含任意形状弹性夹杂的弹性体反平面应变问题

高存法　侯密山

(石油大学机械系，山东东营 257062)

1 理论分析

如图 1 所示，无限弹性介质 s_1 包含一任意形状弹性夹杂 s_2, $\tau_{xz}^{\infty},\tau_{yz}^{\infty}$ 为远处外载，则其位移 $W(x,y)$, 剪应力 τ_{xz} 、 τ_{yz} 及边界条件可表示为 [1]

$$2GW(x,y)=\overline{\varphi(z)}+\varphi(z),\quad z=x+iy \tag{1a}$$

$$\tau_{xz}-i\tau_{yz}=\varphi'(z) \tag{1b}$$

$$\overline{\varphi(z)}-\varphi(z)=2i\int_{\Gamma}(\tau_{yz}\mathrm{d}x-\tau_{xz}\mathrm{d}y) \tag{1c}$$

其中， G 为剪切模量， $\varphi(z)$ 为复应力函数.

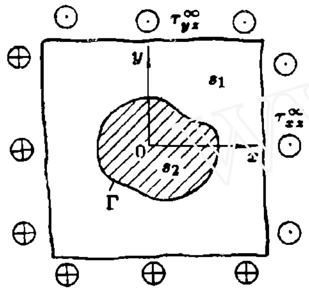

图 1 含任意形状核弹性体

假设 s_1,s_2 在其公共边界 Γ 上始终完全接触，则由式 (1) 知，在 Γ 上有下述条件成立

$$\overline{\varphi_1(z)}-\varphi_1(z)=\overline{\varphi_2(z)}-\varphi_2(z) \tag{2a}$$

$$\mu\left[\overline{\varphi_1(z)}+\varphi_1(z)\right]=\overline{\varphi_2(z)}+\varphi_2(z) \tag{2b}$$

其中， $\mu=G_2/G_1$; $G_1,\varphi_1(z)$ 和 $G_2,\varphi_2(z)$ 分别为 s_1 和 s_2 的剪切模量与复势函数.

设保角映射函数

$$z=\omega(\xi)=C\left(\xi+\sum_{n=1}^{\infty}m_n\xi^{-n}\right) \tag{3}$$

把有限域 s_2 的余集 s_1(带孔无限域) 保角映射到 ξ 平面上单位圆的外部，则根据无限远处应力的有界性， s_1 内的复势函数可表示为

$$\varphi_1(z)=Bz+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\xi^{-k}(z) \tag{4}$$

其中

$$B=\tau_{xz}^{\infty}-i\tau_{yz}^{\infty} \tag{5}$$

而 s_2 内的解析函数 $\varphi_2(z)$ 可展为 Faber 级数 [2]

$$\varphi_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_kp_k(z) \tag{6}$$

其中， b_k 为 Faber 系数，待定； $p_k(z)$ 为域 s_2 的 $k(k\geq 1)$ 阶 Faber 多项式

$$p_k(z)=\xi^{k}(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{k,n}}{\xi^{n}(z)} \tag{7}$$

其中， $\beta_{k,n}$ 可由下述递推公式求得 [2](注意：文献 [2] 中所给的公式有笔误)

$$\beta_{1,n}=m_n \tag{8a}$$

$$\beta_{k+1,n}=m_{k+n}+\beta_{k,n+1}+\sum_{i=1}^{n}m_{n-i}\beta_{k,i}-\sum_{i=1}^{k}m_{k-i}\beta_{i,n}\qquad(k,n=1,2,\cdots) \tag{8b}$$

将式 (3), (4), (6), (7) 中的级数展开项均取为 N_0, 并令 $\xi=\sigma=e^{i\theta}$, 然后代入式 (2), 比较等式两边 $\sigma^{+k}(k\geq 1)$ 的系数，并整理得

$$b_k+k_0\sum_{n=1}^{N_0}\bar{b}_n\bar{\beta}_{n,k}=c_k \tag{9a}$$

$$a_k=\sum_{n=1}^{N_0}b_n\beta_{n,k}-\bar{b}_k+\eta^0\bar{B}\bar{C}-B\cdot C\cdot m_k \tag{9b}$$

其中， $k_0=(1-\mu)/(1+\mu)$; 当 $k=1$ 时， $\eta^0=1,c_1=1$; 当 $k\geq 2$ 时， $\eta^0=c_k=0$.

由式 (9) 解得 b_k,a_k, 代入式 (4), (6), (1) 即得弹性介质或夹杂内的应力，位移.

