联立以上两式求解

$$\Delta l_1 = \frac{\sqrt{2}E_2A_2\delta}{2E_1A_1+\sqrt{2}E_2A_2}\,,\quad \Delta l_2 = \frac{2\sqrt{2}E_1A_1\delta}{2E_1A_1+\sqrt{2}E_2A_2}$$

值得指出，公式 (1) 和 (2) 虽然是由桁架结构推导的，但是可以证明，它们对刚架和曲杆也是正确的. 当然这时我们不考虑弯曲变形效应，而只是计算轴向力引起的长度变化.

例 2　如图 3 所示均质薄圆环，已知轴线直径 D, 横截面面积 A, 材料弹性模量 E, 在两段长 s 的对称圆弧上受均布法向力 q, 求圆环轴线总伸长量.

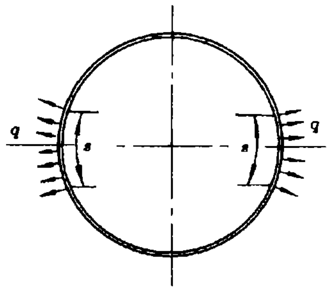

图 3

解　作用在圆环上的载荷可以看作无数对平衡的微集中力，故根据 (1), 总伸长量为

$$\Delta l = \int_0^s \frac{q\mathrm{d}s\cdot D}{EA} = \frac{qsD}{EA} \tag{3}$$

从上式，还有两种有意义的特殊情况的解：

1) 沿某直径作用一对集中拉力 P, 令 s 趋于零而保持 $q\cdot s=P$, (3) 式成为

$$\Delta l = \frac{PD}{EA}$$

2) 整个圆环作用法向均布拉力 q, 令 $s=\frac{\pi}{2}D$, (3) 式成为

$$\Delta l = \frac{\pi q\cdot D^2}{2EA}$$

(1994 年 11 月 10 日收到第 1 稿，
1995 年 1 月 3 日收到修改稿)

连续梁压杆临界载荷求解的等效法

张进国　崔淑萍
(山东莱阳农学院农业工程系　莱阳　265200)

1　连续梁压杆临界载荷求解的等效法

设有 n 跨连续梁压杆受轴向载荷 P 的作用，如图 1 所示，压杆 i 跨 $(1\le i\le n)$ 的抗弯刚度为 E_iI_i, 长度为 L_i, 左支座标号为 i, 右支座标号为 $i+1$.

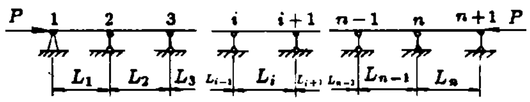

图 1

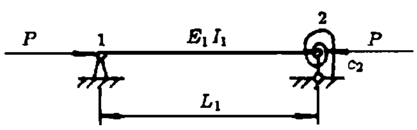

图 2

该连续梁压杆可以等效成图 2 所示的力学模型，图中 c_2 为支座 2 的等效刚度系数，它代表连续梁压杆第 2 跨到第 n 跨各部分对第 1 跨的刚性影响.

连续梁压杆 (图 1) 的临界载荷方程可由其等效力学模型 (图 2) 确定为

$$\frac{1}{3}s_1\psi(u_1) = -\frac{1}{c_2} \tag{1}$$

式中，等效刚度系数 c_2 可由简支梁在轴向载荷和端部弯矩联合作用下变形公式确定.

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{3}s_2\left[\psi(u_2) - \frac{c_3s_2\phi^2(u_2)}{12+4c_3s_2\psi(u_2)}\right]$$

$$\frac{1}{c_3} = \frac{1}{3}s_3\left[\psi(u_3) - \frac{c_4s_3\phi^2(u_3)}{12+4c_4s_3\psi(u_3)}\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{c_i}=\frac{1}{3}s_i\left[\psi(u_i)-\frac{c_{i+1}s_i\phi^2(u_i)}{12+4c_{i+1}s_i\psi(u_i)}\right]$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{c_n}=\frac{1}{3}s_n\left[\psi(u_n)-\frac{c_{n+1}s_n\phi^2(u_n)}{12+4c_{n+1}s_n\psi(u_n)}\right]$$

$$c_{n+1}=0$$

$$s_i=\frac{L_i}{E_iI_i}\quad(1\le i\le n)$$

$$u_i=\frac{L_i}{2}\sqrt{\frac{P}{E_iI_i}}\quad(1\le i\le n)$$

$$\psi(u_i)=\frac{3}{2u_i}\left(\frac{1}{2u_i}-\frac{1}{\mathrm{tg}2u_i}\right)\quad(1\le i\le n)$$

$$\phi(u_i)=\frac{3}{u_i}\left(\frac{1}{\sin 2u_i}-\frac{1}{2u_i}\right)\quad(1\le i\le n)$$

