+ &= \max \left\{ \rho(A^+) - \frac{\Delta \xi}{\Delta t}, 0 \right\} \\ \lambda_{\xi}^- &= \min \left\{ \rho(A^-) - \frac{\Delta \xi}{\Delta t}, 0 \right\} \\ \lambda_{\eta}^+ &= \max \left\{ \rho(B^+) - \frac{\Delta \eta}{\Delta t}, 0 \right\} \\ \lambda_{\eta}^- &= \min \left\{ \rho(B^-) - \frac{\Delta \eta}{\Delta t}, 0 \right\} \end{aligned}$$

式中,  $\rho(A^+), \rho(A^-), \rho(B^+), \rho(B^-)$  分别为矩阵  $A^+, A^-, B^+, B^-$  的谱半径.

### 2 计算结果

用上述方法对跨音扩压器进气道进行了数值计算, 其几何及气动参数取自文献 [4]、[5]. 压比  $\gamma_e = 0.722$ , 在该压比下, 扩压器将产生强激波, 它与边界层相互作用引起上壁面的分离, 对此复杂流场进行数值模拟可考察方法对求解复杂流场问题的有效性和它具有高精度、高分辨率的特点.

图 1 给出某一截面的速度分布图, 从图中可以看出计算较好地描述了边界层的分离, 且整体与实验数据较为吻合, 只是壁面附近略有差别, 可能因为壁面率在分离区使用引起的, (要说明的是该计

算点比实验测点位置稍微靠后一点)。同时,从表1可以看出计算出的分离点及再附点与实验测得的基本一致。

表 1 扩压器上壁面分离点及再附点位置

	分离点	再附点
计算值	2.02	2.38
试验值	1.98	2.41
误差	约 2.0%	约 1.2%

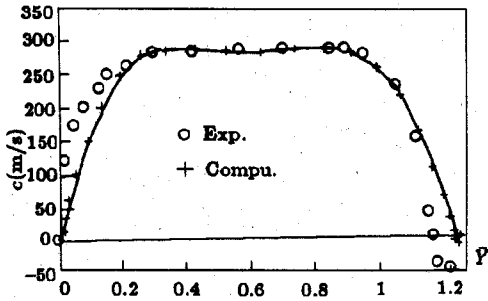


图 1 速度分布比较图

图 2、图 3、图 4 给出一组计算结果,从图 2、图 3 等压力、等密度线可以看出本方法具有高的分辨率,激波捕捉位置准确,激波抹平仅一、二个网格。从图 4 等熵增分布可知,熵增主要分布在分离区及激波后的区域。



图 2 等压力线分布图

A 115892; 9 107841; 8 99789; 7 91737.5  
6 83686; 5 75634.6; 4 67583.1; 3 59531.6  
2 51480.1; 1 43428.6

### 3 结论

(1) 本文提出的隐式矢量通量分裂差分格式能够比较准确地反映流动信息,更精确地捕捉激波,计算流动参数,可以推广到三维粘性流场的计算。

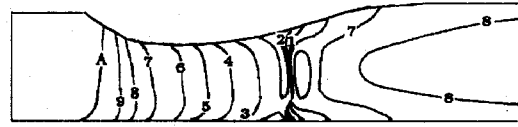


图 3 等密度线分布图

A 1.38952; 9 1.30158; 8 1.21364; 7 1.12571  
6 1.03777; 5 0.949828; 4 0.861889; 3 0.77395  
2 0.686011; 1 0.598073



图 4 等熵增线分布曲线图

A 240; 9 215.556; 8 191.111; 7 166.667  
6 142.222; 5 117.778; 4 93.3333; 3 68.8889  
2 44.4444; 1 20

(2) 该隐式矢量通量分裂格式具有精度高、稳定性好、计算量小等优点,是研究和设计扩压器进气道的有力手段之一。

### 参 考 文 献

- 1 Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with application to finite difference methods. *Journal of Computational Physics*, 1981,40: 263~293
- 2 单鹏. 矢量通量分裂显式格式及二元喷管射流模拟. *航空动力学报*, 1991,6(1): 57~62
- 3 刘斌, 向一敏. 利用高价添加项构造原参数气动方程组的差分格式. *工程热物理学报*, 1994,15(1): 25~30
- 4 Salmon J T, Bogar T J, Sajben M. Laser velocimeter measurements in unsteady, separated, transonic diffuser flows. *AIAA Paper*, 1981, No.81: 1197
- 5 Bogar T J, Sajben M, Kroutil J C. Characteristic frequency and length scales in transonic diffuser flow oscillations. *AIAA Paper* 1981, No.81: 1291

(1995年5月27日收到第1稿,  
1995年9月24日收到修改稿)

## 逆风张帆

老 亮

杭州参军独孤守忠, 领租船赴都, 夜半急追集船人, 更无他语, 乃云: “逆风必不得张帆。” 众大晒焉。

宋代高恽撰《群居解颐》