2 算例分析

2.1 含任意椭圆夹杂时的解

对于如图 2 所示情形，保角映射函数式 (3) 可表示为

$$\omega(\xi)=Re^{i\theta_0}(\xi+m\xi^{-1}) \tag{10}$$

$$R=(a+b)/2,\quad m=(a-b)/(a+b)$$

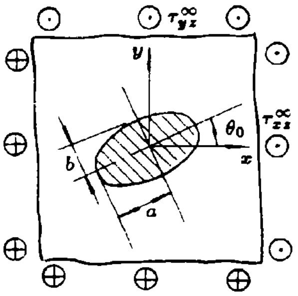

图 2 含椭圆核弹性体

即 $C = Re^{i\theta_0}, m_1 = m, m_k = 0 (k \geq 2)$, 则由式 (8) 得

$$\beta_{k,k} = m^k, \beta_{k,n} = 0 (k \neq n) \quad (k, n = 1, 2, \cdots) \tag{11}$$

把式 (11) 代入式 (9) 得

$$b_1 = \frac{(1 - k_0)(BC - mk_0 \bar{B}\bar{C})}{1 - k_0^2 m^2}; \qquad b_k = 0 \quad (k \geq 2) \tag{12a}$$

$$a_1 = \frac{k_0(m^2 - 1)(k_0 mBC - \bar{B}\bar{C})}{1 - k_0^2 m^2}; \qquad a_k = 0 \quad (k \geq 2) \tag{12b}$$

把式 (12) 代入式 (4),(6) 得

$$\varphi_1(z) = Bz + a_1 \xi^{-1}(z) \tag{13a}$$

$$\varphi_2(z) = b_1 C^{-1} z \tag{13b}$$

由式 (12),(13) 可证：当 $\theta_0 = 0$ 或 $m = 0$ 时，式 (13) 与文献 [1] 的结果一致.

2.2 含正方形夹杂时的近似解

对于图 3 所示情形，若在式 (3),(4),(6),(7) 中，取 $n = k = 3$, 则由式 (8) 得

$$[\beta] = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ 2m_2 & 2m_3 + m_1^2 & 2m_1 m_2 \\ 3m_3 & 3m_1 m_2 & 2m_2^2 + m_1 m_3 + m_1^3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

又由文献 [3] 知，此时式 (3) 可表示为

$$\omega(\xi) = \frac{3}{5} a (\xi - \frac{1}{6} \xi^{-3})$$

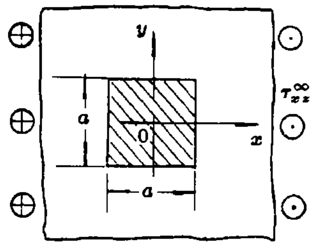

图 3 含正方形核弹性体

即 $B = \tau_{xz}^{\infty}, C = \frac{3}{5} a, m_1 = m_2 = 0, m_3 = -1/6$, 则由式 (9), (14) 得

$$(b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{12(1 - k_0)}{12 - k_0^2} BC, 0, \frac{2K_0(1 - k_0)}{12 - k_0^2} BC \right) \tag{15a}$$

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{12 - 13k_0}{12 - k_0^2} BC, 0, \frac{k_0(12 - k_0)}{6(12 - k_0^2)} BC \right) \tag{15b}$$

若在式 (15) 中，令 $k_0 = 1$ 或 $k_0 = -1$, 即得含正方形孔或正方形刚性夹杂时的近似解.

3 结束语

本文的分析方法适应于具有光滑边界，且式 (3) 为已知时的任意弹性夹杂情形；但对于具有尖角边界的夹杂，在尖角处，本文所得的结果无法精确描述尖角处的应力奇异性；工程实际中，若将尖角用曲率半径充分小的圆角来代替，并由此确定式 (3) 中级数的项数，则可求得其足够精确的近似解.

参 考 文 献

1 Gong S X, Meguid S A. A general treatment of elastic field of an elliptical inhomogencity under antiplane shear. *ASME, J of Appl Mech*, 1992, 59:131–135

2 Kosmodamianskii A S, salorov S A. Thermal stress in concented multiply plates. Vishcha Shkola, Kiev, 1983(俄文): 45–46

3 萨文 Г Н. 孔附近的应力集中. 北京：科学出版社，1958

(1994 年 10 月 18 日收到第 1 稿，
1995 年 2 月 20 日收到修改稿)