满足式 (1)P 的最小正值即为图 1 所示连续梁压杆临界载荷.

若图 1 所示连续梁压杆右端 (支座 $n+1$) 为固定端支座，则计算等效刚度系数时取 $\frac{1}{c_{n+1}}=0$, 仍可按 (1) 式计算临界载荷.

若图 1 所示连续梁压杆左端 (支座 1) 为固定端支座，此时仍可等效成图 2 所示力学模型，所不同的是此处简支梁刚度为 E_0I_0, 且为无穷大，等效刚度系数 c_2 改为 c_1, 为连续梁各跨对左端想象跨的刚度影响等效系数，压杆临界载荷方程则写为

$$\frac{1}{c_1}=0\qquad(2)$$

式中

$$\frac{1}{c_1}=\frac{1}{3}s_1\left[\psi(u_1)-\frac{c_2s_1\phi^2(u_1)}{12+4c_2s_1\psi(u_1)}\right]$$

2 算 例

图 3 所示为 3 种端部约束不同的连续梁压杆，其抗弯刚度 $E_1I_1=E_2I_2=EI$, 跨长 $L_1=2L_2$, 现用等效法计算其临界载荷.

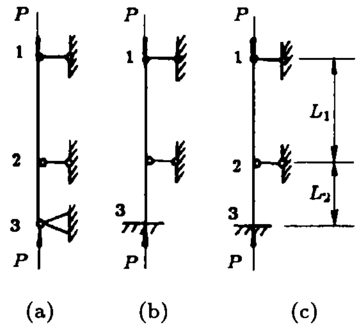

图 3

对图 3(a) 连续梁压杆，支座 3 和支座 1 均铰支，有 $c_3=0$, 将 $\frac{1}{c_2}$ 写出并代入 (1) 式得临界载荷方程为

$$s_1\psi(u_1)+s_2\psi(u_2)=0$$

因 $E_1I_1=E_2I_2, L_1=2L_2$, 令 $u_2=u$, 有 $s_1=2s_2, u_1=2u_2=2u$, 将其代入临界载荷方程得

$$2\psi(2u)+\psi(u)=0$$

从文献 [3] 表 A-1, 我们得到 $2u=1.93$, 即 $2u_2=1.93, 2u_1=3.86$ 临界载荷为

$$P_{\mathrm{cr}}=\frac{3.72EI}{L_2^2}=\frac{14.9EI}{L_1^2}$$

对图 3(b) 连续梁压杆，支座 3 为固定端，且支座 1 铰支，有 $\frac{1}{c_3}=0$, 将 $\frac{1}{c_2}$ 写出并代入 (1) 式得临界载荷方程为

$$4s_1s_2\psi(u_1)\psi(u_2)+4s_2^2\psi^2(u_2)$$
$$-s_2^2\phi^2(u_2)=0$$

将 $s_1=2s_2, u_1=2u_2=2u$ 代入上式得

$$8\psi(2u)\psi(u)+4\psi^2(u)-\phi^2(u)=0$$

从文献 [3] 表 A-1, 我们得到 $2u=2.01$, 即 $2u_2=2.01, 2u_1=4.02$, 临界载荷为

$$p_{\mathrm{cr}}=\frac{4.04EI}{L_2^2}=\frac{16.16EI}{L_1^2}$$

对图 3(c) 连续梁压杆，支座 3 和支座 1 均为固定端，有 $\frac{1}{c_3}=0$, 将 $\frac{1}{c_1}$ 写出代入式 (2) 得临界载荷方程为

$$4s_1s_2^2\psi(u_1)\psi^2(u_2)+4s_1^2s_2\psi^2(u_1)\psi(u_2)$$
$$-s_1s_2^2\psi(u_1)\phi^2(u_2)-s_1^2s_2\phi^2(u_1)\psi(u_2)=0$$

