为完成数值积分，同样把圆弧单元细分成 NS 等分，当每一段圆弧很小时，可近似用它的弦来代替，第 i 小段弦两端点坐标 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ 可由下式确定

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= x_c + R\cos\left[\alpha - \frac{\theta}{2} + (i-1)\theta/NS\right] \\ Y_1 &= y_c + R\sin\left[\alpha - \frac{\theta}{2} + (i-1)\theta/NS\right] \\ X_2 &= x_c + R\cos\left[\alpha - \frac{\theta}{2} + i\theta/NS\right] \\ Y_2 &= y_c + R\sin\left[\alpha - \frac{\theta}{2} + i\theta/NS\right] \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

同理可以导出凹边界的相应公式，公式中要求圆弧单元的张角 θ 不超过 π. 当小段圆弧用其弦代替后可按 (6) 式完成数值积分，显然，对于直线单元各小段 n_x, n_y 为常量，但对于圆弧单元各小段的外法线方向余弦就不是常量.

3 算例及分析

按照上述原理及计算公式，我们编制了计算程序. 程序中对于中空截面采用负面积法处理.

例 1 矩形面积挖去两个半圆，尺寸如图 2 示. 计算时边界分 8 个单元，其中一形心主惯矩 I_{x_c} 结果见表 1.

表 1

	理论解	本文解 NS=50	本文解 NS=100	本文解 NS=200
I_{x_c}	5843117	5844470	5843460	5843122
误差		0.023%	0.006%	0.001%

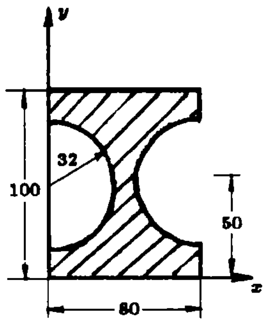

图 2

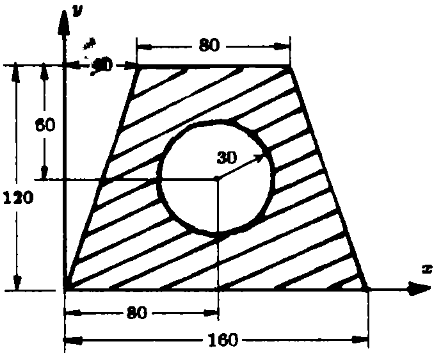

图 3

例 2 梯形面积挖去一圆孔，尺寸如图 3 所示. 采用负面积法计算，取单元细分段数 $NS = 100$, 则几何性质各量中最大误差小于 0.01%. 实践表明，单元细分的小段数 NS 同计算精度关系较大.

(1994 年 2 月 18 日收到第 1 稿，
1994 年 4 月 22 日收到修改稿)

复杂应力状态应力坐标点的简单界定

薛 福 林
(哈尔滨工业大学，哈尔滨 150006)

在材料力学中，为了导出复杂应力状态正应力和剪应力的最大值，需要说明在应力坐标平面中，主单元体的任意斜截面的应力坐标点必在图 1 的阴影区域内. 为此，现在的材料力学书中的办法是推导出斜截面上的应力 σ_N, τ_N 满足 3 个不等式，根据这 3 个不等式说明点 $D(\sigma_N, \tau_N)$ 在两个小应力主圆的外部及在大应力主圆的内部，因此在阴影区域内 [1]. 这种方法虽然精细，但用数学公式太多，推导过程复杂、抽象，篇幅太长，课堂讲授占有时间太多. 有人把这种推导简化 [2], 但未从根本上改观.

笔者采用一种几何方法，避免了复杂的数学推导，而且简明易懂.

我们知道，垂直于主截面的斜截面上应力可用应力主圆上的坐标表达 (图 1).

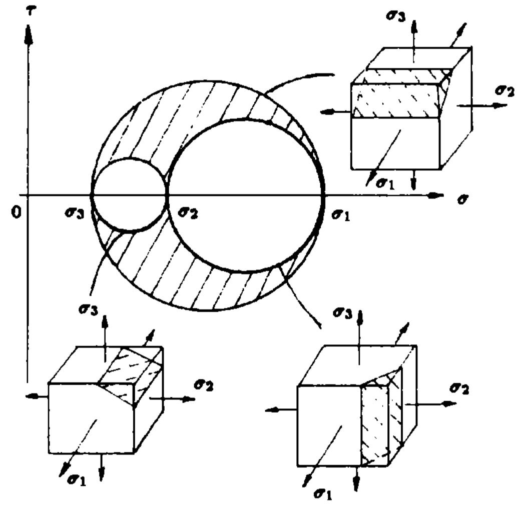

图 1

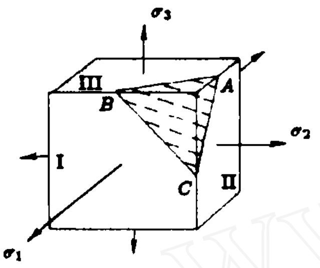

图 2

现在考虑一般的斜截面 ABC(图 2), 设这个斜截面上的正应力为 σ_N，剪应力为 τ_N，由坐标 (σ_N, τ_N) 确定的点为 D(图 3).

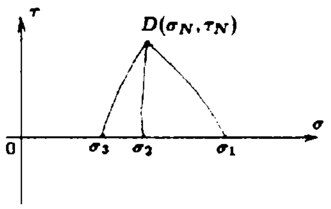

图 3

当斜截面 ABC 以 BC 为轴，以锐角转角转到主截面 I 的位置，在该过程中斜截面上的应力 σ_N, τ_N 在变化，因此点 D 便在应力坐标平面内移动，终点为 σ_1, 设轨迹为线段 $D\sigma_1$. 同样，如果斜截面以 CA 为轴转到主截面 II 的位置，点 D 的轨迹为线段 $D\sigma_2$; 如果斜截面以 AB 为轴转到主截面 III 的位置，点 D 的轨迹为线段 $D\sigma_3$.

注意到在每个旋转中，由于转角都为锐角，斜截面在最终位置前不会垂直于任何主截面.

因此点 D 不会在路径的终点前到达应力主圆上，也就是说这 3 条轨迹不会与应力主圆交于横轴以外的点. 从图 1 上看，能满足这个条件的应力坐标点 D 的最初位置只能在阴影区域内.

参 考 文 献

1 刘鸿文主编. 材料力学. 北京：高等教育出版社，1982

2 冯贤桂. 三向应力圆的一种简单推导方法. 教学与教材研究，1994(1)

(本文于 1994 年 3 月 19 日收到)

截面按指数规律变化柱的稳定性研究

吴 晓 (湖南常德高等专科学校，常德 415000)

姚春梅 (湖南常德师范专科学校，常德 415000)

截面按指数规律变化的柱，在理论上是最经济的. 按现代工业技术的要求，虽然在制造方面存在困难，但在强度和形状上都能接近理想，这是无疑的. 因此本文采用 Bessel 函数研究此类柱的稳定性，并给出了柱发生弹性失稳时的临界荷载公式.

1 柱的挠曲线方程

对于图 1 所示截面按指数规律变化的柱 [1], 可把其截面面积表示为

$$A(x) = A_0 e^{n\alpha x} \quad (n = 1, 2) \tag{1}$$