将 $s_1=2s_2, u_1=2u_2=2u$ 代入得

$$4\psi(2u)\psi^2(u)+8\psi^2(2u)\psi(u)$$
$$-\psi(2u)\phi^2(u)-2\phi^2(2u)\psi(u)=0$$

由文献 [3] 表 A-1, 我们得到 $2u=2.75$, 即 $2u_2=2.75, 2u_1=5.5$, 临界载荷为

$$p_{\mathrm{cr}}=\frac{7.56EI}{L_2^2}=\frac{30.25EI}{L_1^2}$$

3 结 语

从以上分析及算例看出，本文提出的连续梁压杆临界载荷求解的等效法，其物理意义清楚，宜于编程机算或借助数表手算，计算量小，便于工程应用，是一种连续梁压杆临界载荷求解的新方法.

参 考 文 献

1 刘鸿文编. 材料力学 (下). 第三版，北京：高等教育出版社，1992

2 刘鸿文编. 高等材料力学. 北京：高等教育出版社，1985

3 铁摩辛柯 S P, 盖莱 J M 著. 张福范译. 弹性稳定理论 (第二版). 北京：科学出版社，1965

(1994 年 4 月 5 日收到第 1 稿，1994 年 7 月 3 日收到修改稿)

谈细长压杆稳定性问题

薛 福 林

(哈尔滨工业大学，哈尔滨 150006)

为什么在材料力学中细长压杆临界挠度是 “不确定值”, 为什么用挠曲线近似微分方程能得到临界力的精确解答，笔者愿谈谈自已的看法.

不失一般性，本文以图 1 的压杆为例.

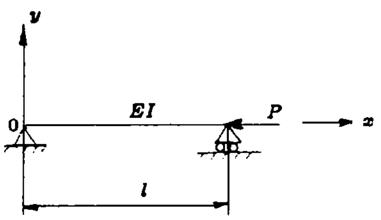

图 1

首先我们应该明确什么是压杆的临界状态. 临界状态应理解为 “出现两种可能的平衡状态，即直线状态和无限接近于直线的弯曲状态”[1].

因此，在临界状态，压杆最大挠度 A 应满足条件

$$\left.\begin{array}{ll} & A=0 \\ \text{或} & A\to 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

也就是说在临界状态，压杆挠度是无穷小量.

因此必然 y' 是无穷小量. 这样我们有等价关系

$$1+y'^2\sim 1$$

而压杆临界状态的挠曲线微分方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}+\frac{P_{\rm cr}y}{EI}=0 \qquad (2)$$

等价于

$$y''+\frac{P_{\rm cr}y}{EI}=0 \qquad (3)$$

从这个意义上讲，在临界状态，式 (3) 是挠曲线的精确微分方程，而不是近似的.

既然 A 是无穷小量，必然任何想确定出非零的常数 A 都是违背物理意义的，也必定是错误的.

有的学者认为保留方程 (2) 的非线性性质就能确定临界挠度 A[2,3]. 笔者认为这种观点是错误的.

我们可以定性地来分析一下. 如果我们采用式 (2), 这时挠曲线微分方程是非线性的. 但由于式 (2) 是二阶常微分方程，其通解必有两个任意常数[5], 设为 C 和 D, 现在我们就有 C, D 和 $P_{\rm cr}$ 这 3 个未知量需要确定，而边界条件只有 2 个

$$y\big|_{x=0}=0 \qquad (4)$$

$$y\big|_{x=l}=0 \qquad (5)$$

从数学角度讲，用 2 个独立条件是无法确定 3 个未知量的，因此至少有 1 个未知量不能确定，这样挠度方程就不能确定，最大挠度 A 自然也就无法确定.

文 [3] 之所以在对挠曲线微分方程非线性一级近似后确定出一个挠度值来 (当然这个挠度值是错误的), 是由于作者得到的式 (2) 只有一个任意常数 B, 它不是该文式 (1) 的通解，从而不合理地减少了一个未知量.

任何对挠曲线微分方程的非线性近似都不应该改变方程的阶数，因此其通解就必然有两个任意